——研究論文——

非線形問題への伝達マトリックス法の適用

工学部　佐　藤　秀　紀

1. まえがき

伝達マトリックス（transfer matrix）の概念は，空間的あるいは時間的なシステムに入力される状態量をシステムの特性に従って出力の状態量に変換する一種の変換マトリックスであるということができる。一般に，機械工学あるいは土木工学などで用いられる伝達マトリックス法[1]は，空間的なシステムである構造物の定常振動あるいは静的変形などの解析をその対象とし，主に一次元的広がりをもつシステムに適用される。例えば，曲げを受けるはり要素を考えると，その右端と左端が入力端と出力端になり，状態量としてははりのたわみ，傾き，曲げモーメント，せん断力がとられる。システムが多くの線形要素からなる一次元的広がりをもつものであるとすると，各要素の伝達マトリックスを順次掛け合せることによりシステムの左端と右端の境界における状態量が一つの伝達マトリックスで関係づけられることになる。これに，既知の境界の状態量を代入すれば未知の境界における状態量が求まる。境界の状態量が全て明らかになれば，今度は各要素の伝達マトリックスを順次それに掛けていくことにより内部の状態量が全て求まることになる。固有振動数を求める場合は境界状態量間の同次式が成立する条件を用いることにより振動数を求める式が得られる。

このように，主に伝達マトリックス法は線形問題に対して適用されてきた手法である。ここでは，これをはりの非線形振動問題に適用してみた例について述べる。

2. 段付はりの非線形自由振動解析[2]

図１のように，両端ではりの軸方向移動が拘束された段付はりが曲げ振動を行う場合，はりが曲がることにより軸長が伸びてはりに軸方向引張力が生ずる。その結果，はりは振幅によって異なる軸力を受けることになり，はりのたわみと荷重の関係は線形性からはずれ，非線形性をもつようになる。振幅が小さい間はこれらの影響は小さく無視できる程度であるが，ある程度大きい振幅になると固有振動数，振動の形に影響を及ぼし，これらは振幅によって異なる値をもつことになる。また，強制的な振動では線形系にはみられない現象が現われる。

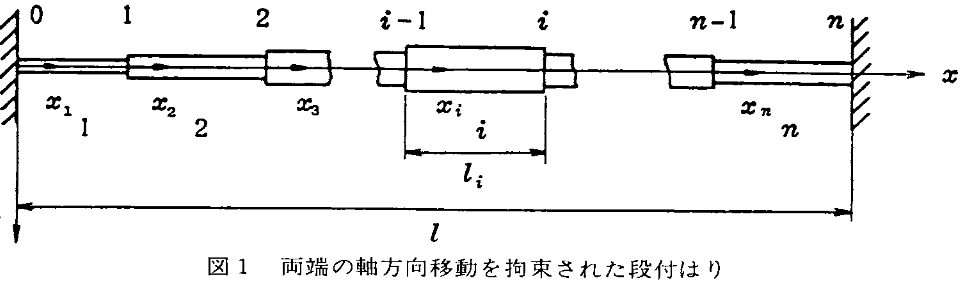

図１　両端の軸方向移動を拘束された段付はり

はりがたわむことによって生ずる軸力は，たわみがそれほど大きくない場合は軸方向に沿って一様であり，軸の伸びに対する抵抗から計算されるとしてもそれほど誤差はないと考え

られる。軸力Nを受ける i 番目のはり要素の曲げ自由振動に関する運動方程式は次式で与えられる。

$$EI_i\,\partial^4 W_i/\partial x_i^4 - N\partial^2 W_i/\partial x_i^2 + \rho A_i\,\partial^2 W_i/\partial t^2 = 0 \tag{1}$$

ここで，W_i ははりのたわみ，x_i は軸方向座標，EI_i は曲げ剛性，ρA_i は単位長さ当りの質量，t は時間である。また軸力Nは前述の仮定により次式で表わされる。

$$N=\frac{k}{2}\sum_{i=1}^{n}\int_0^{l_i}\left(\frac{\partial W_i}{\partial x_i}\right)^2 dx_i,\qquad \frac{1}{k}=\sum_{i=1}^{n}\frac{l_i}{EA_i} \tag{2，3}$$

式(2)を考えると式(1)は非線形の方程式となり，正確には解かれない。ここでは，はりが時間に関して正弦的に角振動数 ω で変動するという仮定（このような型の非線形微分方程式の研究から，振幅が極端に大きくなければこの仮定が妥当であることが示されている[3]）をおいて，解を次式のようにおく，

$$W_i(x_i,t)=W_i(x_i)\cos\omega t \tag{4}$$

ここで，$W_i(x_i)$ははりの振動形を表わす未知関数である。式(4)を式(1)に代入し，式(4)の仮定の範囲で $W_i(x_i)$が満足する方程式を求めると次式のようになる（調和バランス法)。

$$d^4 W_i/d\xi_i^4 - \tau_i d^2 W_i/d\xi_i^2 - \beta_i^4 W_i = 0 \tag{5}$$

ここに

$$\xi_i=x_i/l_i,\qquad \tau_i=l_i^2\,\overline{N}/EI_i,\qquad \beta_i^4=(\rho A_i l_i^4/EI_i)\omega^2 \tag{6}$$

$$\overline{N}=\frac{3}{8}k\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{l_i}\int_0^1\left(\frac{dW_i}{d\xi_i}\right)^2 d\xi_i \tag{7}$$

式(5)の非線形微分方程式によって支配される n 個の要素からなる系の固有振動数 ω および振動形 $W_i(x_i)$を求めるために，次のような伝達マトリックス法を利用した解法を考える。

いま，$\overline{N}$が与えられたとすると式(5)は線形方程式となり次式のような解をもつ。

$$W_i(\xi_i)=C_{i1}\cosh\lambda_{i1}\xi_i + C_{i2}\sinh\lambda_{i1}\xi_i + C_{i3}\cos\lambda_{i2}\xi_i + C_{i4}\sin\lambda_{i2}\xi_i \tag{8}$$

ここに

$$\lambda_{i1},\ \lambda_{i2}=\sqrt{\sqrt{\frac{1}{4}\tau_i^2+\beta_i^4}\pm\frac{1}{2}\tau_i} \tag{9}$$

式(8)のような一般解が求まればこれを用いてはり要素の両端の状態量 $\boldsymbol{z}_{i-1}$，$\boldsymbol{z}_i$ を結び付ける伝達マトリックス $\boldsymbol{U}_i$ を求めることができる。これらのことから，式(4)～(7)を満足する解を次のような手順で求める。先ず，任意の節点 p の振動 a を設定する。$\overline{N}$を仮定（０でもよい）して通常の伝達マトリックス法を適用し，はり両端の境界条件から固有振動数 ω を求める。これを用いて各要素のたわみ $W_i(\xi)$を求め，式(7)より軸力$\overline{N}$を計算する。この改良された軸力を用いて再び固有振動数の計算を行う。これを軸力の値が収束するまで繰り返す。図

2に計算の流れを示す。従来，この種の問題に対する解法としては振動形を線形のものを用いるガレルキン法がよく用いられてきた。しかしその場合には振動形に及ぼす軸力の影響を考慮することができないため，段付はりのような形状では非線形性を過大評価する傾向があることが計算の結果明らかになった。自由振動における振幅・振動数関係の計算結果の一例を図3に示す。

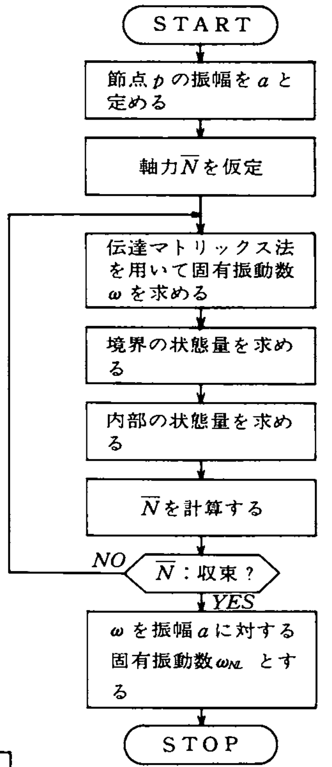

図2　はりの非線形自由振動応答を求める計算の流れ

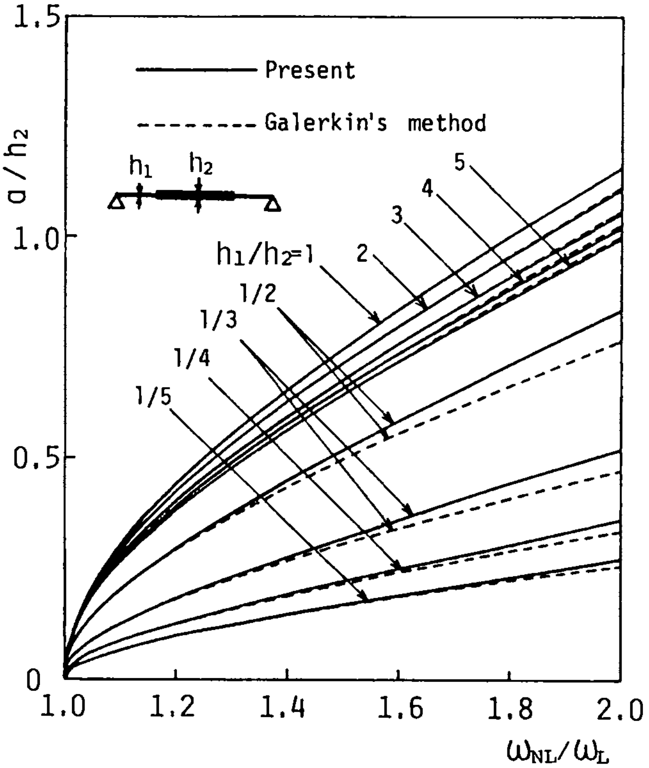

図3　単純支持対称段付はりの中央点における振幅・振動数特性。ω_{NL}＝非線形振動数，ω_L＝線形振動数，　a＝振幅。

3. 重力を受けるはりの非線形自由振動解析[4]

このような手法は，また重力のような一定荷重が作用する場合の問題にも拡張して適用できる。いま重力の加速度をgとすると次のような方程式が成り立つ。

$$EI_i\,\partial^4 W_i/\partial x_i^4 - N\,\partial^2 W_i/\partial x_i^2 + \rho A_i(\partial^2 W_i/\partial x_i^2 - g) = 0 \qquad (10)$$

ここでNは式(2)で同様に与えられる。この場合の解は平均的たわみ項と正弦的変動項とによって次式のように表わす。

$$W_i(x_i,\ t) = W_{oi}(x_i) + W_i(x_i)\cos\omega t \qquad (11)$$

式(11)を式(10)に代入し，式(11)の近似の範囲で $W_{oi}(x_i)$, $W_i(x_i)$が満足する式を求めると次式が得られる。

$$d^4 W_{oi}/d\xi_i^4 - \tau_{oi} d^2 W_{oi}/d\xi_i^2 = \delta_i + \tau_{ci} d^2 W_i/d\xi_i^2 \qquad (12)$$

$$d^4 W_i/d\xi_i^4 - \tau_i d^2 W_i/d\xi_i^2 - \beta_i^4 W_i = 2\tau_{ci} d^2 W_{oi}/d\xi_i^2 \qquad (13)$$

ここで

$$\left.\begin{aligned}
&\tau_{oi} = l_i^2 k(e_o + e/2)/EI_i, \quad \tau_i = l_i^2 k(e_o + 3e/4)/EI_i, \quad \tau_{ci} = l_i^2 k e_c/EI_i \\
&e_o = <(dW_{oi}/d\xi_i)^2>, \quad e = <(dW_i/d\xi_i)^2>, \quad e_c = <(dW_{oi}/d\xi_i)(dW_i/d\xi_i)> \\
&\langle f \rangle \equiv \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{l_i}\right)\int_o^1 f\,d\xi_i \\
&\delta = (\rho/E)(A_i l_i^4 g/I_i)
\end{aligned}\right\} \qquad (14)$$

式(12), (13)の連立非線形微分方程式を以下のような近似解法により解く。

いま，一つの近似解 W_{oi}, W_iを仮定すると，τ_{oi}, τ_i, τ_{ci}などは式(14)により定数となり，式(12), (13)の右辺も一つの既知関数とみなせる。このことから，各式を単独に解くことによりこれらの形式的な解が以下のような形で求まる。

$$W_{oi}(\xi_i) = W_{oih}(\xi_i) + W_{oip}(\xi_i) \qquad (15)$$

$$W_i(\xi_i) = W_{ih}(\xi_i) + W_{ip}(\xi_i) \qquad (16)$$

ここで，$W_{oip}(\xi_i)$, $W_{ih}(\xi_i)$はそれぞれ式(12), (13)の斉次方程式の解，$W_{oip}(\xi_i)$, $W_{ip}(\xi_i)$はそれらの特解に相当する。具体的な解の形はここでは省略する。式(15), (16)の形式的な一般解を用いることにより，式(12), (13)に対応する次のような形の拡張された伝達マトリックス$\overline{U}_{oi}$, $\overline{U}_i$および拡張された状態ベクトル$\overline{z}_{oi}$, $\overline{z}_i$の関係式を求めることができる。

$$\left[\begin{array}{c} z_{oi} \\ \hline 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} U_{oi} & p_{oi} \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right]\left[\begin{array}{c} z_{oi-1} \\ \hline 1 \end{array}\right] \quad \text{または} \quad \overline{z}_{oi} = \overline{U}_{oi}\,\overline{z}_{oi} \qquad (17)$$

$$\left[\begin{array}{c} z_i \\ \hline 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} U_i & p_i \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right]\left[\begin{array}{c} z_{i-1} \\ \hline 1 \end{array}\right] \quad \text{または} \quad \overline{z}_i = \overline{U}_i\,\overline{z}_i \qquad (18)$$

ここに，U_{oi}，U_iはそれぞれ軸力を受けるはりの静的たわみ及び曲げ振動に関する伝達マトリックス，p_{oi}，p_iはそれぞれ重力の影響を表わす列ベクトルである。

計算の手順としては，最初これらの伝達マトリックス関係式を用いて線形解を求め，次にそれらを用いて式(17)，(18)の関係を近似的に連立させながら解を収束させていく。計算の流れを図4に示す。

計算結果の1例を図5に示す。図には，重力の影響下では線形固有振動数より固有振動数が低下することがあることや，集中質量の影響などが示されている。

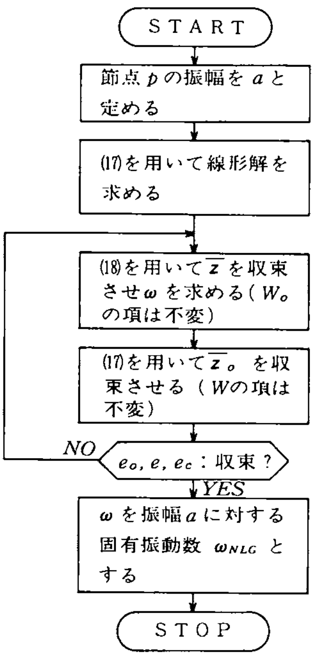

図4　重力下のはりの非線形自由振動応答を求める計算の流れ。

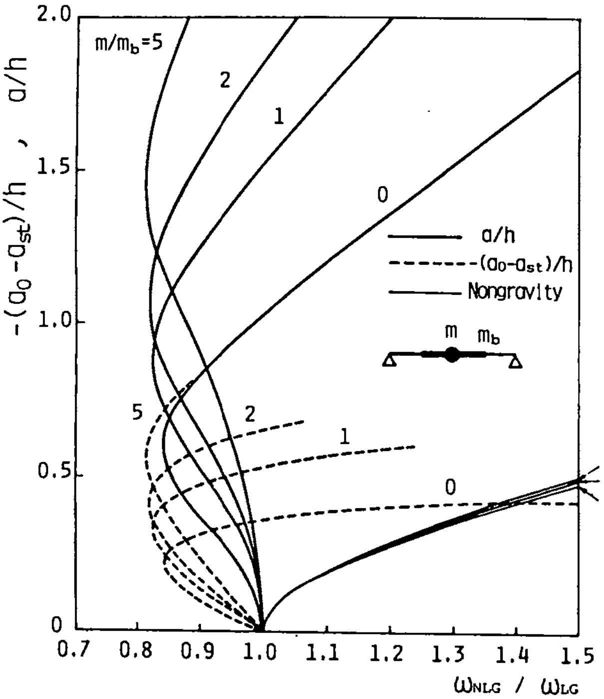

図5　中央に集中質量をもつ単純支持対称段付はりの重力下における中央点の振幅・振動数特性。ω_{NLG}＝重力下の非線形振動数，ω_{LG}＝重力下の線形振動数。m＝集中質量，m_b＝はり質量，a＝振幅，a_o-a_{st}＝静たわみからの平均たわみ，h＝基準厚さ。$l_2/l=1/2$，$h_2/h_1=3/1$

4. あとがき

本報告では，伝達マトリックス法を非線形振動問題に適用した例を示した。手法としては，非線形問題を非線形パラメータ固定の線形問題とみなして一般解を求め，伝達マトリックス法を適用して逐次近似により解を収束させるものである。一般に一次元的広がりをもつ定常的非線形問題であるならばこのような手法が適用可能であると思われる。

参　考　文　献

(1) たとえば，Pestel, E. and Leckie, F. A., *Matrix method in elasto mechanics,* (1963)，Mc Graw-Hill.

(2) Sato, H., Non-linear free vibrations of stepped thickness beams, *J. Sound Vib.,* **72**－3 (1980)，415。

(3) 佐藤，対称および非対称１自由度非線形系の自由振動解について，金大工学部紀要，**13**－1 (1980)，51。

(4) 佐藤，重力を考慮した段付ばりの伝達マトリックス法による非線形自由振動解析，日本機械学会論文集，**47**－416 (1981)，397。