Gödel の第二不完全性定理の証明における背理法適用への批判

中村　直行

ユークリッドも好んだ背理法はたいへん鋭い武器である．それはチェスの難局を打開する捨て駒戦法よりも鋭い．対局者は捨て駒として歩やその他の駒を使いたがるが，数学者は演技を捨て駒として使う（G. H. ハーディ）．

要旨

Gödel は第一不完全性定理の証明にも第二不完全性定理背理法の証明にも背理法を利用している。本稿では第二不完全性定理の証明に絞って、その背理法の適用の仕方を批判する。筆者は、直観主義の立場のように背理法そのものを認めないのでは全くない[1]。

背理法を適用するためには、証明の対象（例えば、命題）を含む数学・論理学の体系やそれを形式化した写像先の体系（形式的体系）が、無矛盾であることが大前提となる。その無矛盾性条件は、その体系の外にある超数学・超論理学の立場からその体系についてのメタ言語レヴェルから言及されるべきことである。Gödel は Gödel 数化により超数学的概念（論理式、公理、証明可能性、直接の帰結など）を形式的体系 P の中で定義することに成功した。本来メタ言語レヴェルから言及しなければ混同が生じてしまう超数学・超論理学的概念を Gödel 数化によって対象言語で扱えるようにしたことは、自己の体系の無矛盾性をその内部の論理式によって表現することを可能にした。それは大きな成果であり、それ自体は全く問題のないことであるが、Gödel 数化は背理法との相性が悪い面があることを指摘し、背理法を適用する際に Gödel 数化にある制約を課すべきであると主張する。

1. 背理法とは

数学・論理学では<直接証明>ができない場合、<間接証明>をする。その間接証明には背理法[2]という証明法がある[3]。それは証明したい命題 A の否定命題¬A を証明の出発点とし

て仮定し、その後正しく推論したにも関わらず矛盾が出たので、結局は証明したい命題Aが証明できたという論法である[4]。

背理法が適用されて証明された定理には周知のように、ユークリッドによる〈素数は無限にある（最大の素数は存在しない）〉という定理の証明、〈カントールによる実数の濃度が自然数の濃度よりも大きい〉という定理の証明[5]等などがある。ここでは$\sqrt{2}$ が無理数であることの証明を見てみよう。一松［1990］は3通りの証明を紹介しているが、そのうちの二つを引用しよう。

■$\sqrt{2}$ が無理数であることの証明（1）[6]

$\sqrt{2}$ が有理数であったとして，$\sqrt{2}=m/n$ とおく．m, n は正の整数で，互いに素であるとしてよい．この式を2乗すると

$$2n^2 = m^2 \qquad (1)$$

である．したがって m は偶数だから，$m=2m'$とおいてよい．これをを（1）に代入すると、

$$2n^2 = 4m'^2 \qquad n^2 = 2m'^2$$

となる．したがって n も偶数である．これは m と n とが互いに素であるとした仮定に反する．ゆえに$\sqrt{2}$ は有理数ではない．

■$\sqrt{2}$ が無理数であることの証明（2）[7]

$\sqrt{2}$ が有理数であったとして，$\sqrt{2} = m/n$, m と n は正の整数とする（必ずしも互いに素でなくてもよい）．この式を2乗すると

$N=2n^2 = m^2$

である．この数 m を素因数分解すれば，m^2は偶数個，$2n^2$は2を含めて奇数個の素因数の積に分解される．これは素因数分解の一意性に反する．ゆえに$\sqrt{2}$ は有理数ではない．

背理法の論法は以下のような仕掛けになっている。

$(\neg A \to A) \to A$ ・・・ ①

あるいは、 $(A \to \neg A) \to \neg A$ [8]・・・ ②

（ただし①、②について A は論理式[9]とする）

前述の背理法を適用された二つの実例から、その仕掛けがどのように機能しているかを調べてみよう。「$\sqrt{2}$ が無理数であることの証明 (1)」においても「$\sqrt{2}$ が無理数であることの証明 (2)」においても、「$\sqrt{2}$ が無理数でなかったとして」というふうに否定形で表現されているのではなく、「 $\sqrt{2}$ が有理数であったとして」という肯定形の表現になっているので、背理法も②の表現の方を使って説明する方がわかりやすいだろう。②の仮定Aに相当するのが、「$\sqrt{2}$ が有理数であったとして」の箇所であり、以降正しく推論し（このケースでは同値な命題への書き換えを経て）結局は、¬A が導かれたことになる[10]。

①および②の推論は、数学者が直観的に[11]行っている推論であり、①も②も対象言語だけで書かれている。数学を基礎づける（と筆者が思うところの）論理学の立場から背理法の仕掛けをより詳細に見ておこう。筆者は矛盾を論理式間の関係と捉えない。だから「A と¬A とは矛盾している」などという言い方はしない。ある体系から A と¬A とが演繹されたら、「その体系は矛盾している」という言い方をする。矛盾できるのは、あくまでも体系であり、矛盾する資格は、論理式（間）にはないので、矛盾記号という論理式はありえない、と考える。筆者は背理法の構造をこう捉える。

$$(\text{体系 } P \text{ は無矛盾である}) \Rightarrow (\neg \mathrm{A} \rightarrow \mathrm{A}) \rightarrow \mathrm{A}$$

あるいは

$$(\neg \mathrm{A} \rightarrow \mathrm{A}) \Rightarrow (\text{体系 } P \text{ は矛盾してしまう}) \Rightarrow \mathrm{A}$$

「⇒」はメタ言語に属する記号で自然言語の「ならば」に相当し、「→」は対象言語に属する記号で前件と後件とを結合し、前件を仮定すると、後件が演繹される場合に用いるとする。「⇒」の前件〈体系 P は無矛盾である〉は、体系 P をその外から観察した者がメタ言語を使用してその体系 P について言及しているのに対し、「⇒」の後件「$(\neg \mathrm{A} \rightarrow \mathrm{A}) \rightarrow \mathrm{A}$」は体系内部の対象たる論理式の間の関係について対象言語を使用して言及している。

体系の無矛盾性はメタ言語から言及されるべきである。背理法を適用するためには、証明の対象を含む数学・論理学の体系が、無矛盾であることが大前提となる。その無矛盾性条件は、その体系の外の超数学・超論理学の立場に立脚し、メタ言語レヴェルから言及されるべきことである。ここで用語の使い分けとして、背理法という証明の内部で仮定される「証明の終りには却下されるべき仮定」と、証明を外から支えるために仮定される、体系の無矛盾性という「大前提」を区別することにしよう。

2. Gödel はどう証明しているのか

では Gödel の証明を見てみよう。原論文を引用する前に、そこで使われている論理式を簡単に紹介しておこう。Gödel は κ を帰納的で無矛盾な論理式の集合と仮定している。原論文の原注63に書かれているように(引用中に原注63〜67があるが、63のみ訳出する)、その κ の無矛盾性を表現しているのが、Wid(κ)という論理式である。

論理式の上に線が引かれているのは、Gödel 自身によるもので、論理式の否定を表すための記号である[12]。筆者が記述した箇所では否定を表すための記号として「¬」を用いている（もちろん原論文からの引用箇所は、論理式の上に線を引く Gödel による記法のままにしてある)。ここで扱われている形式的体系 P は、原論文の第2節の冒頭で「P は本質的に PM の論理学の公理にペアノの公理[13]（対象として数を、原始記号として後者関数を備えた）を付加して得られる体系である」と紹介されているものである。

では、筆者が問題視している箇所を見てみよう（引用文に対してインデントをあえて付けなかった)。

Satz XI: Sei κ eine beliebige recursive widerspruchsfreie[14] Klasse von FORMELN, dann gilt: Die SATZFORMEL, welche besagt, daß κ windersspruchsfrei ist, ist nicht κ-BEWEISBAR; insbesondere ist die Widerspruchsfreiheit von P in P unbeweisbar[64], vorausgesetzt, daß P widerspruchsfrei ist(im entgegengesetzten Fall ist natürlich jede Aussage beweisbar).

Der Beweis ist (in Umrissen skizziert) der folgende: Sei κ eine beliebige für die folgenden Betrachtungen ein für allemal gewählte recursive Klasse von FORMELN (im einfachsten Fall die leere Klasse). Zum Beweise der Tatsach, daß 17 Gen r nicht κ-BEWEISBAR ist,[65] wurde, wie aus 1., Seite 189, hervorgeht, nur die Widerspruchsfreiheit von κ benutzt, d. h. es gilt:

$$\mathrm{Wid}(\kappa) \rightarrow \overline{\mathrm{Bew}_\kappa}(17\ \mathrm{Gen}\ r), \tag{23}$$

d. h. nach (6.1):

$$\mathrm{Wid}(\kappa) \rightarrow (x)\,\overline{x B_\kappa (17\ \mathrm{Gen}\ r)}.$$

Nach (13) ist 17 Gen $r = Sb(p\,{}^{19}_{Z(p)})$ und daher:

$$\mathrm{Wid}(\kappa) \rightarrow (x)\,\overline{x\,B_\kappa(Sb(p\,^{19}_{Z(p)}))},$$

d. h. nach (8.1):

$$\mathrm{Wid}(\kappa) \rightarrow (x)Q(x,p). \tag{24}$$

Wir stellen nun folgendes fest:
Sämtliche in Abschnitt 2[66] und Abschnitt 4 bisher definierte Begriffe (bzw. Beweisbar Behauptungen).sind auch in P ausdrückbar (bzw. Beweibar). Denn es wurden überall nur die gewöhnliche Definitions- und Beweismethoden der klassischen Mathematik verwendet, wie sie im System P formalisiert sind. Insbesondere ist κ (wie jede recursive Klasse) in P definierbar. Sei w die SATZFORMEL, druch welche in P Wid (κ) ausgedrückt wird. Die Relation $Q(x, y)$ wird gemäß (8.1), (9), (10) durch das RELATIONSZEICHEN q ausgedrückt, folglich $Q(x, p)$ durch r (da nach (12) $r = Sb(q\,^{19}_{Z(p)})$) und der Satz $(x)\,Q(x, p)$ durch 17 Gen r.

Wegen (24) ist also w Imp(17 Gen r) in P beweisbar[67] (um so mehr κ-BEWEISBAR). Wäre nun w κ-BEWEISBAR, so wäre auch 17 Gen r κ-BEWEISBAR und daraus würde nach (23) folgen, daß κ nicht widerspruchsfrei ist.

Es sei bemerkt, daß auch dieser Beweis konstruktiv ist, d. h. er gestattet, falls ein BEWEIS aus κ für w vorgelegt ist, einen Widerspruch aus κ effektiv herzuleiten.

以上の引用に対する和訳は以下のとおりである。筆者が語句を補った箇所は「〔　〕」でくくってある。

定理XI: κ を帰納的で無矛盾な[63]<論理式>の集合とする。そのとき、κ が無矛盾であることを主張する<閉論理式>Wid (κ)は、κ-<証明可能>ではない。特に P が無矛盾である限り、Pの無矛盾性は、Pの中では証明されない（もちろん逆の場合、すべての命題が証明されてしまう)。

その証明（の概略）は、以下のとおりである。帰納的な<論理式>の集合を任意に一つ選んで κ と呼び、以降の議論ではこれに固定して考える[15]。（もっとも単純な場合、それは空

集合である)。17 Gen r はκ-<証明可能>でないということを証明するには、189 頁[16]の 1 が示しているようにκの無矛盾性だけが使用された。
すなわち、(23)のとおりである。

$$\mathrm{Wid}(\kappa) \rightarrow \overline{\mathrm{Bew}_{\kappa}}(17\ \mathrm{Gen}\ r) \tag{23}$$

つまり (6.1)〔を Gödel〔1931〕p. 172 から引用すると、$\mathrm{Bew}_{\kappa}(x) \equiv (Ey)y\mathrm{B}_{\kappa}x$ であり、これ〕によって、

$$\mathrm{Wid}(\kappa) \rightarrow (x)\ \overline{x\,B_{\kappa}(17\ \mathrm{Gen}\ r)}$$

〔と書き換えることができる。〕

(13)により、17 Gen $r= Sb(p\ {}^{19}_{Z(p)})$であるから、したがって

$$\mathrm{Wid}(\kappa) \rightarrow (x)\ \overline{x\,B_{\kappa}(Sb(p\ {}^{19}_{Z(p)}))}$$

〔と書き換えることができる。〕

すなわち、(8.1)〔を Gödel〔1931〕p. 174 から引用すると、$Q(x,y) \equiv \overline{x\mathrm{B}_{\kappa}[Sb(y\ {}^{19}_{Z(y)})]}$ であり、これ〕によって、

$$\mathrm{Wid}(\kappa) \rightarrow (x)Q(x,p). \tag{24}$$

〔と書き換えることができる。〕

以下のことに注目しよう。第2節と第4節のこれまでに〔κの中で〕定義された概念(または証明可された言明)の全ては、Pの中でも定義可能(または証明可能)である。なぜならば、われわれが使用してきた定義と証明の方法は一貫して、体系Pの中で形式化されたような、古典数学で慣例になっている方法ばかりだからだ。特にκは(全ての帰納的集合のように)Pの中で定義可能である。ここでwをPの中でWid(κ)を表現している<閉論理式>としよう。(8.1)、(9)、(10)によれば、関係$Q(x, y)$は、<述語記号>qによって表現されるがゆえに、$Q(x, p)$はrによって((12)により$r=Sb(q\ {}^{19}_{Z(p)})$なので)、さらに命題$(x)\ Q(x, p)$は 17 Gen rによって表現される。

それゆえに、(24)によって w Imp(17 Gen r) は P の中で証明可能である（さらに κ-〈証明可能〉でもある)。すると、もしも w が κ・〈証明可能〉であったならば、17 Gen r までもが κ・〈証明可能〉となってしまい、このことから(23)によって κ は無矛盾ではなくなってしまう。

この証明も構成的であることに注目しよう。すなわち、κ から w の〈証明〉が与えられると、κ から実際に矛盾が引き出せるのである。

和訳は以上である。本稿の第３節では Gödel による背理法適用に関する批判へと議論を進める。ただし、次の第３節に移る前に Gödel が「189 頁の１から分かるように」と言っている箇所を見ておこう。

1. 17 Gen r ist nicht κ-BEWEISBAR.[45] Denn wäre dies der Fall, so gäbe es (nach 6.1) ein n, so daß n B κ (17 Gen r). Nach (16) gälte also:

$$\mathrm{Bew}_{\kappa}[\mathrm{Neg}\,(Sb\,(r\ {}^{17}_{\ Z(n)}))],$$

während andererseits aus der κ-BEWEISBARKEIT von 17 Gen r auch die von $Sb\,(r\,{}^{17}_{\ Z(n)})$ folgt. κ wäre also widerspruchsvoll (umsomehr ω-wider-spruchsvoll).

1. 17 Gen r は κ-証明可能ではない。なぜならば κ-証明可能とするならば、((6.1) により) n B_{κ} (17 Gen r) を満たす n が存在するので、(16) により以下が得られる。

$$\mathrm{Bew}_{\kappa}[\mathrm{Neg}\,(Sb\,(r\,{}^{17}_{\ Z(n)}))]$$

いっぽう、17 Gen r の κ-証明可能性から $Sb\,(r\,{}^{17}_{\ Z(n)})$ である。したがって κ は矛盾していることになる（したがって ω-矛盾していることにもなる)。

ただしこの箇所に関して筆者は異論がない（わけではないが、少なくとも本稿では申し立ては控える)。なぜならば、背理法の大前提たる κ の無矛盾性を前提し、その中の論理式を仮定し、背理法を正しく用いているからだ。具体的に言えば、背理法の内側での仮定が、

⟨17 Gen r は κ-証明可能である⟩であり、これを基に以降、論理的に推論していき、Bew$_\kappa$[Neg $(Sb(r\,{}^{17}_{Z(n)}))$] （$Sb(r\,{}^{17}_{Z(n)})$ の否定の証明可能性） と $Sb(r\,{}^{17}_{Z(n)})$とを共に演繹し、矛盾を導き、⟨17 Gen r は κ-証明可能ではない⟩を証明しているからである[17]。

それに対していっぽう、定理 XI の証明はそうではない。言い換えると、背理法の大前提と背理法の内側の却下されるべき仮定とに、問題がある。

3. Gödel による証明を振り返る

定理 XI は、κ の無矛盾性の仮定からはその無矛盾性を表現する⟨閉論理式⟩Wid (κ)は（Gödel が主張するところでは）証明できない（傍点は筆者による)、と主張し、特に P の無矛盾性の仮定からはその Pの無矛盾性は、Pの中では証明されない、と主張している。以下では前者に絞って、その証明の骨子を論じる。

Gödel は定理VIの証明を振り返り、それを自然言語により記述したあとに、今度はそれを論理式に書き換えて(23)として提示している。

17 Gen r は κ -⟨証明可能⟩でないということを証明するには、189 頁の 1 が示しているように κ の無矛盾性だけが使用された。

すなわち、(23)のとおりである。

$$\mathrm{Wid}(\kappa) \rightarrow \overline{\mathrm{Bew}_\kappa}(17\ \mathrm{Gen}\ r), \tag{23}$$

(23)を提示した以降は、 (23)の「→」の右に位置する後件を同値な論理式で 3 回置換し、

$$\mathrm{Wid}(\kappa) \rightarrow (x)Q(x, p). \tag{24}$$

へと書き換えている。

「Wid （κ） →・・・」から明らかなように、(23)の仮言命題の前件では Wid （κ)を仮定しているのである。(23)では証明可能性の概念は、後件にのみ含まれ、前件には含まれない。前件で仮定されている論理式 Wid （κ)の主張は、「κ は無矛盾である」であった。そして Wid (κ) （つまり κ の無矛盾性）を仮定すると、$\neg$Bew$_\kappa$(17 Gen r) （つまり （17 Gen r） は κ から演繹されない）が演繹される。さらに推論を進めると、(24)の前件 （つまり(23)と同じ仮定である） W id (κ)から （17 Gen r） が演繹される。上記を通して Gödel は、κ が矛盾してしまうことになると主張し、⟨ κ は無矛盾である⟩に反するという論法で背理法

を使用しているように、筆者は解釈した。

大前提である κ の無矛盾性からして仮定 Wid (κ)が却下されることになる。つまり¬Wid (κ)である。この論理式の主張は「κ は矛盾している」である。したがって、第二不完全性定理の主張は、証明に沿ってそのとおりに主張させると、κ の無矛盾性を表現する論理式 W id (κ)の証明可能性の否定ではなく、κ の無矛盾性自体の否定となる。

では、$\sqrt{2}$ が無理数であることを証明する背理法を参照しつつ、定理 XI における背理法適用のポイントを箇条書きにして示そう。

・却下されるべき仮定 A : Wid(κ)

(この論理式の意味は「κ は無矛盾である」と解釈される)

・仮定を却下に至らしめるところのその否定¬A : ¬Wid(κ)

(却下されるべき仮定 A と整合的ならば、この¬Wid(κ)となるはずだが、Gödel の自然言語による証明では¬Wid(κ)ではなく¬Wid(κ)の証明可能性となっている[18])

・直接的に対比的にその否定が演繹される論理式 B : ¬Bew_κ(17 Gen r)

(この論理式の意味は「(17 Gen r) は κ から証明不可能である」と解釈される)

・論理式 B の否定 : Bew_κ(17 Gen r)

(<直接的に対比的にその否定が演繹される論理式 B >と整合的ならば、この Bew_κ(17 Gen r) なるはずだが、Gödel は自然言語で「17 Gen r までもが κ-<証明可能>となってしまい」と言い、矛盾を引き出そうとしているので、その点を尊重するならば、Bew_κ(17 Gen r)ではなく、17 Gen r となるだろう。注 18 を参照のこと)

さて、ここで重要な問題を提起する。それは却下されるべき仮定 A が Wid(κ)だということだ。それがどうして問題になるかというと、Wid(κ)は「κ は無矛盾である」を意味するので、定理 XI の証明の場合、背理法を外側から支える大前提たる κ の無矛盾性を、背理法の内側で却下されるべき仮定としても立てているからだ。背理法の論理的構造はこうだった。

$$(\kappa \text{ は無矛盾である}) \Rightarrow (A \rightarrow \neg A) \rightarrow \neg A$$

Gödel の証明では、〈κは無矛盾である〉ことを背理法の内側の仮定 A として立てているので、上記に対して「κは無矛盾である」を「A」で置き換えてよい（その逆でもよいが）から、

A[19] ⇒ (A → ¬A) → ¬A　　　・・・※

となる。これは何を意味するのか。

A は A でも区別してメタ言語から言及される **A** は、大前提で揺るぎない仮定である。したがって否定されない。しかし、対象言語から言及される、もういっぽうの A に注目すると、A は否定されるべき（べく意図された）仮定である。¬A を証明したいが、背理法を使うしかないと判断した段階から、否定される役割のために立てられた A であるがゆえに。

したがって、※は〈否定されるべきではないこと〉と〈否定されるべきこと〉の両立を要求していることになる。**A** は保たれる（という信念を数学者は持っている）大前提だからこそ、「⇒」の後件の中のさらに「→」の後件の結論である¬A が背理法によって証明されることになる。その背理法を頼って、結論¬A を導こうとする者は、大前提たる **A** を保たれなければならない。したがって、**A** を保ちつつ、A を否定する¬A を導こうとしているのだ。

つまり※で起こっているのは、矛盾である。背理法によって証明された¬A は、大前提である **A** を否定し、かつ、その証明を支えたのが、その証明によって否定されている大前提 **A** なのだから、自己矛盾が起きている。端的に言って（※の両端を見て）、(**A** ならば¬A）なのだから、再帰的に背理法を適用できるだろうか。しかし今度は無矛盾性を大前提できるような、これらを取り巻くような体系らしき何かが見当たらない。

4. 結論

このような背理法の不適切な適用は、言語階層を圧縮できてしまうテクニックに由来するのではないだろうか？もちろん筆者は Gödel 数化自体を批判しない。問題の原因は、Gödel 数化そのものではなく、Gödel 数化と背理法との相性にある。

Gödel は Gödel 数化により、数学を対象言語レヴェルとすると、メタ言語で扱うべき超数学的な概念を対象言語で扱うことに成功した。その Gödel 数化というテクニック自体には何ら問題はない。しかし筆者は、背理法を用いる場合には、その Gödel 数化にある制限を課すべきだと考える。その際には、〈背理法の大前提たる体系についての無矛盾性〉とく

体系の内側の仮定>とを区別するべきである。少なくとも背理法を用いる場合に限っては、体系についての無矛盾性を表現している論理式を体系内の仮定として立てることは誤りであろう。

> 命題は，それ自身について語ることはできない．
>
> ゲーデルは，“ホワイトヘッド（A. N. Whitehead）とラッセル（B. Russell）によって示唆されたこの解決方法は，あまりにも徹底し過ぎている”と，これを批評している[20]．

筆者も「命題は、それ自身について語ることはできる」と考えるし、Gödel はそうできるようにGödel 数化というテクニックを整えた。しかし、Gödel 数化によって数に対応づけられる前の言明が、本来はメタ言語から言及されるべき言語階層にあったという由来を考慮しないこと[21]は、意外な危険性 —本稿で言えば、背理法との相性の悪さだが— を伴うことを指摘しておく。

最後に第二不完全性定理は、間接証明よりは困難な証明になるであろうが、まだ直接証明の余地は残されている。

（金沢学院大学 経営情報学部 情報ビジネス学科・准教授）

注

1 筆者は本稿では直観主義論理の立場を採用していない。その証拠に<二重否定除去>を使用している。注8を参照。<二重否定除去>を認めるということは<背理法>や<排中律>も認めることになる。なぜならば「直観主義論理に2重否定除去/排中律/背理法のどれかひとつを付け加えたものが古典論理である。というのは，この3つは1つを認めれば他のものが導けるからだ」（戸田山[2000] p. 296)。

2 別名「帰謬（きびゅう）法」とも言う。ラテン語：reductio ad absurdum、英語：proof by contradiction, reduction to the absurd。

3 他には対偶を証明するという間接証明がある。つまり、（A → B）を証明する代わりに（¬B → ¬A）を証明するのである。ただし論理記号「¬」は否定を表すものとする。

4 ティーレ〔1986〕pp. 109-114, 120-30 を参照した。

5 「このことの証明に，カントールは 1874 年に最初に示したときには，区間縮小法に基づく背理法を用いたが，後に有名な対角線論法を適用した．ここではこの対角線論法を紹介しよう．この論法は背理法から出発する」（志賀[1990] p. 57)。

6 一松はこの証明に先だって「最初のものは、昔から有名な伝統的な方法である。これはユークリッド

の『原論』にも一部現われているが、古代の「奇数・偶数論」の立場に立つものである」と紹介している（一松[1990] p. 27）。

7 「現在のわれわれにとって、最も明快かつ本質的と思われるのは、第二の証明である」（一松[1990] p. 28）。

8 「(¬A → A) → A 」と書いたが、仮定が否定の論理語を含まなければいけないことはない。「(A → ¬A) → ¬A」としてもよい。なぜならば、「(¬A → A)　→ A 」の A を¬B で置き換えてもよいのでそうすると、「(¬ ¬B → ¬B) → ¬B 」となる。筆者は本稿において<二重否定除去>を認めるので、¬ ¬B を B に置き換えることを許す。したがって「(B → ¬B) → ¬B 」となる。ここで B を A に置き換えれば、「(A → ¬A) → ¬A 」となる。

9 厳密には論理式ではなく、論理式の schema（型、図式）である。

10 ただし直接に命題とその否定とが現れるのは、推論の開始直後に立てられた、仮定にとって代理に当る（仮定そのものではなく同値変換された）A と推論の終了直前に引き出される¬A という代理どうしの間に、である。具体的には A として、<m, n は互いに素である>、¬A として<m と n とが互いに素でない>とした場合である。

11 論理学の直観主義とは別の意味で使っている。厳密に定義する必要はないと思うので、「数学的センスによって論理的な各ステップを必ずしも経ないで」とか「数学の論証としては明らかなので、数学的センスよく、論理的飛躍は自覚のうえで」といった程度の意味である。

12 例えば、

$$\mathrm{Wid}(\kappa) \rightarrow \overline{\mathrm{Bew}}_{\kappa}(17\ \mathrm{Gen}\ r),$$

である。

13 原論文の原注 16 が、この位置（筆者による注で言うと注 13 の位置）に付されている。原注 16 を和訳しておく。「ペアノの公理を追加したのは、PM の体系で導入されている他の全てと同様に、単に証明を単純化するためであって、原理的にはなくてもよい」。

14 原論文の原注 63 が、この位置（筆者による注で言うと注 14 の位置）に付されている。原文の下に和訳を付す。

63 κ ist widerspruchsfrei (abgekürzt als Wid(κ)) wird folgendermaßen definiert:

$$\mathrm{Wid}(\kappa) \equiv (Ex)[\mathrm{Form}(x)\ \&\ \overline{\mathrm{Bew}}_{\kappa}(x)].$$

63 κ は無矛盾である（Wid(κ)と略す）は、以下のように定義される。

$$\mathrm{Wid}(\kappa) \equiv (Ex)[\mathrm{Form}(x)\ \&\ \overline{\mathrm{Bew}}_{\kappa}(x)].$$

15 林・八杉[2009] p. 59 の訳を参照のうえで筆者による訳を採用した。

16 *Monatshefte für Mathematik und Physik*, 38 における頁数（筆者がサーヴェイした *Kurt Gödel Collected works* vol. I では 176 頁）である。

17 次の注 18 で指摘した若干の問題はあるものの、回り道をせずに本題へと進む。

18 本稿では背理法の適用に関してもっと重大な問題を指摘するので、ここでは以下の指摘に留めておく。定理 XI の証明も論理式を用いた対象言語による部分と自然言語（独語）を用いたメタ言語による部分とがある。しかし同一の外延について、対象言語で例えばAについて言及しておきながら、自然言語ではAの証明可能性について言及しているというような不整合がある。

19 メタ言語から言及されていることと対象言語から言及されていることを表示上区別するために、メタ言語から言及されている場合には太字で表した。

20 前原[1977] p. 138 より引用。

21 当然、論理式と Gödel 数とは全単射（one to one onto）の関係にあり、逆写像が存在するので、所与の Gödel 数から、元の（一対一に対応する）論理式を特定することができる。

文献

Gödel, K.〔1931〕"Über formal unentscheidbare Sätze der Principia mathematica und verwandter Systeme I" in *Kurt Gödel Collected works vol. I*, edited by Solomon Feferman et al., Oxford University Press, 1986-1995, pp. 144-95.

林, 晋・八杉, 満利子[2009]『ゲーデル　不完全性定理』岩波書店.

廣瀬, 健・横田, 一正[1991]「付録『プリンキピア・マテマチカ』やその関連体系での形式的に決定不可能な命題について, I」『ゲーデルの世界：完全性定理と不完全性定理』所収、海鳴社、pp. 165-202.

一松, 信[1990]『√2 の数学　無理数を見直す』、海鳴社.

前原, 昭二[1977]『数学基礎論入門』、朝倉書店.

中村, 直行[2011]「Gödel の第一不完全性定理の証明における無矛盾性という前提について」『金沢学院大学紀要 経営・経済・情報・自然科学編』第 9 号、pp.100-6.

志賀, 浩二[1990]『数学 30 講シリーズ 3　集合への 30 講』、朝倉書店.

ティーレ, リュディガー〔1986〕『証明のすすめ』金井省二 訳、森北出版株式会社、1990 年.

戸田山, 和久[2000]『論理学をつくる』、p. 26, pp. 35-6, p. 45, p. 50, pp. 58-9, pp. 222-3, pp. 233-5, pp.260-5, pp. 296-7、名古屋大学出版会.