地域名の多次元尺度構成法による表示[(1)]

岡　本　安　晴

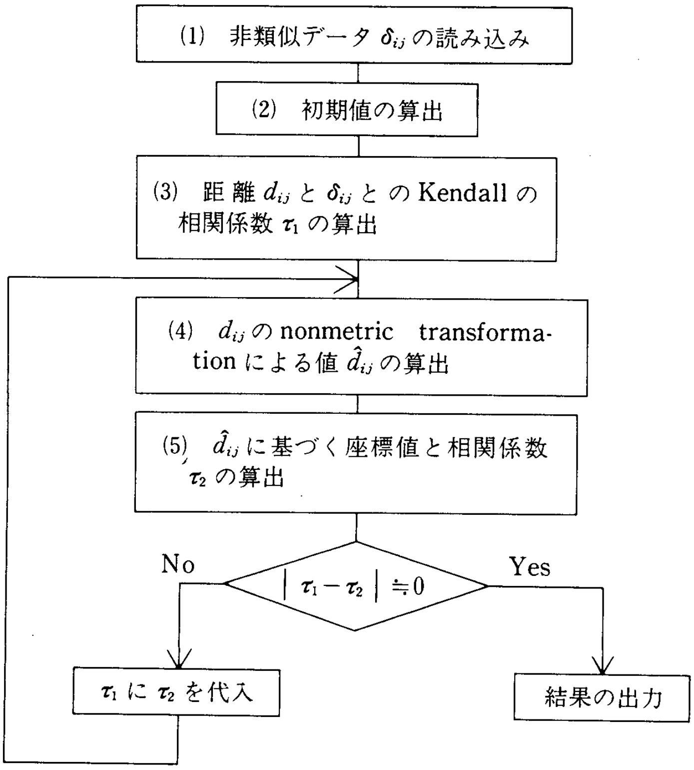
Milgram ら (1977) は、ニューヨーク市の心理学的地図の研究を報告しているが、彼らの方法は、幾つかの地点の写真の identification の正確度を調べるというものである。これに対し、各地点間の主観的位置関係を調べる方法も可能であり、筆者は、金沢市の心理学的地図を多次元尺度により表示することを試みた。

多　次　元　尺　度

空間内の各点の座標値 $(x_{i1}, \cdots, x_{ip})_{i=1,\cdots,N}$ が与えられれば、それらの間の距離

$$d_{ij}=((x_{i1}-x_{j1})^2+\cdots+(x_{ip}-x_{jp})^2)^{1/2}$$

が計算できるが、逆に、対象間の距離 d_{ij} が与えられときに、それらの座標値を求めようとするのが、多次元尺度の考え方である。諸対象間の距離あるいは (非) 類似度のデータは、数学的な意味での距離が直接与えられることは稀であり、距離と単調関数的関係にある (非) 類似度 δ_{ij} をもとに尺度構成が行われることになる。所与のデータとしての δ_{ij} と、求めた尺度値 (座標値) から算出される距離 d_{ij} との間に成り立つ関係として単調関数的なものだけを設定するものを nonmetric 多次元尺度構成法といっている。本報告で用いた尺度構成法はこのタイプのものであり、アルゴリズムは次の如くである (図—1)。



図—1　本報告において用いられた nonmetric 多次元尺度構成法のアルゴリズム

(1) 非類似度のデータを読み込む。所与のものが類似度のも

(1) 本研究における分析のためのプログラムは全て FACOM OS IV PASCAL で書かれており、実行に際しては、金沢大学計算機センターを利用した。

のである場合は、単調減少関数による変換を行う。

(2) 非類似度間に3角不等式

$$\delta_{ij} \leqq \delta_{ik} + \delta_{kj}$$

が成り立つような

$$\delta_{ij} := \delta_{ij} + C$$

なる変換のための定数Cを求める。さらに double centering (cf. 付録1)

$$b_{ij} = -\frac{1}{2}(\delta_{ij}^2 - \delta_{.j}^2 - \delta_{.j}^2 - \delta_{i.}^2 + \delta_{..}^2)$$

を行い、行列(b_{ij})をスペクトル分解して座標値$(x_{i1}, \cdots, x_{ip})$を求める(cf. 付録2)。

(3) 求めた座標値から距離d_{ij}を計算し、δ_{ij}とd_{ij}との間の Kendall の相関係数を求めτ_1とする。

(4) d_{ij}の変換値$\hat{d}_{ij}$がδ_{ij}と単調増加関数的関係にあるように求める (nonmetric transdormation. cf. Schiffman etal, (1981), p. 353)

(5) (2)において、δ_{ij}を$\hat{d}_{ij}$で置き換えた手続きを行い、求めた座標値から距離d_{ij}を算出し直し、δ_{ij}との Kendall の相関係数を求めτ_2とする。

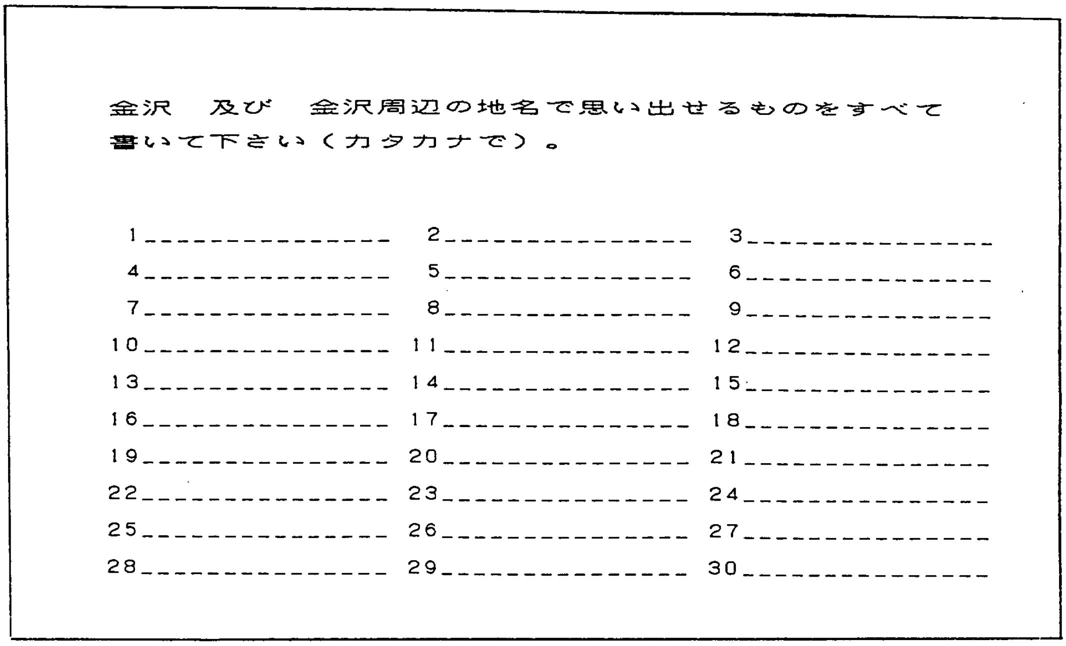
(6) $|\tau_1 - \tau_2|$が十分0に近ければ、次の(7)に移るが、そうでなければ、τ_1の値を(5)で求めたτ_2の値で置き換え、(4)に戻る。

(7) 座標値、距離の最終的な値などを出力する。

遠近感の評定

評定の対象とする地名を評定者が全く知らないのでは困るので、金沢大学文学部心理学コースの学生がどのような地名を知っているのかということを調べた。図―2の用紙に思い出せる地名を全部書いてもらった。16人の者に対して集団で一斉に行い、時間制限は設けなかったが、全員が10分以内に書き尽した。16人のデータをこみにすると、全部で151の地名が挙げられていたが、最もよく思い出されているものとして、広坂、小立野、寺町、竪町、野町、香林坊、片町、石引の8つの地名を選んだ。いずれも半数を越える者が名前を挙げていた。

遠近感の評定は、図―3の質問紙を用い、18人の本学部心理学コースの学生18人に対して集団で一斉に行った。第1頁目は、評定者が地名を知っていることを確認するためのものであるとともに、遠近感の評定の前に、用いられる地名を評定者に予め提示しておくためのものでもある。地名の順序は、順序効果を考慮して、図―3bのものと、その逆のもの(石引→広坂)の2種類を用意した。第3～4頁目(図―3d、e)が、遠近感の評定のため

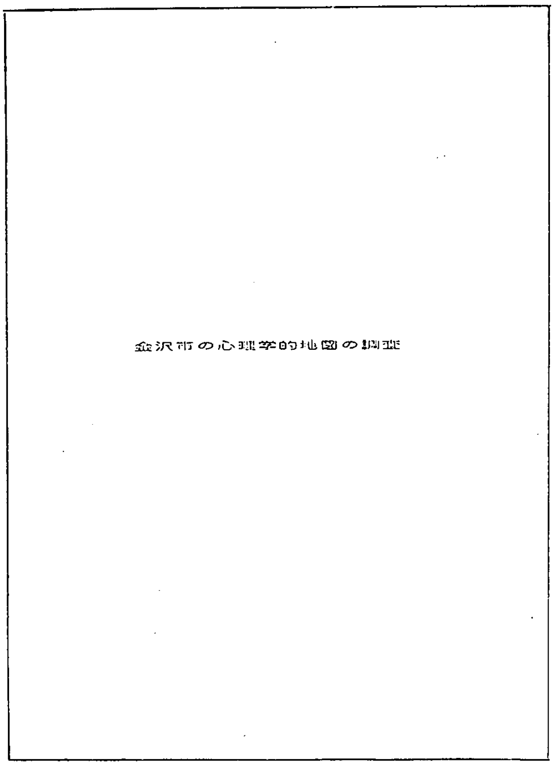


金沢　及び　金沢周辺の地名で思い出せるものをすべて
書いて下さい（カタカナで）。

1_______________	2_______________	3_______________
4_______________	5_______________	6_______________
7_______________	8_______________	9_______________
10_______________	11_______________	12_______________
13_______________	14_______________	15_______________
16_______________	17_______________	18_______________
19_______________	20_______________	21_______________
22_______________	23_______________	24_______________
25_______________	26_______________	27_______________
28_______________	29_______________	30_______________

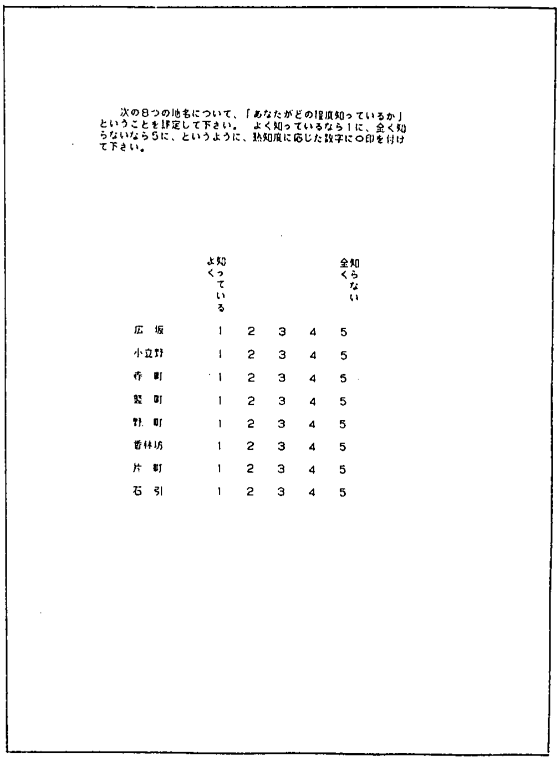
図－2　大学生が知っている地名の調査のための用紙

のものである。地名の各対の順序を決めるに際しては、(1)空間及び時間誤差が生じないようにし、(2)繰り返しの規則性を除き、(3)同じ地名同志の出現間隔ができるだけ大きくなるようにするため、Ross (1934) の方法を参考にした。この方法で作成したものを基に、対の左右を入れ替えたもの、及び、対の出現順序を逆にしたものを組み合わせ、計 4 種類を



金沢市の心理学的地図の調査

図－3 a　表　紙



次の8つの地名について、「あなたがどの程度知っているか」ということを評定して下さい。　よく知っているなら1に、全く知らないなら5に、というように、熟知度に応じた数字に○印を付けて下さい。

	よく知っている				全く知らない
広　坂	1	2	3	4	5
小立野	1	2	3	4	5
寺　町	1	2	3	4	5
[illegible]　町	1	2	3	4	5
野　町	1	2	3	4	5
香林坊	1	2	3	4	5
片　町	1	2	3	4	5
石　引	1	2	3	4	5

図－3 b　第 1 頁

図－3　遠近感の評定に用いた評定用冊子

次の頁以降の地名の対、A－B、について、AとBとが、お互いに非常に近いと思われるなら1に、大変遠く離れていると思うときには5に、というように○印を付けて下さい。 物理的な距離ではなく、主観的な近さ／遠さに基づいて判断して下さい。 地名は、今、評定してもらったものから選んであります。

	非常に近い				大変遠い
A － B	1	2	3	4	5

図―３ｃ　第２頁

	非常に近い				大変遠い
石引 － 片町	1	2	3	4	5
広坂 － 野町	1	2	3	4	5
小立野 － 竪町	1	2	3	4	5
寺町 － 石引	1	2	3	4	5
香林坊 － 片町	1	2	3	4	5
竪町 － 広坂	1	2	3	4	5
寺町 － 小立野	1	2	3	4	5
石引 － 香林坊	1	2	3	4	5
片町 － 野町	1	2	3	4	5
広坂 － 寺町	1	2	3	4	5
小立野 － 石引	1	2	3	4	5
野町 － 香林坊	1	2	3	4	5
竪町 － 片町	1	2	3	4	5

図―３ｄ　第３頁

用意した。これと先の名前の熟知度の評定用のものを組み合わせ、総計８種類の評定用冊子を作成した。

	非常に近い				大変遠い
小立野 － 広坂	1	2	3	4	5
石引 － 野町	1	2	3	4	5
香林坊 － 竪町	1	2	3	4	5
片町 － 寺町	1	2	3	4	5
広坂 － 石引	1	2	3	4	5
竪町 － 野町	1	2	3	4	5
寺町 － 香林坊	1	2	3	4	5
小立野 － 片町	1	2	3	4	5
石引 － 竪町	1	2	3	4	5
野町 － 寺町	1	2	3	4	5
香林坊 － 小立野	1	2	3	4	5
片町 － 広坂	1	2	3	4	5
竪町 － 寺町	1	2	3	4	5
野町 － 小立野	1	2	3	4	5
香林坊 － 広坂	1	2	3	4	5

図―３ｅ　第４頁

分　　析

18人分のデータについて、まず熟知度の評定を検討してみると、１人「野町を全く知らない」と答えたものがいたので除いた。以下の分析は残り17人のデータに基づくものである。

遠近感の評定値の平均を表―１に表わした。これに、Johnson (1967) の hierarchical clustering schemes によるクラスター分析を適用してみると、図―４のようになる。物理的地図（所謂、地理学的地図）によく対応しているので、評定の veridicality は高かったと思われ、多次元尺度による心理学的地図は物理的地図に似ていることが予想される。２次元の尺度構成を行った結果の image diagram（座標値の最終値に基づく

表ー1　遠近感の評定値 17 人分の平均値

	広　坂	小立野	寺　町	竪　町	野　町	香林坊	片　町	石　引
広　坂		3.8235	3.6471	1.9412	4.0000	1.5294	1.8824	2.8235
小立野	3.8235		4.1765	4.4118	4.5294	4.2941	4.4118	1.5294
寺　町	3.6471	4.1765		3.2941	2.4118	3.5882	3.1765	4.1176
竪　町	1.9412	4.4118	3.2941		3.5882	1.4118	1.0000	4.0000
野　町	4.0000	4.5294	2.4118	3.5882		3.3529	3.0588	4.3529
香林坊	1.5294	4.2941	3.5882	1.4118	3.3529		1.0588	3.7059
片　町	1.8824	4.4118	3.1765	1.0000	3.0588	1.0588		3.8824
石　引	2.8235	1.5294	4.1176	4.0000	4.3529	3.7059	3.8824	

```
ISHIBIKI     ---+---+
KODATSUNO    ---|   |
KOHRINEBOU   --+-+-+|
KATAMACHI    -+| |  |
TATEMACHI    -|  |  |
HIROSAKA     ----|  |
NOMACHI      -----+|
TERAMACHI    -----|
```

図ー4 a　Maximum method による
クラスター分析

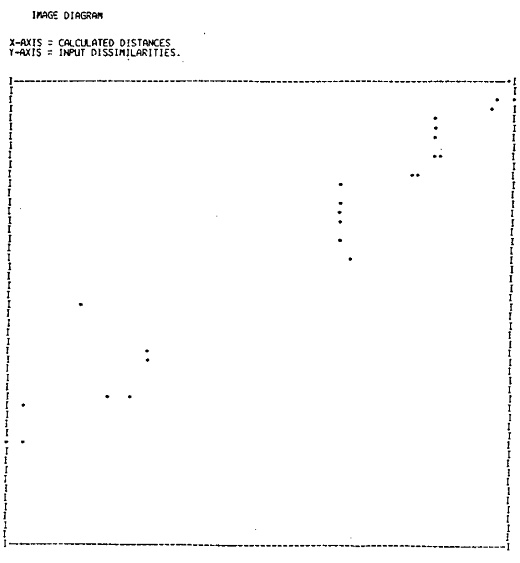
```
NOMACHI      -----+-+
TERAMACHI    -----| |
KOHRINEBOU   --+-+-+|
KATAMACHI    -+| |  |
TATEMACHI    -|  |  |
HIROSAKA     ----|  |
ISHIBIKI     ---+--|
KODATSUNO    ---|
```

図ー4 b　Minimum method による
クラスター分析

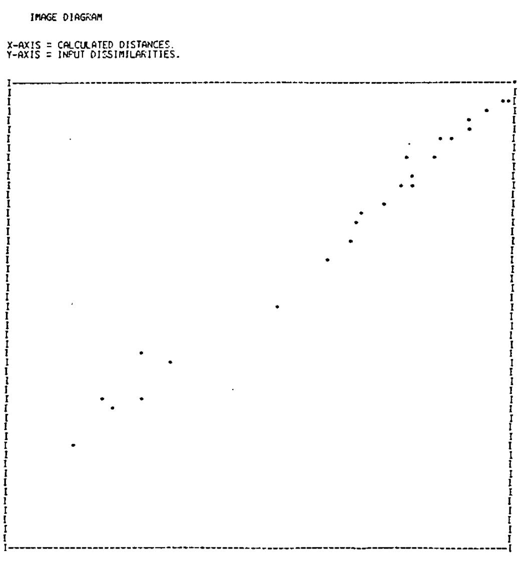
図ー4　Johnson (1967) の hierarchical clustering schemes による遠近感の評定値（表ー1）の分析

距離 d_{ij} と入力データ δ_{ij} との関係を図示したもの。cf. Davison (1983)）をみてみると（図ー5a）、単調性がかなり乱れていることが判る。このことは、評定者達の金沢市の心の中の地図 (psychological representation) が、物理的地図とは異なることを意味する。別の言い方をすれば、心理的地図の意義が本分析でも確認できたわけである。

3 次元尺度構成の image diagram は図ー5b で表わされる。d_{ij} と δ_{ij} との間の単調性は



図ー5 a　2 次元尺度による image diagram

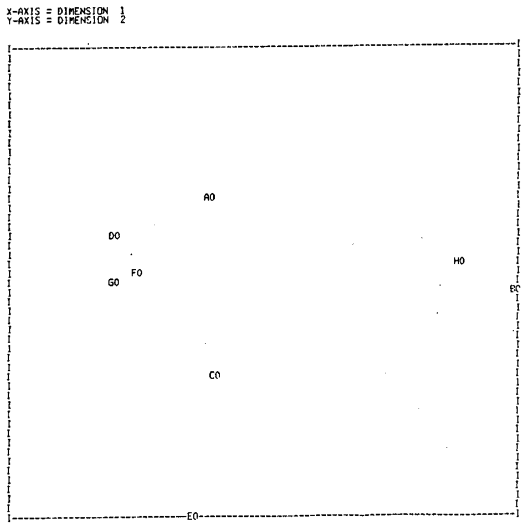


図ー5 b　3 次元尺度による image diagram

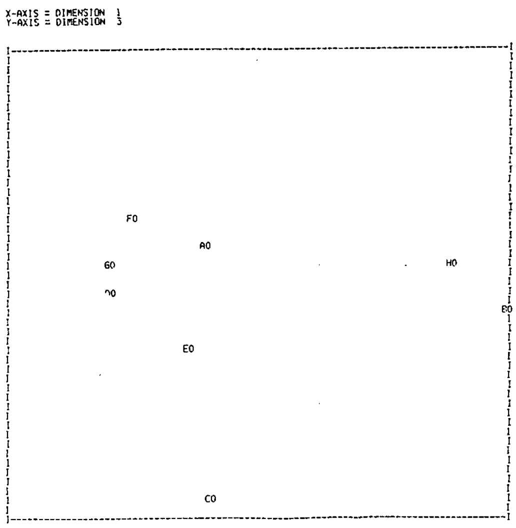
図ー5　2 次元及び 3 次元尺度に対する image diagram

完全ではないが、データに含まれているであろうノイズのことを考えれば、評定者の遠近感は 3 次元空間で表示できると結論して差し支えないと思われる。

座標値を図示したものが図—6a、b である。地名の指し示す物理的範囲の広がりということを考え合わせれば、図—6a は、よく物理的地図に対応しているといえ、このことは、さきのクラスター分析の結果と対応している。



図—6 a



図—6 b

図—6　3 次元尺度による金沢市の表現（A O：広坂、B O：小立野、C O：寺町、D O：竪町、E O：野町、F O：香林坊、G O：片町、H O：石引）

2 次元尺度構成が失敗した理由は、図—6a 及び図—6b を合わせて考えると推察できる。広坂 (AO)、竪町 (DO)、香林坊 (FO)、片町 (GO) のグループ、小立野 (CO)、石引 (HO) のグループ、及び寺町 (CO)、そして野町 (EO) の 4 つの集まりないしは地名がお互いに遠いもの同志として離れているが、このことは、互いに等距離にある 4 点は、ユークリッド空間内では 3 次元以上の空間でないと存在しえないこととよく対応している。このことは、地名間の遠近感というものが物理的地図内全体での布置に基づいて行われているのではなく、かなり categorical に判断されるものであることを示唆していると思われる。そのことが、評定が 5 段階のカテゴリー判断のために生じたことなのか、あるいは、遠近感は本来 neural quantum (cf. Stevens (1972)) に対応する物理量が大きい (categorical) ということなのか、勿論、ここではまだ結論は出せない。今後、次のような研究が必要とされるであろう。

(a)　遠近感のデータをカテゴリー判断以外の方法で集めてみること。例えば、一対比較法など。

(b)　地域名の指し示す広がりを、有名な建築物等を用いることにより限定してみること。

付　録　1

Double centering により得る行列 $(b_{ij})_{i,j=1,\cdots,N}$ と座標値の行列 $X=(x_{i,k})^{i=1,\cdots,N}_{k=1,\cdots,p}$ との間

には

$$(b_{ij})=(x_{ik})\cdot(x_{ik})'$$

なる関係が成り立つ（cf. Carroll と Wish (1974)）。上式を導くのに

$$\sum_{i=1}^{N} x_{ik}=0 \qquad (1\text{—}1)$$

なる仮定が使われるが、逆に (1—1) 式により決まる (b_{ij}) に対し

$$(b_{ij})=FF'$$

なる任意の $F=(f_{ik})_{k=1,\cdots,p}^{i=1,\cdots,N}$ を求めたとき、

$$\sum_{i=1}^{N} f_{ik}=0 \qquad (1\text{—}2)$$

なる性質を有しているのかどうかという問題が生じる。

$(F'F)^{-1}$ が存在するときには、式 (1—2) は常に成り立つことが、次のようにして判る。

$$XX'=FF'$$

とおく。

両辺に右から $F\cdot(F'F)^{-1}$ を掛けて、

$$XX'F\cdot(F'F)^{-1}=FF'\cdot F\cdot(F'F)^{-1}$$
$$=F$$

$$G=(g_{kh})_{k,\,h=1,\,\cdots,\,p}$$
$$=X'F(F'F)^{-1}$$

とおけば

$$F=XG$$

$$(f_{ik})=(x_{ik})(g_{kh})$$

すなわち

$$f_{ik}=\sum_{k=1}^{p} x_{ik}g_{kh}$$

ゆえに

$$\sum_{i=1}^{N} f_{ik}=\sum_{i=1}^{N}\left(\sum_{k=1}^{p} x_{ik}g_{kh}\right)$$

$$=\sum_{k=1}^{\mathrm{p}} g_{kh}\left(\sum_{i=1}^{N} x_{ik}\right)$$

$$=0 \qquad \text{（式(1—1)より）}$$

付　録　2

正値対称行列Aに対して

$$\| A-FF' \|^2 \tag{2—1}$$

を最小にする行列 F を求めることを考える。ここに、

$$\| (x_{ij}) \|^2=\sum_{i,j} x_{ij}^2$$

である。

$$\frac{\partial}{\partial f_{st}}\| A-FF' \|^2=\frac{\partial}{\partial f_{st}}(\sum_{i,j}(a_{i,j}-\sum_k f_{ik}f_{ik}))^2$$

$$=4\cdot\sum_j((a_{sj}-\sum_k f_{sk}f_{jk})\cdot(-f_{jt}))$$

$$=0$$

とおくことにより

$$\sum_j a_{sj}f_{jt}=\sum_{k,j} f_{sk}f_{jk}f_{jt}$$

すなわち

$$AF=FF'F \tag{2—2}$$

を得る。ここに、$A=(a_{ij})$、$F=(f_{ij})$ である。

いま、$F'F$ のスペクトル分解

$$F'F=P\Lambda P' \quad (\Lambda：対角行列)$$

を考える。

両辺に、左から P'、右から P を掛けて

$$P'F'FP=P'P\Lambda P'P$$

$$=\Lambda$$

すなわち

$$(FP)'(FP)=\Lambda \tag{2—3}$$

また

$$FF'=FPP'F'$$

$$=(FP)(FP)'$$

であるから、(2—1) 式において、F の代わりに FP を置き換えることができる。このこと

と、(2—3) 式とを合わせて考えれば、(2—2) 式において、

$$F'F=\Lambda \tag{2—4}$$

と置くことができる。

(2—4) 式を (2—2) 式に代入して、

$$AF=F\Lambda$$

$F=(f_1, \cdots, f_p)$, $\Lambda=\mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_p)$ とおけば、

$$A\cdot(f_1, \cdots, f_p)=(f_1, \cdots, f_p)\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_p \end{pmatrix}$$

すなわち

$$Af_i=\lambda_i f_i$$

いま、A のスペクトル分解を

$$A=(v_1, \cdots, v_N)\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_N \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1' \\ \vdots \\ v_N' \end{pmatrix}$$

とおき、

$$f_i=\alpha_i v_i$$

とする。

$$\begin{aligned} A-FF'&=(\lambda_1 v_1 v_1'+\cdots+\lambda_N v_N v_N') \\ &\quad -(\alpha_1 v_1, \cdots, \alpha_p v_p)(\alpha_1 v_1, \cdots, \alpha_p v_p)' \\ &=(\lambda_1-\alpha_1^2)v_1 v_1'+\cdots+(\lambda_P-\alpha^2)v_p v_p' \\ &\quad +\lambda_{p+1} v_{p+1} v_{p+1}'+\cdots+\lambda_N v_N v_N' \\ &=(v_1, \cdots, v_N)\begin{pmatrix} \lambda_1-\alpha_1^2 & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & \lambda_p-\alpha_p^2 & & \\ & & & \lambda_{p+1} & \\ 0 & & & & \ddots \\ & & & & & \lambda_N \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1' \\ \vdots \\ v_N' \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$V=(v_1, \cdots, v_N)$,

$$\Delta=\begin{pmatrix} \lambda_1-\alpha_1^2 & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & \lambda_p-\alpha_p^2 & & \\ 0 & & & \lambda_{p+1} & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \lambda_N \end{pmatrix}$$

とおけば、

$$A-FF'=V\Delta V'$$

ゆえに

$$\begin{aligned}\| A-FF' \|^2 &= Tr((A-FF')(A-FF')') \\ &= Tr((V\Delta V')(V\Delta V')') \\ &= Tr(V\Delta V' V\Delta V') \\ &= Tr(V\Delta^2 V') \\ &= Tr(\Delta^2 V' V) \\ &= Tr(\Delta^2) \\ &= (\lambda_1-\alpha_1^2)^2+\cdots+(\lambda_p-\alpha_p^2)^2+\lambda_{p+1}^2+\cdots+\lambda_N^2\end{aligned}$$

したがって、$\| A-FF' \|$ を最小にするためには、A の固有値の大きいものから p 個、$\lambda_1, \cdots, \lambda_p$, 選び、それに対応して

$$f_i=\sqrt{\lambda_i}\, v_i \quad (i=1, \cdots, p)$$

とおけばよいことがわかる。

もちろん、このようにして作った F は、(2−4) 式の条件を満たしている。

引　用　文　献

Carroll, J. D. and Wish, M. 1974 Models and Methods for Three-Way Multidimensional Scaling. In D. H. Krantz, R. C. Atkinson, R. D. Luce and P. Suppes(Eds.). Contemporary Developments in Mathematical Psychology, II : Measurement, Psychophysics, and Neural Information Processing. San Francisco : W. H. Freeman and Company.

Davison, M. L. 1983 Multidimensional Scaling. John Wiley and Sons.

Johnson, S. C. 1967 Hierarchical Clustering Schemes. Psychometrika, 32, 241-254.

Milgram, S., Greenwald, J., Kessler, S., McKenna, W. and Waters, J. 1977 A Psychological Map of New York City. In I. L. Janis(Ed.), Current Trends in Psychology : Readings from American Scientist. California : William Kaufmann, Inc.

Ross, R. T. 1934 Optimum Orders for the Presestation of Pairs in the Method of Paired Comparisons. Journal of Educational Psychology, 25, 375-382.

Schiffman, S. S., Reynolds, M. L. and Young, F. W. 1981 Introduction to Multidimensional Scaling : Theory, Methods, and Applications. Academic Press.

Stevens, S. S. 1972 A Neural Quantum in Sensory Discrimination. Science, 177, 749-762.