－サテライト・プラザ ミニ講演－

会　場　　金沢市中央公民館彦三館　２階第一会議室

日　時　　平成 13 年 10 月 14 日（日）午後 2 時～３時

テーマ　　「無限級数のふしぎ」

講　師　　児玉　秋雄（金沢大学理学部教授）

（司会）　時間になりましたので，金沢大学サテライトプラザのミニ講演を始めさせていただきます。今日は絶好の行楽日和で，どこか行楽に出かけておられる人も多いのではないかと思いますが，それでも今日はこれだけお集まりいただきありがとうございます。

私は進行役をやらせていただきます，理学部の中西と申します。大学教育開放センターのセンター長もやっておりますので，司会を務めることになりました。

今日は児玉先生に「無限級数のふしぎ」という題でお話をいただきます。10 月 27 日から，12 月８日まで途中１回飛ばす週がありますが，大学の公開講座で「数学の館へようこそ」を開きます。これは６回シリーズで理学部の数学の先生方が数学のおもしろいところをわかりやすくお話ししてくださることになっています。前宣伝も兼ねて，今日はその主任講師である児玉先生にこのミニ講義をお願いしました。お忙しい中，今日に設定させていただきました。

児玉先生は大学の研究者総覧を見ていただければおわかりになります。私たちが数学を高校で習ったときは，数学といえば代数と幾何と教科書がわかれていたものです。数学の先生にどうして数学が好きなのかを聞くと，代数と幾何で大好きか（代数幾何）としゃれにもならないようなお話を聞いたことがあります。児玉先生は大きくいうと幾何学という領域になるのでしょうか。ご専門のことはよくわかりませんのでうまく紹介できませんが，今日，お話ししていただく無限級数は我々も非常に恩恵を被っているところが大きいです。それを知らずに非常に便利に使っておりますが，無限級数は非常にサイエンスの進歩に寄与しています。今日は数学の楽しさやふしぎさを発見していただくということで，最後にご質問等を何でもいいですからしていただく時間も作り，大体１時間半くらいお話をお伺いしたいと思います。

それでは先生，よろしくお願いいたします。

（児玉）　私は秋田の本当の田舎の生まれで，なかなか秋田弁が抜けなくて学生に迷惑を

かけているのではないかと思っています。私は中学校のころまでは大工をするつもりでおり，ものを作るのが大好きでした。しかし，高校受験のころ担任の先生に「どうして高校に進学しないのか。大工をやるにしてももっと勉強してからにした方がいいのではないか」と言われ，それでは少し勉強してみようかと思って高校に行きました。秋田駅まで電車で片道１時間ぐらい，それから高校までバスで 30 分ぐらい，毎日片道１時間半通いました。高校の担任が数学の先生で，ものすごく影響を受け，数学がおもしろそうだと思いました。高校３年間の間に勉強をやめて大工をやろうかといろいろと迷いました。その担任の先生は東北大学の工学部に合格したのですが，体が多少弱くて東北大学には行かず地元の秋田大学教育学部の数学科に進み，数学の先生をやっておられたのです。先生はある日，私を呼ばれて，「大学に行くのか，行かないのか，どうするのか。やるならやってみろ。学問を修めるのは一大事業で，会社を起こすのと全く同じことで，本当に修めるのだったら命がけでやらなければ出来ないだろう」というようなことを言われました。当時は，高校２，３年になるくらいまで，のんびりと受験勉強もしないでいたため理学部数学科のある大学に入れるわけがありませんでした。それで私は秋田大学の教育学部の数学科に入ったのです。そこでいろいろと数学を自分で勉強するとものすごく奥が深くて，これはやはり勉強しないことには何もできないと実感しました。ほとんど２，３週間に１回ぐらいしか休まず，土曜日も日曜日も大学に行って，講義室で独りで勉強した記憶が今でもあります。

そのころは『数学セミナー』にいろいろと数学の偉い人などの話が載っており，そのうちの一つにアメリカに頭脳流出した小平邦彦さんの話が書いてありました。その人のお嬢さんがピアノを習っていて，ピアノも最初のうちは全部暗譜して弾けなければだめだと徹底的に訓練されるのだそうです。すごく才能がある人でも指から血が噴き出すくらいにやらなければならないそうです。小平先生は数学についても同じで，数学をやり始めたころにはそれと全く同じことで，苦労して修めなければ絶対に使いものにはならないと書いていました。こんなに偉い，フィールズ賞をもらうような人もそんなことをやったのかと思って，本当にそれからは自分でも一生懸命やりました。大学院修士課程を東北大学で，博士課程を大阪大学で終え，それ以来，二十数年間数学をやっております。数学の研究を続けることが非常につらいと感ずることも幾度となくありましたが，それ以上に数学の研究の楽しさがありました。今日は，どうしてこんなに数学が私を惹きつけるのか，その一端を話してみたいと思います。

題材は何でもいいのです。ただ，その題材に潜んでいる真理です。数学をやっている人は論文を１年間に何編と書けるわけがなく，本当に毎日のように頑張って，今日もできないか，明日はできないかとやって，１年に１回「ああ，やった」と思うようなことがあれば幸いなのです。そういう１年に１回あるかないかの，その喜びを求めて日夜頑張っているわけです。そういうことがあって，大学に入った時点から数学の講義を受けて，どうしてこんなことが昔の人はわかったのだろうか。あるいは何十年か自分で数学をやっていて，何年も解けない問題があったとき，もう少しでできるのではないだろうかなどと考えてい

るときなど，ある意味で数学には非常に神秘的で，もしかしたら神様がいるのではないかとさえ思うことがある。我々人間は一生懸命にいろいろなことを頑張ってやっているけれどもなかなかできない。しかし，もしかして神様は上から見ていて「もう少し，こちらにいったらできるだろうになあ」とつぶやいている。そういうことさえ思うことがあるのです。ですから，長く考え続けた問題が解決したときには，あたかも山を登っている途中では霧がかかっていて何も見えなかったけれども，山頂に着いたときぱっと展望が開け，すばらしい景色を見ることが出来たのと同じ楽しみがあるのです。一瞬霧が晴れて途中のすばらしい景色をかいま見るというのは，数学でいえば解決しようとしている大きな問題・理論に対する良い例（example）を見つけたことにあたります。ですから，数学の研究においては，考えていたことが本当に正しいと確信し証明できたとき，はじめて，山頂に立ち霧が晴れてすばらしい景色を見たということになるでしょう。私たちは，そのような喜びを求めて黙々と研究を続けております。

今日は自分の経験から，無限級数というものがものすごく不思議だと思ったことがあったので，それを話してみようかと思っています。細かい証明といったものはやりません。もし，用意してきたものが時間内で終わったら，現在私がどういう研究をしているのかを話してみたいと思います。

数学をやるにはまず用語の定義をする必要があります。定義がわからないと数学の議論はできません。定義は万国共通で，どこに行っても同じ意味をもちます。その定義がないと何も話せないので，まず定義からやります。数列とは字のごとく「数の列」です。私の専門は，広い意味では幾何学ですが，多変数関数論という分野をやっています。それに少し関係することを宣伝しておきますと，今年は岡潔先生の生誕 100 周年で，10 月 30 日から 11 月 5 日まで京都大学の数理解析研究所で国際会議があります。日本の誇る岡潔さんの生誕 100 周年ということで，私も組織委員の一人でいろいろと忙しいのですが，そういう世界に誇れる人が日本にいたことは我々数学をやっているものにとってはものすごく励みになっています。多変数関数論はその流れをくむものです。さて，今日話すことは全部，実数の範囲での話です。

数列というのは文字が示すとおりで

$$a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$$

といった数の列で，記号では

$$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$$

あるいは簡単に

$$\{a_n\}$$

と書きます。また，a_nを一般項と言います。

数の列なら何でも数列というわけですから，例えば

$a_n = n$：$1,2,\cdots,\ n,\cdots$

$a_n = (-1)^n$：$-1,1,-1,\cdots,-1,1,\cdots$

$a_n = \frac{1}{n}$：$\frac{1}{1},\frac{1}{2},\cdots,\frac{1}{n},\cdots$

このように何でもいいから数の列が数列です。そうすると，この与えられた数列，$\{a_n\}$がある実数aに収束するというのはどういうことでしょうか。言葉だけで書きますと,「nが限りなく大きくなるとき，このnに対応する数a_nが限りなくaに近づく」ことです。これが収束の定義です。

そして，どんなaをとっても，こういうことが起こらない，つまり$\{a_n\}$が収束しないとき，この与えられた数列$\{a_n\}$は発散するといいます。

発散の中で，特に無限大（∞）に発散するということと，マイナス無限大（−∞）に発散するという概念があります。すなわちnが限りなく大きくなるとき，nに対応するa_nが限りなく大きくなる場合に，$\{a_n\}$という数列は（プラス）無限大に発散するという。同様にしてマイナス無限大に発散することも定義します。

記号では，例えば$\{a_n\}$が，あるaという実数に収束する場合に，$\lim_{n\to\infty} a_n = a$と書きます。同様に無限大に発散するときは$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$と，またマイナス無限大に発散する場合には$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$と書きます。

ここでこの定義だけ見ると限りなく大きくなるとか，限りなく近づくというところに，数学的にはあいまいな表現があります。そこでε－N論法というものを使います。εというのは何でもいい十分小さな数で，あとのNは番号という意味です。そういう論法での厳

密な定義は何かというと，$\{a_n\}$がある実数aに収束するということは，下のようになることです。

┼───┼─────┼─────┼───┼─────┼───┼─────┼─　R（Real Number:実数）

a_1　a_2　$a-\varepsilon$　a_n　a　a_{n+1}　$a+\varepsilon$　a_3

「任意のε＞0に対して，ある番号$n_0 = n_0(\varepsilon)$が存在して$n \geq n_0$なる任意のnに対して必ず$a-\varepsilon < a_n < a+\varepsilon$となる。」すなわち，この数列が$a$に収束するということは，何でもいいからε＞0を与えたら，ある番号より先のnに対して，a_nは必ずこの区間（$a-\varepsilon, a+\varepsilon$）に入るということです。εは任意だから，この最初に与えたεの半分のε／2を考えたら，やはりそれに応じてある番号n（ε／2）があって，それより先のa_nは全部区間（$a-\varepsilon/2,\ a+\varepsilon/2$）の中に入ります。そうしたらもともとεは何でもいいのだから，ε／3を考えたら，それに対しても番号がとれて，それより先の番号に対するa_nは全部区間（$a-\varepsilon/3,\ a+\varepsilon/3$）に入ります。これは，先に言った「限りなく」ということを厳密に表しています。ですから，与えられた数列がある数aに収束するということは，何でもいいからεとしてその幅を考えたら，最初の有限個はわからないけれども，ある番号から先の番号に対するa_nは全部aを中心としてεの幅をもった区間に入ってしまいます。そういう場合に収束するといいます。

それでは無限大に発散するというのはどういうことかというと，このNはいくら大きくてもいいから，とにかく数Nを与えます。そうすると，この与えたNに対して何か番号n_0があって，この番号より大きな番号nに対しては，a_n＞Nとなる。Nはいくら大きくてもいいのです。そうするとこの２倍の２Nをとっても同じで，ある番号n_1があって，n＞n_1ならばa_n＞２Nとなる。ということで，これがちょうど無限大という定義を表します。

（質問者）　先程そこに実数の列と書かれましたが，整数ではだめですか。

（児玉）　もちろん，整数も実数です。例えば－２，－１，０，１，２・・・という意味でしょうか？

（質問者）　整数というとある幅を持っていて，実数というと幅を持たない位置だけを示すものだと思っていたのですが，違いますか。

（児玉）　１，２，３，・・・が自然数の全体で，普通はN＝｛１，２，・・・｝という記号で表します。このNに属する数に加法と，その逆算法である減法をほどこして得られる数の集合が，Z＝｛・・・，－２，－１，０，１，２，・・・｝であり，整数の全体になってきます。ですから，もちろん整数は実数です。

今度はZの中で，０だけを抜いて，わり算，かけ算と四則演算を全部入れて出来上がるものが，有理数の全体で，Q＝｛$\dfrac{\mathrm{n}}{\mathrm{m}}$ ｜ n，m∈Z｝で表します。Qだけだと数直線に無数の穴があきますので，さらに無理数全部をつけ加えて数値線Rが完成します。

今度はこれだけでは数学的にまだ足りなくて，複素数というものを考えて，複素数全体の集合をコンプレックスナンバー（Complex number）の頭の字をとってCと書きます。今，考えている我々の数列$\{a_n\}$は全部Rの中で考えています。

さて，数列が与えられるとそれに対して級数というものが定義されます。何でもいいから，$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$を与えます。$\sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty} a_n$は単なる記号で，$a_1+a_2+\cdots+a_n+\cdots$というただ$a_n$を並べて和をとるという全くの形式的な和です。これは今の段階では何の意味もありません。このように書いたものを，この与えられた数列$\{a_n\}$に対する級数といいます。

今度はこれに意味を持たせます。そのために$a_1+a_2+\cdots+a_n+\cdots$は和を書いただけの単なる記号で，この段階では何の意味もありませんが，a_1からa_nまでのｎ個の和を考え，$a_1+a_2+\cdots+a_n=s_n$と置きます。そうするとs_nは実数ですから意味をもちます。s_nを与えられた級数$\sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty} a_n$の第ｎ部分和といいます。

そうすると，ここで級数の収束・発散の定義が出来るわけです。与えられた$\sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty} a_n$に対して，その第ｎ部分和のなす列$\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$が収束する場合に，級数$\sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty} a_n$は収束するといいま

す。そして，$\lim_{n\to\infty} s_n$ ＝Ａとするとき，この級数の和はＡに収束する，または級数の和はＡであるといいます。この場合，記号では $\sum_{n-1}^{\infty} a_n$ ＝Ａと書きます。収束しない級数 $\sum_{n-1}^{\infty} a_n$ は発散するといいます。

あとで大事になってくるのは，級数が無限大に発散するという場合で，$\lim_{n\to\infty} s_n$ ＝∞（－∞）のとき，$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ＝∞（－∞）と書きます。

$\sum_{n-1}^{\infty} a_n$ が収束するならば，$\lim_{n\to\infty} a_n$ ＝０です。先程，証明はほとんどやらないと言いましたが，簡単なのでこの証明をしましょう。

収束するということは，第ｎ部分和のなす列 $\{s_n\}$ がある確定した実数Ａに収束するわけです。そうすると，a_n は何かというと，この級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ の第ｎ部分和から１つ手前の第（ｎ－１）部分和 s_{n-1} を引いてやればいいのですから，$a_n = s_n - s_{n-1}$ です。ところが，s_n はＡに収束するので s_{n-1} もＡに収束します。したがって，$a_n = s_n - \boxed{s_{n-1}} \to A - \boxed{A} = 0$ となります。

大事なのは，この逆が成り立たないということです。一般に $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束すれば，一般項 a_n はｎとともにどんどん０にいきますが，逆は成り立ちません。a_n がどんどんｎとともに０に近づいていったからといって，$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束するとはかぎりません。

いくつかの級数の例を考えてみましょう。まず，級数 $\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1}$ は｜ｘ｜＜１となる実数ｘに対して収束して，その和がきちんと求まって，$\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = \frac{1}{1-x}$ です。証明は簡単なのでここでやっておきましょう。この級数の第ｎ部分は s_n ＝１＋ｘ＋・・・＋x^{n-1} となっています。そこで両辺にｘをかける。

s_n ＝１＋ｘ＋・・・＋x^{n-1}

$x\,s_n = x + \cdots + x^{n-1} + x^n$

上の式から下の式を引くと，$(1-x)s_n = 1 - x^n$ となります。$1-x$ は０ではないので，両辺を（$1-x$）で割って，$s_n = \frac{1-x^n}{1-x} \xrightarrow[(n\to\infty)]{} \frac{1}{1-x}$ となります。なぜなら，x^n の x は $|x|<1$ という条件を満たしているから，x^n の n をどんどん大きくしてやると，$x^n \to 0$ となるからです。したがって，定義により $\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = \frac{1}{1-x}$ となります。

それから２番目の例として，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$ はどうなっているのでしょうか。収束するのでしょうか，発散するのでしょうか。これは先程の a_n のところが $\frac{1}{n}$ で，n が大きくなるに従って０にいくようになっています。この級数の収束・発散はどうでしょうか。また，$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$ はどうでしょうか。$n=1$ の場合 $(-1)^0$ が出てきますが，一般に a という数が与えられたとき，$a^0 = 1$ と約束します。

そこで，$\sum_{n-1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$ は収束するのでしょうか，それとも発散するのでしょうか。実は，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$ は発散します。また，$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$ は収束します。収束するということは和があるということですが，その和は $\log 2$ になります。

今日は級数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$ に着目します。これはものすごく個性的でおもしろい級数です。すべての n に対して $a_n \geqq 0$ とするとき，$\sum_{n-1}^{\infty}(-1)^{n-1} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots$ のように，和に＋と－が交互に出てくる級数を考える。$a_n \geq 0$ とここに０が入ってもいいとしていますが，必要ならば０の項は飛ばして，もう１度インデックスをつけ直したら，本質的にはこれはプラスだけで十分です。そうすると，ここでやっているのは正の項と負の項が交互に繰り返すかたちの級数です。こういうかたちをしているものを交代級数，あるいは交項級数といいます。

このような交項級数に関しては，ライプニッツ（Leibniz）の定理というのがあります。これを証明することは時間の関係でやりませんが，どういうものかというと，交項級数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ は，次の２つの仮定を満たすとする：

（１） $a_1 \geqq a_2 \geqq \cdots \geqq a_n \geqq a_{n+1} \geqq \cdots$。こういう数列 $\{a_n\}$ を単調減少列といい，番号とともにだんだん小さくなっていき，単調に減少していきます。まず，これが１つの条件です。

（２） ｎとともに，a_n が０に近づく。ｎをどんどん大きくする（ｎ→∞）と，a_n はどんどん０に近づく。

こういう２つの条件が成り立てば $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots$ は収束するということが証明できます。

このことは，テクニカルなことですが偶数番目までの部分和 s_{2n} のなす数列 $\{s_{2n}\}$ と，奇数番組目までの部分和のなす数列 $\{s_{2n-1}\}$ がともに収束することと，$a_n \to 0$ （ｎ→∞）であることを用いて証明できます。ここでは，この定理が成り立っているとします。

そうするとただちにこのライプニッツの定理から，級数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$ を見て，$\frac{1}{n}$ を a_n と置いてやると，$a_1 \geqq a_2 \geqq \cdots \geqq a_n \geqq a_{n+1} \geqq \cdots$ であるから，上の条件（１）を満たしている。さらに，a_n の値はｎを大きくするとどんどん０に近くなります。つまり（２）を満たしています。ですから，このライプニッツの定理からただちに，$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$ は収束します。これで $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$ が収束することがわかりました。

では，２番目の級数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$ はどうなるでしょうか。発散すると書きましたが，それをやってみましょう。２ｎ－１よりも２ｎの方が大きいわけですから，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1} \geqq \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ となります。従って，$\sum_{n-1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}$ も，$\sum_{n-1}^{\infty}\frac{1}{2n}$ も∞に発散します。

そこで$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$がどうして発散するかを直接証明しましょう。

まず，$2=2^1$，$4=2^2$，$8=2^3$というように２のｎ乗という部分に注目していきます。

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=1+\overbrace{\frac{1}{2}}+\overbrace{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}}^{2^1\text{個}}+\overbrace{\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}}^{2^2\text{個}}+\cdots+\frac{1}{2^k}$$

$$+\overbrace{\frac{1}{2^k+1}+\cdots\cdot+\frac{1}{2^k+2^k}}^{2^k\text{個}}+\frac{1}{2^{k+1}+1}+\cdots,\quad 2^k+2^k=2^{k+1}$$

今，考えているのは上のような級数です。そこで区切ったところに何個あるかということで，２の何乗かに注目します。今度は区切ったところの最後の項を見ます。┌┐で囲んだ中だけを見ると，手前にあるものよりも後ろの方が（分母が大きくなっているから）小さくなっています。ですから，各分割された一つ一つの区切りの中のすべての数を最後の項で置き換えてやると，

$\displaystyle\sum_{n-1}^{\infty}\frac{1}{n}\geq 1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2^2}\times 2\right)+\left(\frac{1}{2^3}\times 2^2\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2^{k+1}}\times 2^k\right)+\cdots$となります。

これから，明らかに$\displaystyle 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2}+\cdots=\infty$となります。

そこで無限級数のふしぎなことがこれから出てきます。まず，条件収束とは何かということから始めます。そのために$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$という与えられた級数を考えます。これに対して，一般項を絶対値で置き換えたもの$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$を考えます。そこで，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$が収束するとき，この与えられた元の級数$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$は絶対収束するといいます。また，絶対収束しない収束級数を条件収束する級数といいます。上において，$\displaystyle\sum_{n-1}^{\infty}\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\cdot+\frac{1}{n}+\cdots\cdot$は発散し，$\displaystyle\sum_{n-1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots$は収束すると言いました。$\displaystyle\sum_{n-1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$ $\displaystyle=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots$の一般項の絶対値をとってしまうと，$\displaystyle\sum_{n-1}^{\infty}\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots$ $\displaystyle+\frac{1}{n}+\cdots$になり発散します。ですから，$\displaystyle\sum_{n-1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$ は条件収束する級数の典型的なものになっています。

この条件収束級数と絶対収束級数に対しては，全く違う現象が起きます。たとえば，次のようなことが知られています。

（１）　絶対収束する級数は収束する。

（２）　絶対収束する級数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$の項の順序を任意に入れかえてできる級数$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$は収束し，しかも，その和は変わらない。

どういうことかというと，今，絶対収束する級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$$

が与えられたとします。これに対して，この項の順序を任意に変える，例えば，

$a_2 + a_1 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$と項を入れ替えたものを

$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_n + \cdots$とします。このような入れ替えを考えた場合に，$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$もはもとの級数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$と同じ数に収束する。これは我々の実生活では大体，有限個しか考えないので，$a_1 + a_2 + \cdots + a_n$という有限個の和を考えた場合には，和はいくら順序を入れ替えても同じ和になります。$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$が絶対収束する級数だと，和の順序に関しては有限の世界と同じことが起こっているといえます。

ところが，ここが実にふしぎなところで，条件収束の場合になるとがらりと変わってしまいます。これが今日一番言いたかったことですが，条件収束する級数に対しては以下のようなふしぎなことが知られているのである（ディリクレ，リーマンの結果）：条件収束する級数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$を何でもよいから１つ考えます。そうして，任意に実数Ｂを与えます。このとき，$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$の項の順序をうまく入れ替えて作った級数$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$がＢに収束するようにできる。こういうことをディリクレ（Dirichlet）が 1829 年に，条件収束級数$\sum_{n-1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$を例にとって言ったのである（証明は，高木貞治：「解析概論」，Ｐ．１４５参照）。

これを私が大学２年の講義で初めて知って，本当に驚いたものです。というのは，ここで言ったように絶対収束する級数はいくら頑張って項を入れ替えても，同じ和しか出てこないのです。ところが，条件収束する級数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$を何でもよいから１つとって，実数Ｂを

自分が勝手に思った何でもよい数，例えば 5000 とする。このとき，$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ の項を適当に入れ替えて新しく級数を作って，その和が 5000 になるように出来る。一方，例えばＢとして－100 を与えると,それに対してまたうまく入れ替えて作った級数は－100 に収束するように出来る。どのような数にでも収束するようにできるという。これを見たときに，ものすごくびっくりしたのです。どうして，こういう条件収束するものと，絶対収束するものがこんなにも違うのかということに本当にびっくりしました。

何だこれだけかと思われますが，その１つの級数に隠された本質的な部分が何かということで，実はこの無限級数を考える場合には項の順序がものすごく大事だということは，コーシー（Cauchy）という人が 1820 年ごろに言いました。それを具体的にディリクレが上の級数について示したわけです。

このように本質が隠れていて，一見，それまではそういう順序を変えてやれば意味がなくなるということをだれも言っていなかったわけです。しかし，それはある意味ではものすごくあいまいな議論をずっとやっていたわけで，そういうことにきちんと着目して，解析学の基礎を築いているわけです。そういう意味では,こういうたった１つの級数ですが,その奥にある本質的なところをきちんと見抜くというのは，ものすごい天才で，普通の人にはなかなかできないことだと思うのです。

我々は別にこういうことばかりをやっているわけではありません。普通の高校生は数学はみんなわかったことばかりで，何の問題も残ってはいないように思っているかも知れません。実際私も高校のころまでは，数学の理論はすべて完成されており，授業で先生はそれらのことを解説しているのであり，もはや数学では何もやることはないのではないかと思っていました。しかし，実際はどうしてこんなこともわからないのかということがたくさんあります。そういう意味では，例えばこういう本質的なところを自分で１つでも見つけることができれば幸いだと思ってやっています。

（司会）　ありがとうございました。両手を縛られてご飯を食べているような状態で大変に苦労して話をされていました。今のことやほかの数学一般でも構いませんから，何かお聞きしたいことがあれば。また，先程言いましたように 10 月 27 日から公開講座があり，このような話をしていただくことになると思いますので，何かありませんか。

僕らは自然科学をやるときに自然対数の底 e を使っていますが,環境のことを解析するのにこれを使わないと全然できないのです。毎日のようにこれを使っていますが，どうやってこれを見つけてくれたのか，そんなことを知らずに使わせてもらっていて，大変ありがたいと思っています。

（児玉）　例えば今，経済の方でいろいろと，確率解析の確率微分方程式を使って，金融

商品をいろいろ開発しています。その理論を確立した伊藤先生本人が，どうして全く純粋の理論でやったものが，何十年後かにこういうところで世の中に大きな影響を与えているのかわからないと，びっくりしているとのことです。あるいはまた，暗号理論などは，現代社会においてはなくてはならない重要なものになっていますが，それも代数学で開発された理論がなければ全然できなかった理論です。代数学の研究者達がそういうことを目指してやっていたわけではなく，全くの知的好奇心でやって得られた研究成果が，現在の世の中ではなくてはならないものになっていることが，歴史的な事実なのです。今やっているのは何の意味もないのではないかと言われると困るのですが，要するに数学をやっている人が世界中に何万人いるかはわかりませんが，そういう人たちがやった研究成果がいつかは絶対に役に立つのだということしか言えません。

（質問者）　高校の教論ですが，生徒に話をする場合に，問題そのものがよりわかりやすくて，まだ解けていないという問題を紹介する場合に，何か良い適当な問題はありませんか。もし，ありましたら教えていただきたいのですが。

（児玉）　そういう残っている問題は，先人が頑張ってもまだ解決されずに残っているわけですから，たやすくはできません。しかし，例えば身近な問題でもいいですが，高校生だったら高校生のレベルでも解ける問題，受験問題でもいいですが，とにかく発見の喜びを与えるような問題を出したらどうでしょうか。例えば先生が考えて，どうしてこうなっているのか僕もわからない，何かいいアイディアはないかとか。そのような感じでチャレンジさせる方向がいいのではないかと思います。

ですから，私は自分でわからないときには大学院の学生や，ここ金沢大学だけではなく，いろいろな会合などに参加している学生とか，若い人になるべく問題を与えています。

例えば問題はわかるけれども，どうしてやればいいかわからない，本当に難しいですよね。そういうものがあるということを言ってもいいと思いますが，例えばそういうものに足を突っ込んで，一生を棒に振った人はいくらでもいますから，難しいですね。

（質問者）　例えば０があって，こうなって，ここが１だとします。するとここに例えば0.2というのがあるとします。例えば0.1なら，これだけの幅が0.1ということになって，次に0.2がこれだけの幅になり，0.3がこれだけの幅になります。すると，この辺にいくと必ず誤差ができます。これを小さくしていけばいくほど誤差が小さくなりますが，誤差は出ます。０にはならないでしょう。そうすると，我々が表そうとすると苦労するのです。この誤差が常にここにつきまとっているわけで，その誤差がこういうものにどのように影響しているのでしょうか。

（児玉）　今，話されたことは，例えば$\left\{\frac{1}{n}\right\}$という数列があると，これはどんなｎを取っても，絶対に０にはなりません。ｎ→∞の極限をとって初めて０になります。どこかのｎをとっても絶対にそのようにはならないという感じのことを言っておられるのでしょうか？

例えば級数，無限を扱うと我々はとにかく極限操作を持ち出さなければなりません。それで例えば，これが実数Ａに収束した場合に，この級数の和はわからなくてもいい。これに 10 万分の１ぐらいの誤差があってもかまわないとか，これのどこかまでで切れば，こちらの残りの方はこの範囲に収まるとか，そういうことはあります。ここで切ってしまうと，これは有限の世界になるので，あとは例えばコンピュータで何かいろいろできるわけです。そういうことはありますが，直接，今のこととは関係がないです。これは無限大までいかないときちんとした値は出てきません。

（質問者）　0.9999・・・と無限に続くのと１は誤差があって，＝で結ばれるということになりかねないと思っているのですが。

（児玉）　そういうものは無限級数です。例えば 10 進数で書いた場合ですが，１を 0.9999・・・と表す方法と，１と表す方法と２通りあります。１通りの表し方をしたかったら，例えば有限小数もすべて無限小数で表すものとするとかと約束しないといけません。

（司会）　公開講座は先生方のお話があって，それからそういう質問もいろいろしていただくことができると思います。余席がたくさんまだ残っていますから，また受講していただければありがたいと思います。

（児玉）　参考資料として，おもしろい書籍があります。高木貞治さんの『近世数学史談』（共立出版）に，ライプニッツ，コーシー，ガウス（Gauss）などについていろいろと書いてあります。例えば先程のライプニッツは 12 歳のころに，おこづかいで数学の本を買ってきて，母親にこんな難しいものはわからないだろうと言われたそうです。しかし，自分はわかるまで読むのだといって頑張ったとか，いろいろとおもしろいことが書いてあります。

（司会）　そこに 1829 年と年号がありますが，あと 38 年すれば明治時代になる江戸の末期で，たぶん十返舎一九が『東海道膝栗毛』を書いたころではないかと思います。そういう時代にこういう数学が一方であって，いろいろな見方をするとおもしろいのではないかと思います。

それでは今日の数学ミニ講演はこれで終わりにします。

本当に今日はありがとうございました。これで終わりにいたします。