

Comparison of normal and logistic distributions by simulation

メタデータ	言語: jpn 出版者: 公開日: 2017-10-02 キーワード (Ja): キーワード (En): 作成者: メールアドレス: 所属:
URL	http://hdl.handle.net/2297/5134

正規分布とロジスティック分布の

シュミレーションによる比較

岡本安晴

- | | |
|---------|---------------|
| 0.はじめに | 3.一対比較法における比較 |
| 1.乱数の生成 | 4.まとめ |
| 2.分布の比較 | |

0.はじめに

正規分布は行動科学においてよく知られている分布である。Anderson (1984, p. 4) は正規分布の特徴の1つとして厳密な数学的取扱いが可能であることを挙げている。正規分布のこの数学的性質を利用した理論的分析を行っているものとしては、例えば感覚過程における信号検出理論 (e.g. Green & Swets, 1966) などがある。正規分布の他の望ましい特徴として中心極限定理が挙げられる。これは、多くの事象が重なって1つの事が起こる場合にはその分布は正規分布とみなせるといふものである。行動科学で扱う事象はその生起の過程が複雑であるので正規分布に基づいた分析が可能である場合が多いようである。

平均が μ 、分散が σ^2 である正規分布の確率密度関数は次式で与えられる。

$$n(x; \mu, \sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right)$$

従って、その累積分布関数 $N(x; \mu, \sigma)$ は

$$N(x; \mu, \sigma) = \int_{-\infty}^x n(t; \mu, \sigma) dt = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2\right) dt$$

となる。この $N(x; \mu, \sigma)$ は積分で与えられているため、正規分布を用いたモデルに基づいてデータの分析を行う場合、計算時間が長くなって実用的でなくなる事がある。正規分布によく似た形の分布関数でより扱い易いものとして有名なものがロジスティック関数 $G(x; \mu, \sigma)$ である。

$$G(x; \mu, s) = \frac{1}{1 + \exp\left(-\frac{x-\mu}{s}\right)}$$

従って、確率密度関数 $g(x; \mu, \sigma) = \frac{d}{dx}G(x; \mu, s)$ は次式で与えられる。

$$g(x; \mu, s) = \frac{1}{s} \cdot \frac{\exp\left(\frac{x-\mu}{s}\right)}{\left[1 + \exp\left(\frac{x-\mu}{s}\right)\right]^2}$$

$G(x; \mu, \sigma)$ 及び $g(x; \mu, \sigma)$ は指数関数 $\exp(x)$ の簡単な分数式であるので扱い易いとされている (c.f. R.K.Hambleton & H.Swaminathan, 1985)。データ分析において $N(x; \mu, \sigma)$ の積分のために計算時間がかかり過ぎるときには $N(x; \mu, \sigma)$ の代わりに $G(x; \mu, s)$ を用いることにより計算時間を実用的な長さに短縮することができる。

ロジスティック分布は有用なものであるが、正規分布には中心極限定理などに示されるような魅力的な性質がある。分析の対象となる現象の理論的考察からは正規分布が適当と考えられる場合に、計算の都合上ロジスティック分布を用いた場合どの程度の不具合が生じるのか。あるいは、正規分布を前提とするモデルとロジスティック分布を用いたモデルとを実証的に区別することがどの程度可能であるのか。上のような問題のシュミレーションによる検討を試みるのが本稿の目的である。シュミレーションにおいて用いる乱数はその生成のアルゴリズムが明確でないと再現性に問題が残るので、まず乱数生成のアルゴリズムとそれを実現するプログラムのソースリストが明記される。この明記された乱数生成法により度数分布の比較が行われる。本稿では正規分布の近似としてロジスティック分布を用いた場合の問題を想定しているので、正規乱数を生成させた上でその乱数の度数分布がロジスティック分布と正規分布によりどの程度区別されるかを調べる。これは度数が直接現象として与えられる場合である。次に、分布が潜在過程として与えられるものとして一対比較の場合の検討が行われる。

1. 乱数の生成

一様乱数の生成は合同法とその良質化 (cf. 宮武・脇本, 1978, Pp. 8-11) の組み合わせによる。合同法においては32ビット長の整数を用いた。良質化は、合同法によって生成された4つの一様乱数 u_1, u_2, u_3, u_4 をもとに次のように行われる。各 u_i を10進法で表したものを

$$u_i = 0.u_{i1} \cdots u_{ip} \quad (10\text{進法})$$

とする。 u_{ij} から v_{ij} を次の規則により定める。

$$v_{ij} = \begin{cases} 1 & v_{ij} \text{が奇数のとき} \\ 0 & v_{ij} \text{が偶数のとき} \end{cases}$$

さらに、 v_{i1} の値は確率 $\frac{1}{2}$ で $v_{i1} = 1 - v_{i1}$ により入れ換える。これらの v_{i1} を用いた2進法表記の値として良質化された一様乱数 u を定める。すなわち

$$u = 0.v_{11}v_{12}\cdots v_{1p}v_{21}v_{22}\cdots v_{4p} \quad (2 \text{ 進法})$$

正規乱数は、上の良質化された一様乱数に Box-Muellar 変換を適用して生成した。乱数生成のためのオブジェクトをリスト1に示す。

リスト1 乱数生成のためのオブジェクト。

```

001
002 TYPE GEN_UNI_RN = OBJECT
003     I_U : LONGINT;
004     ADD_2_TO_31_P_1, DIV_2_TO_32_P_1 : REAL;
005
006     PROCEDURE INIT( I : LONGINT );
007     FUNCTION UNI : REAL;
008     END;
009
010
011
012 PROCEDURE GEN_UNI_RN.INIT( I : LONGINT );
013 BEGIN
014     IF I = 0 THEN I_U:=LONGINT(*55555555) ELSE I_U:=I;
015
016     ADD_2_TO_31_P_1:=EXP(31.0*LN(2.0))+1.0;
017     DIV_2_TO_32_P_1:=1.0/(EXP(32.0*LN(2.0))+1.0);
018 END;
019
020
021
022 FUNCTION GEN_UNI_RN.UNI : REAL;
023 CONST K = LONGINT(*10005);
024 MU = 123456789;
025 BEGIN
026     I_U := (K * I_U) + MU;
027     UNI := (I_U+ADD_2_TO_31_P_1)*DIV_2_TO_32_P_1;
028 END;
029
030
031
032
033 TYPE GEN_UNI_RN_MODIFIED = OBJECT( GEN_UNI_RN )
034     PROCEDURE INIT( I : LONGINT );
035     FUNCTION UNI_MDFY : REAL;
036     END;
037
038
039
040 PROCEDURE GEN_UNI_RN_MODIFIED.INIT( I : LONGINT );
041 BEGIN
042     GEN_UNI_RN.INIT( I );
043 END;
044
045
046
047 FUNCTION GEN_UNI_RN_MODIFIED.UNI_MDFY : REAL;
048 TYPE TP_ARY_UNI_RN = ARRAY(1..7) OF INTEGER;
049 VAR H, L : INTEGER;
050     U, V : REAL;
051     ARY_UNI : ARRAY(1..4) OF TP_ARY_UNI_RN;
052
053

```

```

054 PROCEDURE SEEK_BIT( U : REAL;
055 VAR BU : TP_ARY_UNI_RN );
056 VAR I, IU : INTEGER;
057 BEGIN
058   FOR I:=1 TO 7 DO
059     BEGIN
060       U:=U*10.0; IU:=TRUNC(U);
061       IF ODD(IU) THEN BU(I):=1 ELSE BU(I):=0;
062       U:=U-IU;
063     END;
064   IF GEN_UNI_RN.UNI > 0.5 THEN BU(I):=1-BU(I);
065 END; ( SEEK_BIT )
066
067
068
069 BEGIN ( UNI_MDFY )
070   FOR H:=1 TO 4 DO
071     BEGIN
072       U:=GEN_UNI_RN.UNI; SEEK_BIT( U, ARY_UNI(H) );
073     END;
074   V:=0.0;
075   FOR H:=4 DOWNTO 1 DO
076     FOR L:=7 DOWNTO 1 DO
077       V:=0.5*(V+ARY_UNI(H)(L));
078     UNI_MDFY:=V;
079   END; ( UNI_MDFY )
080
081
082
083
084
085
086
087
088 (*
089
090   NORMALLY DISTRIBUTED RANDOM NUMBER GENERATOR
091
092   BY
093
094   BOX-MUELLER TRANSFORMATION
095
096
097   Z(I) = SQRT(-2*LN(U(I)))*COS(2*PI*U(I+1));
098
099
100 *)
101
102 TYPE GEN_NORM_RN = OBJECT( GEN_UNI_RN_MODIFIED )
103   PROCEDURE INIT( I : LONGINT );
104   FUNCTION NORMAL_RN : REAL;
105 END;
106
107
108 PROCEDURE GEN_NORM_RN.INIT( I : LONGINT );
109 BEGIN
110   GEN_UNI_RN_MODIFIED.INIT( I );
111 END;
112
113
114 FUNCTION GEN_NORM_RN.NORMAL_RN : REAL;
115 VAR U_I, U_I_1, TV : REAL;
116
117 FUNCTION F_V : REAL; VAR T : REAL;
118 BEGIN
119   REPEAT T:=GEN_UNI_RN_MODIFIED.UNI_MDFY; UNTIL T > 0.0; F_V:=T;
120 END;
121
122 BEGIN
123   U_I:=F_V; U_I_1:=F_V;
124   NORMAL_RN:=SQRT(-2.0*LN(U_I))*COS(2.0*PI*U_I_1);
125 END;

```

リスト1のオブジェクトにより生成される1,000,000個の正規乱数を83個のカテゴリーに分けて頻度を数えたものが表-1である。カテゴリーは、-4.05以下のものと4.05以上のもの、及び-4.05から4.05までを0.1の幅で区切ったものである。表-1の頻度を相対度数に変換して棒グラフにより図示したものが図-1である。ただし、-4.05以下のカテゴリーと4.05以上のカテゴリーのものは省かれている。図-1に示されている曲線は平均0、分散1の標

カテゴリー	頻度	カテゴリー	頻度	カテゴリー	頻度	カテゴリー	頻度
-2.15~-2.05	4430	-0.15~-0.05	39562	-0.05~0.05	39712	2.05~2.15	4440
-2.25~-2.15	3517	-0.25~-0.15	39408	0.05~0.15	39602	2.15~2.25	3525
-2.35~-2.25	2887	-0.35~-0.25	38039	0.15~0.25	39209	2.25~2.35	2821
-2.45~-2.35	2327	-0.45~-0.35	36919	0.25~0.35	38341	2.35~2.45	2228
-2.55~-2.45	1807	-0.55~-0.45	35262	0.35~0.45	36819	2.45~2.55	1746
-2.65~-2.55	1360	-0.65~-0.55	33166	0.45~0.55	34953	2.55~2.65	1414
-2.75~-2.65	1060	-0.75~-0.65	31223	0.55~0.65	33258	2.65~2.75	1048
-2.85~-2.75	794	-0.85~-0.75	28929	0.65~0.75	31467	2.75~2.85	825
-2.95~-2.85	595	-0.95~-0.85	26717	0.75~0.85	28898	2.85~2.95	638
-3.05~-2.95	430	-1.05~-0.95	24102	0.85~0.95	26507	2.95~3.05	446
-3.15~-3.05	321	-1.15~-1.05	22015	0.95~1.05	24300	3.05~3.15	350
-3.25~-3.15	253	-1.25~-1.15	19400	1.05~1.15	21854	3.15~3.25	249
-3.35~-3.25	154	-1.35~-1.25	16947	1.15~1.25	19220	3.25~3.35	178
-3.45~-3.45	81	-1.55~-1.45	12885	1.35~1.45	14928	3.45~3.55	80
-3.65~-3.55	63	-1.65~-1.55	11087	1.45~1.55	12915	3.55~3.65	44
-3.75~-3.65	40	-1.75~-1.65	9525	1.55~1.65	11017	3.65~3.75	41
-3.85~-3.75	39	-1.85~-1.75	7942	1.65~1.75	9455	3.75~3.85	28
-3.95~-3.85	14	-1.95~-1.85	6561	1.75~1.85	8021	3.85~3.95	20
-4.05~-3.95	10	-2.05~-1.95	5367	1.85~1.95	6420	3.95~4.05	10
-∞~-4.05	26			1.95~2.05	5223	4.05~∞	21

表-1 リスト1のオブジェクトにより生成された1,000,000個の乱数の度数分布。カテゴリー欄でa以上b以下であることを表す

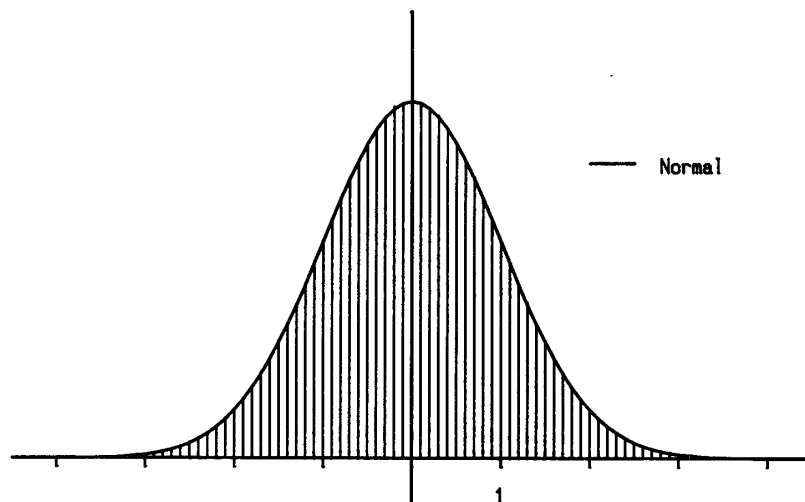


図-1 表-1の頻度の相対値を表す棒グラフ。曲線は標準正規分布の密度関数である。

標準正規分布の密度関数 $n(x; 0, 1)$ である。以後、標準正規分布とその密度関数はそれぞれ簡単に $N(x)$ 及び $n(x)$ で表す。棒グラフと $n(x)$ の曲線がよく一致していることが分かるが、統計的検定でもこの頻度分布が正規分布とみなせることが示される($\chi^2=73.63, df=82, p>25\%$)。

表-1の分布とロジスティック分布とを比較するため、まず $N(x)$ あるいは $n(x)$ に最もよく近似するロジスティック分布のparameter値を求める。2つの密度関数の差の2乗を積分した値Dを考える。すなわち

$$D = \int_{-\infty}^{\infty} \{n(t) - g(t; \mu, s)\}^2 dt$$

このDを最小にする μ と s の値を求めると $\mu=0, s=0.615$ を得る。この μ と s に対するロジスティック分布をここでは $g_0(x)$ 及び $G_0(x)$ で表すことにする。すなわち

$$g_0(x) = g(x; 0, 0.615) \quad G_0(x) = G(x; 0, 0.615)$$

$g_0(x)$ と $G_0(x)$ を $n(x)$ 及び $N(x)$ とともに図示したものが図-2及び図-3であるが、正規分布とロジスティック分布は確かによく似ているといえる。しかし、表-1の分布を $g_0(x)$ に対して検定してみると有意に異なることが示される($\chi^2=18842, df=82, p<0.1\%$)。

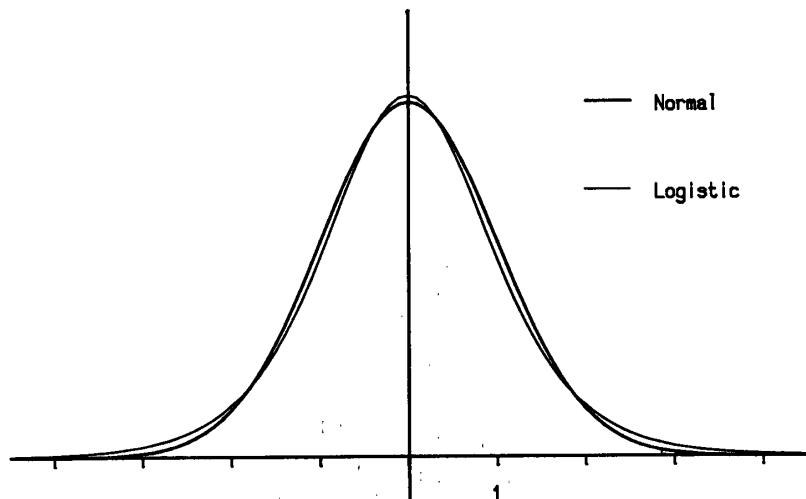


図-2 標準正規分布およびロジスティック分布の密度関数。図中の Normal 及び Logistic とあるのはそれぞれ $n(x)$ 及び $g_0(x)$ のグラフであることを表す。

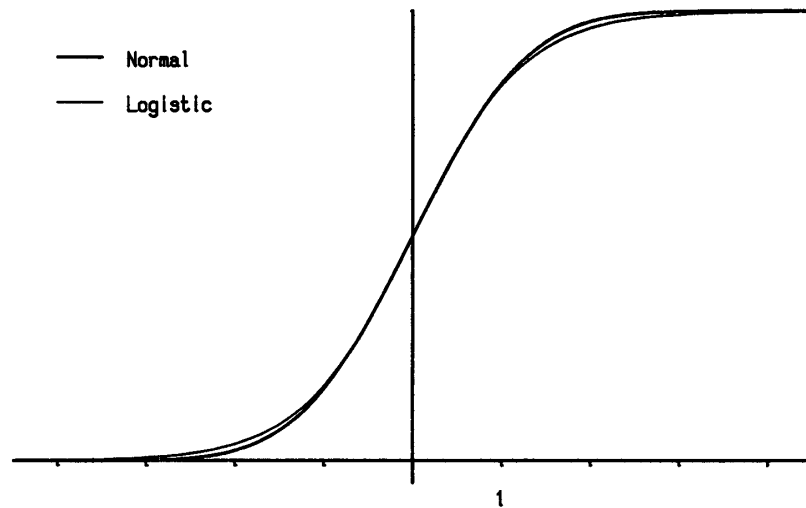


図-3 標準正規分布およびロジスティック分布の累積分布関数。図中の Normal 及び Logistic とあるのはそれぞれ $N(x)$ 及び $G_0(x)$ のグラフであることを表す。

さらに、表-1の分布に対して AIC (cf. Sakamoto, Ishiguro & Kitagawa, 1986) による検定を行った結果が表-2である。 AIC とは、データに対して設定された確率モデルから算出される尤度とその確率モデルに含まれる parameter の数により次のように定義されるものである。

$$AIC = -2 \times (\text{最大対数尤度}) + 2 \times (\text{自由パラメータの数})$$

分布の種類	AIC
多項分布	9 4 3
$n(x)$	8 5 3
$n(x; \mu, \sigma)$	8 5 7 ($\mu \doteq 0, \sigma \doteq 1.0$)
$g_0(x)$	2 7 2 1 6
$g(x; \mu, \sigma)$	1 9 6 8 7 ($\mu \doteq 0, s \doteq 0.572$)

表-2 表1の分布に対する AIC の値

AIC の値が小さいほどデータに対するモデルの適合度がよいとされる。表-2において多項分布より標準正規分布の AIC の方が小さいので、 AIC の基準によっても表-1の分布が標準正規分布とみなせることが分かる。 μ と σ を自由 parameter とする正規分布 $n(x; \mu, \sigma)$ に対する AIC の値は、これらの parameter を $\mu = 0, \sigma = 1.0$ に固定した $n(x)$ に対するものより大きい。

これは表-1の分布の平均が0、分散が1であるとみなせることを示している。ロジスティック分布に対しては $g_0(x)$ 、 $g(x; \mu, s)$ ともAICの値は多項分布に比べて極めて大きい。AICの基準によっても表-1の分布がロジスティック分布でないことが示されている。 $g(x; \mu, s)$ のAICの値の下の丸括弧内の μ と s の値は、その値を与えるものである。これらの値は最大尤度を与えるものであるが、これらの値($\mu=0, s=0.572$)に対する確率密度関数 $g(x; 0, 0.572)$ が図-4に示されている。図-4には表-1の値を相対頻度に直したものと $g_0(x)$ のグラフも示されている。

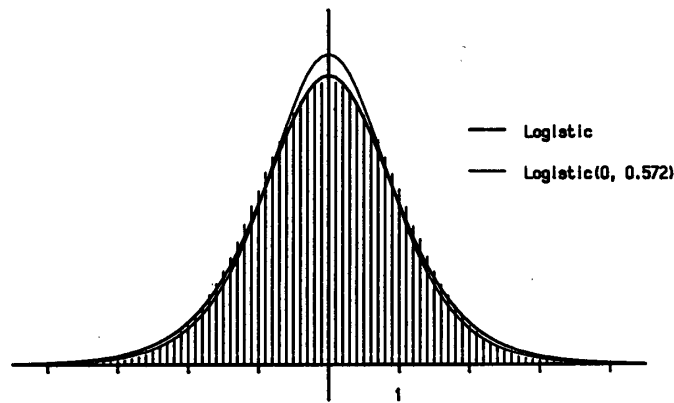


図-4 $g_0(x)$ 、 $g(x; 0, 0.572)$ は表-1のデータに対するロジスティック分布 $g(x; \mu, s)$ の最尤解である。図中 Logistic 及び Logistic (0, 0.572)とあるのは、それぞれ $g_0(x)$ 及び $g(x; 0, 0.572)$ のグラフであることを表す。

次に乱数の系列の独立性について調べる。乱数の系列 x_0, x_1, \dots に対して次の回帰モデルを設定する。(Sakamoto et al., 1986, Section 8.3)。

$$x_t = \sum_{i=1}^m a_i x_{t-i} + \varepsilon_t \quad \varepsilon_t \sim n(x; 0, \sigma)$$

$m=0$ のときは

$$x_t = \varepsilon_t$$

であり、系列が独立な場合である。但し、この $m=0$ のときには各 x_i が標準正規乱数であるという仮説も含ませて

$$\varepsilon_t \sim n(x; 0, 1)$$

とする。 $m>0$ のときに σ をparameterとして含めているのは、回帰モデルの誤差項としての ε_t の分散は x_t の分散1より小さいと考えられるからである。

リスト1により生成される1,000,051個の乱数よりなる系列に対して $m=0$ から50までの範囲で上の回帰モデルのAICの値を調べたものが表-1のにまとめられている。1,000,051個の内、最初の51個は回帰モデルの初期値として用い、 t の値は $t=52$ から1,000,051の範囲とし

た。 $m=0$ に対するAICの値が最小であるので、系列は独立であるといえる。

m	AIC	m	AIC	m	AIC
0	2838002.4	17	2838025.5	34	2838044.9
1	2838006.3	18	2838027.5	35	2838046.9
2	2838008.1	19	2838029.3	36	2838048.0
3	2838009.9	20	2838031.2	37	2838050.0
4	2838011.1	21	2838033.0	38	2838052.0
5	2838011.2	22	2838033.4	39	2838051.4
6	2838013.2	23	2838032.8	40	2838050.2
7	2838014.9	24	2838033.3	41	2838051.5
8	2838016.7	25	2838035.3	42	2838052.8
9	2838017.0	26	2838036.5	43	2838054.5
10	2838019.0	27	2838038.4	44	2838053.5
11	2838020.6	28	2838037.5	45	2838055.4
12	2838021.4	29	2838039.2	46	2838057.1
13	2838023.3	30	2838040.3	47	2838059.0
14	2838025.3	31	2838041.8	48	2838061.0
15	2838026.2	32	2838042.4	49	2838062.9
16	2838023.6	33	2838042.9	50	2838064.9

表-3 0次から50次までの回帰モデルに対するAICの値

2. 分布の比較

心理学におけるデータの場合、値の分布の型を調べるときに使われるデータの個数は数十から数百であることが多い。この範囲の数のデータに対して、データを生成した真の分布が標準正規分布であるときにロジスティック分布と正規分布がどの程度区別されうるのかという問題をリスト1のオブジェクトによる正規乱数を用いたシュミレーションにより調べる。 N 個の正規乱数をリスト1のオブジェクトにより生成して、その N 個のデータに対して正規確率モデル $n(x; \mu, \sigma)$ とロジスティックモデル $g(x; \mu, s)$ のAICを算出する(cf. Sakamoto *et al.*, 1986, chapter 7)。この N 個の乱数の生成とAICの計算を1試行として、これを1000試行繰り返す。勿論、この各試行内での乱数の系列は他の試行のものとは別のものである。1000回の試行中、正規確率モデルあるいはロジスティックモデルのAICの方が小さかった試行を数えたものを表-4に示す。一試行内のデータの数、すなわち乱数の数 N は、10、100、1000の3通りである。表-4の右端の欄は、各試行における正規確率モデルのAICの方が小さいという確率を、各試行がBernoulli試行(cf. Feller, 1968, chapter 6)であるとして95%水準で区間推定したものである。これによると、データが1000個以上であれば正規分布とロジスティック分布の実証的な区別が期待されるが、データ数が100ぐらいでは難しい(5回に1回ぐらいは間違っ
てロジスティックモデルが支持される)ことが分かる。

1 試行における データの数 N	正規確率モデル	ロジスティックモデル	95%水準 $P \left(\begin{array}{l} \text{正規確率} \\ \text{モデルのAIC} < \text{ロジスティック} \\ \text{モデルのAIC} \end{array} \right)$
$N=10$	816	184	$0.79 < p < 0.84$
$N=100$	818	182	$0.79 < p < 0.84$
$N=1000$	994	6	$0.988 < p < 0.998$

表-4 1000試行中での正規確率モデルとロジスティックモデルのAICの比較。例えば、 $N=10$ の欄における816(正規)と184(ロジスティック)の値は1000試行中において正規確率モデルのAICの値の方が小さかった試行数が816、ロジスティックモデルの方が小さかったのが184試行であったことを意味する。一番右の欄の p の値は、正規確率モデルの方が小さいAICの値をとる確率の95%水準区間推定値である。

3. 一対比較法における比較

一対比較法では、2つの物の間の重さの比較のように、同一感覚次元上での2つの刺激の比較のデータを基に分析が行われる(Thurston, 1927)。2つの刺激 i, j の感覚次元上での強度をそれぞれ s_i, s_j とする。刺激 i の方が刺激 j より強い感覚強度をもつ(重さの場合でいえば、より重い)確率は s_i が s_j より大きい確率として次のように表せる。

$$P(s_i > s_j) = P(s_i - s_j > 0)$$

s_i と s_j がそれぞれ平均 μ_i, μ_j 、分散 $\sigma_i^2 = \sigma_j^2 = \sigma^2$ の互いに独立な正規分布に従うとすれば、 $s_i - s_j$ は平均 $\mu_i - \mu_j$ 、分散 $2\sigma^2$ の正規分布に従うので

$$P(s_i - s_j > 0) = 1 - N(0; \mu_i - \mu_j, \sqrt{2}\sigma) \quad (1)$$

n 個の刺激 s_1, \dots, s_n に対して一対比較法が適用される場合を考える。各対 s_i と s_j に対しては、 N 回の比較判断がなされるとし、そのうち $s_i > s_j$ と判断された回数が f_{ij} であったとする。 f_{ij} は $s_i > s_j$ と判断された回数を表す。

$p_{ij} = P(s_i > s_j)$ とおけば、尤度 L は次式で表される。

$$L = \prod_{i < j} \frac{(f_{ij} + f_{ji})!}{f_{ij}! f_{ji}!} \cdot p_{ij}^{f_{ij}} \cdot (1 - p_{ij})^{f_{ji}} \quad (2)$$

L の最尤解を求めるときに、感覚次元のunitが $\sqrt{2}\sigma = 1$ であるように設定されていると考えても一般性は失われない。このとき

$$p_{ij} = N(\mu_i - \mu_j)$$

となる。さらに、(1)においてはparameter μ_i は $\mu_i - \mu_j$ と差の形でのみ現れるので、原点の位置を自由に設定することができる。例えば、 $\mu_1 = 0$ とすることにより、(2)式のモデルの自由parameterの数は $n-1$ であることがわかる。

ロジスティックモデルでは(1)の式の $N(0; \mu_i - \mu_j, s)$ の代わりに $G(0; \mu_i - \mu_j, s)$ が用いられる。この場合もunitを適当にとり、例えば $s = 1$ とすれば

$$\begin{aligned} P(s_i - s_j > 0) &= 1 - G(0; \mu_i - \mu_j, 1) \\ &= \frac{e^{\mu_i - \mu_j}}{1 + e^{\mu_i - \mu_j}} \end{aligned} \quad (3)$$

さらに、原点の移動により $\mu_1 = 0$ とすれば、ロジスティックモデルの場合も自由parameterの数は $n-1$ である。

シュミレーションでは、刺激の数 n は 7 個とし、刺激の値は刺激間の平均距離が 0.3 の系列 S と、0.7 の系列 L の 2 系列を用意した。系列 S の刺激 i の平均値 μ_{Si} は

$$\mu_{Si} = 0.3 * (i - 1) \quad i = 1, \dots, 7$$

であり、系列 L の刺激 i の平均値 μ_{Li} は

$$\mu_{Li} = 0.7 * (i - 1) \quad i = 1, \dots, 7$$

である。各系列とも刺激数が 7 であるので、可能な対の数はそれぞれ ${}^7C_2 = 21$ である。21 対のそれぞれの対について N 回の比較が行われるが、比較における刺激値は次の正規分布に従い互いに独立であるとする。

$$s_{Si} \sim n(x; \mu_{Si}, 1) \quad s_{Li} \sim n(x; \mu_{Li}, 1)$$

各対について N 回の比較を行うのを 1 回の実験として、100 回の実験を行った。 N は 10 又は 100 である。100 回の実験のうち、各系列および各 N の値について正規確率モデルあるいはロジスティック分布モデルの AIC の方が小さかった回数を数えたものが表 5.1 (系列 S) 及び表 5.2 (系列 L) である。表の右欄は、各実験を Bernoulli 試行とみなしたときの正規確率モデルの AIC の方が小さくなる確率を 95% 水準で求めたものである。表の右欄の各 N についての仮説に対する AIC の値が表 6 に示されている。系列 L の $N = 100$ の場合の確率 p_4 が他のものより大きいことがわかる。これは、刺激間の距離を大きくして比較回数を増せば正規確率モデルが正しく支持される確率も大きくなるということである。ロジスティック分布の裾が正規分布に比べて長いということによると思われるが、対あたりの比較回数が 100 回以上というのは、通常の心理学の実験では考え難いことである。

4. まとめ

リスト 1 のオブジェクトは、独立な正規乱数の生成するものであることが確かめられた。このオブジェクトを用いて、正規確率モデルとロジスティックモデルの比較が行われた。乱

数の値が直接観測される場合には、観測値が1000以上あればロジスティック分布に対して正規分布がほぼ確実に正しく支持されるが、潜在過程として確率モデルが設定されている場合には実証的な区別は難しいようである。本稿で扱われた一対比較法の場合では、データにより正規確率モデルとロジスティックモデルを区別することは不可能であるといえる。但し、分布の裾の方の影響が強く現れるような現象に対しては注意が必要である。

隣接刺激間の距離が0.3の場合(系列S)			
	正規確率モデル	ロジスティック モデル	95%水準 $P\left(\begin{array}{l} \text{正規確率モデル} \\ \text{のAIC} \end{array} < \begin{array}{l} \text{ロジスティック} \\ \text{モデルのAIC} \end{array}\right)$
比較回数/対=10	60	40	$0.51 < p_1 < 0.70$
比較回数/対=100	65	35	$0.56 < p_2 < 0.74$

表-5・1 一対比較法における正規モデルとロジスティックモデルの比較。
各刺激の平均値は $\mu_i = 0.3 * (i - 1)$; $i = 1, \dots, 7$ である。

隣接刺激間の距離が0.7の場合(系列L)			
	正規確率モデル	ロジスティック モデル	95%水準 $P\left(\begin{array}{l} \text{正規確率モデル} \\ \text{のAIC} \end{array} < \begin{array}{l} \text{ロジスティック} \\ \text{モデルのAIC} \end{array}\right)$
比較回数/対=10	67	33	$0.58 < p_3 < 0.76$
比較回数/対=100	79	21	$0.71 < p_4 < 0.87$

表-5・2 一対比較法における正規モデルとスティックモデルの比較。
各刺激の平均値は $\mu_i = 0.7 * (i - 1)$; $i = 1, \dots, 7$ である。

仮 設	AIC
$p_i \neq p_j$	27.6
$p_i = p_j$	30.9
$p_1 = p_2, p_3 = p_4$	27.8
$p_1 = p_3, p_2 = p_4$	29.5
$p_1 = p_2 = p_3 \neq p_4$	24.7
$p_1 \neq p_2 = p_3 = p_4$	29.3

表-6 表-5の p_i の大小関係についてのAICによる検定。

引用文献

- T.W. Anderson An introduction to multivariate statistical analysis. 2nd ed. John Wiley & Sons, INC., 1984.
- W.Feller An introduction to probability theory and its applications. Vol.1, 3rd ed., John Wiley & Sons, Inc., 1968
- D.M.Green & J.A.Swets Signal detection theory and psychophysics. John Wiley & Sons, Inc., 1966.
- R.K.Hambleton & H.Swaminathan Item response theory: Principles and applications. Kluwer. Nijhoff Publishing, 1985.
- 宮武修・脇本和昌 乱数とモンテカル法。 森北出版株式会社、1978。
- Y.Sakamoto, M.Ishiguro & G.Kitagawa Akaike information criterion statistics. D.Reidel Publishing Company,1986.
- L.L.Thurstone A law of comparative judgment. *Psychological Review*, 1927, 34, 273-286.