——解　　説——

FŌRTRANプログラミングの留意点（その1）

センター　　車　古　正　樹

1．誤差について

電子計算機の数字として実数型の場合，6.3〜7.2桁の有効数字を持つことができるが，丸めの誤差（計算機の記憶できる有効数字が有限であること）を有している。これはフォートランプログラムを作成するとき，充分に考慮しなければならない。これを例題と問いで誤差の伝播とその実際例を示してみよう。

例．1　xを0.0〜10.0まで，0.1刻みで変化させよ。

解1

```
      X =0.0
   10 CŌNTINUE
      :
      X =X +0.1
      IF(X. LE. 10.0) GŌ TŌ 10
```

解2

```
      DŌ 10 I=1, 101
      X=0.1*FLŌAT(I-1)
      :
   10 CŌNTINUE
```

例．2　$y=x^3+2.0x^2+x-5.1$をプログラミングせよ。

解1　Y=X**3 +2.0*X**2 +X −5.1

解2　Y= ((X+2.0) *X +1.0)*X−5.1

例1では全く同様な計算がなされるように思われるが，10進法で行なった場合は，確かに同じになるが，最近の計算機は全てといっていい程，2，8又は16進法で計算が行なわれている。このため2進法の場合，$0.1_{(10)}=0.0001100110011\cdots\cdots_{(2)}$となり，計算機では必要な桁数で打ち切る。よって丸めの誤差が現われるので解．1のようにすべきである。

又例2では，解．1の方が演算回数が解．2に比べて少ない。このようにすると誤差が少なくなる。これは下記の2問によってわかる。

加算　$$\gamma_{x+y}=\gamma_x\frac{x}{x+y}+\gamma_y\frac{y}{x+y}+\alpha$$

減算　$$\gamma_{x-y}=\gamma_x\frac{x}{x-y}+\gamma_y\frac{-y}{x-y}+\sigma$$

乗算　$$\gamma_{xy}=\gamma_x\cdot 1+\gamma_y\cdot 1+\mu$$

除算　$$\gamma_{x/y}=\gamma_x\cdot 1+\gamma_y(-1)+\delta$$

左辺は演算によって生じる相対誤差，r_x，γ_yはx，yの相対誤差，α，σ，μ，δは演算によって生ずる相対丸め誤差である。これを次の2つの問題で解いてみよう。

問1）　等差数列$\{t_k+a+kh\}$においてh が固有の相対誤差γを持っているとし，3項までを次の2つで計算したときの誤差を求めよ。

（a）　$t_k = a + kh$

khによる誤差

$$\gamma_1' = 0.1 + h\gamma + \mu$$

$t_3 = a + k \cdot h\gamma'$ による誤差

$$\gamma_a = 0 \times \frac{a}{a+3h} + \gamma_1' \frac{h}{a+3h} + \alpha$$

$$= \frac{(\gamma+\mu) \cdot 3h + \alpha(a+3h)}{a+3h}$$

$\alpha_C \fallingdotseq \alpha \fallingdotseq \mu$ とおけるから

$$\gamma_a = \frac{3h\gamma + \alpha_c(6h+a)}{a+3h}$$

（b）　$t_k = t_{k-1} + h$, $t_0 = a$

1回目の誤差

$$r_1 = 0 + \frac{a}{a+h} + r\frac{h}{a+h} + \alpha_1 = \frac{rh + \alpha_1(a+h)}{a+h}$$

2回目の誤差

$$r_2 = r_1\frac{a+h}{a+2h} + r\frac{h}{a+2h} + \alpha_2 = \frac{2rh + \alpha_1(a+h) + \alpha_2(a+2h)}{a+2h}$$

3回目の誤差

$$r_3 = r_2\frac{a+2h}{a+3h} + r\frac{h}{a+3h} + \alpha_3 = \frac{3rh + \alpha_1(a+h) + \alpha_2(a+2h) + \alpha_3(a+3h)}{a+3h}$$

$\alpha_C \fallingdotseq \alpha_1 \fallingdotseq \alpha_2 \fallingdotseq \alpha_3$　とおけるから

$$\gamma_b = \frac{3h\gamma + \alpha_c(3a+6h)}{a+3h}$$

よって

$$\gamma_b - \gamma_a = \frac{2a}{a+3h}\alpha_c > 0$$ となり，（b）の方が誤差が多い。

問２）次の３次多項式 $y = a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3$ を次の２つについて誤差計算せよ。

（但し各係数と変数に誤差はないものとする。）

a) $y=((a_0x+a_1)x+a_2)x+a_3$　　　　b) $y=a_0\cdot x\cdot x\cdot x+a_1x\cdot x+a_2\cdot x+a_3$

$$\gamma_a=\left(\left(\left\{[(0.1+0.1+\mu_1)\frac{a_0x}{a_0x+a_1}+0\times\frac{a_1}{a_0x+a_1}+\alpha_1]\times 1+0.1+\mu_2\right\}\frac{a_0x^2+a_1x}{a_0x^2+a_1x+a_2}+\right.\right.$$

$$\left.\left.0\times\frac{a_2}{a_0x^2+a_1x+a_2}+\alpha_2\right)\times 1+0.1+\mu_3\right)\frac{a_0x^3+a_1x^2+a_2x}{a_0x^3+a_1x^2+a_2x+a_3}+0\times\frac{a_3}{a_0x^3+a_1x^2+a_2x+a_3}+\alpha_3$$

$$=\frac{a_0x^3(\mu_1+\alpha_1+\mu_2+\alpha_2+\mu_3+\alpha_3)+a_1x_2(\alpha_1+\mu_2+\alpha_2+\mu_3+\alpha_3)+a_2x(\alpha_2+\mu_3+\alpha_3)+a_3\alpha_3}{a_0x^3+a_1x^2+a_2x+a_3}$$

$$\gamma_b=\left(\left(\left(((0.1+0.1+\mu_1)+0.1+\mu_2)+0.1+\mu_3\right)\frac{a_0x^3}{a_0x^3+a_1x^2}+((0.1+0.1+\mu_4)+0.1+\mu_5)\right.\right.$$

$$\left.\left.\times\frac{a_1x^2}{a_0x^3+a_1x^2}\right)+\alpha_1\right)\frac{a_0x^3+a_1x^2}{a_0x^3+a_1x^2+a_2x}+(0.1+0.1+\mu_6)\frac{a_2x}{a_0x^3+a_1x^2+a_2x}+\alpha_2)$$

$$\frac{a_0x^3+a_1x^2+a_2x}{a_0x^3+a_1x^2+a_2x+a^3}+0\times\frac{a_3}{a_0x^3+a_1x^2+a_2x+a_3}+\alpha_3=\frac{a_0x^3(\mu_1+\mu_2+\mu_3+\mu_4+\mu_5+\alpha_1+}{}$$

$$\frac{+\mu_6+\alpha_2+\alpha_3)+a_1x^2(\mu_4+\mu_5+\alpha_1+\mu_6+\alpha_2+\alpha_3)+a_2x(\mu_6+\alpha_2+\alpha_3)+a_3\alpha_3}{a_0x^3+a_1x^2+a_2x+a_3}$$

a), b) の計算において共に丸め誤差の大きさがほぼ等しいとしたならば，$\gamma_b>\gamma_a$となる。この２問よりわかるように，この誤差は演算回数の差となってあらわれている。このことからプログラムを組むときの留意点として誤差を考慮するというより，むしろ演算回数を少なくするように心がければよい。すなわち計算機に計算をさせるというより，自分で計算するかのようにプログラミングをすべきである。これは数倍～数百倍の時間短縮にもつながるであろう。時間短縮の１例として金沢大学計算機センター Vol．3 No.1，（14ページ）を参照して下さい。最後に実際に計算機にかけた次のプログラムと結果をかかげておく。

参考文献：「計算機のための数値計算法概論」

```
FACOM 230-25/35   BOS FORTRAN   -721004- 0015-02            73.09.21    PAGE   1

    *** SOURCE LIST ***

ISN         STATEMENT

      C   GOSA NO TAMESHISAN
              DIMENSION A(5)
              PAIH=0.314159E-3
              PAI2=0.0
              DO 10 I=1,10000
              PAI1=PAIH*FLOAT(I)
       10     PAI2=PAI2+PAIH
              X=31.457
              A(1)=2.12356
              A(2)=3.55336
              A(3)=15.4216
              A(4)=9.52631
              A(5)=110.135
              Y1=(((A(1)*X+A(2))*X+A(3))*X+A(4))*X+A(5)
              Y2=A(1)*X**4+A(2)*X**3+A(3)*X**2+A(4)*X+A(5)
              WRITE(6,600) PAI1,PAI2,Y1,Y2
      600     FORMAT(1H0,5X,3H1-A,F12.7,5X,3H1-B,F12.7/1H0,5X,
             13H2-A,F12.2,5X,3H2-B,F12.2)
              STOP
              END
```

```
  1-A    3.1415860      1-B    3.1387350

  2-A  2205651.00       2-B  2205652.00
```

——I／Oチャネル——

私と計算機センター

期せずしてコンピュータに接するようになった。コンピュータというものを全く知らないずぶのしろうとがコンピュータの操作からプログラミングまで一通りしなければならなくなった。始めはセンターの受付兼雑役としてコンピュータは私には全くかかわりあいのないものとおもっていたのである。しかしそのうちにしだいにそうでないことがわかってきた。受付は単にカードの出し入れの場ではなく，エラーの質問場所でもあったのです。次々とやってくる質問に私はただうろたえるばかりで常に他のセンター員の手をわずらわせたものです。これではいけないと，センター員全員何でもできるようにと私もほんのすこしコンピュータをかいまみることができたのです。全く関係のない分野からきている私は時間外まで利用しプログラミングの指導を受けました。特に数学的なことが嫌いな私は，わかったのか，わからないのかさっぱりの表情で黒板をにらめっこした日が何度もありいやになることもしばしばでした。でも何日もかかって一つのプログラムを作り計算機にかけたときは，たとえエラーであろうが，印字された自分のプログラムを手に感激したものでした。今，私の後につづく新人達も同じような体験をしているかどうかはわからない。しかし計算機とたった２年間だけのつきあいだったけど，この経験は，これからもほんの少しであろうが何らかの形でいかされそうです。計算機センターに勤められたことを本当にうれしくおもっております。　（Ｒ．Ｔ）