K. J. ARROW, D. LEVHARIの定理の拡張に関する更なる考察について

渡　辺　　　力

I　はじめに

著者は論説［2］においてK. J. Arrow, D. Levhari［1］の結果を時間が無限大の場合に拡張した。第0期から始まる投資の流れにおける t 期の純利益を $x(t)$ とおく。ここで t は0から∞まで連続的に変化し，$x(t)$ も t に関して連続とする（これは積分可能性に置き換えることができるが簡単のため連続とする）。0期に資本投入するという意味で $x(0)<0$ とし，また赤字になる期もあるだろうから $x(t)<0$ となる場合も許すことにする。論文[1]では「ある t_0 以上の t については常に $x(t)=0$」という設定のもとで議論が進められている。したがって t_0 以上の期は考える必要がないので時間の流れが有限で終わる場合を考察していることになる。論説［2］では時間の流れが本質的に無限の場合，無限積分が絶対収束するという条件のもとで［1］と同じ結果が成立することを示した。しかし本質的な部分で［1］における論法をそのまま適用したため，集合 $M(r)$（定義は後述）について非常に強い仮定を設けざるを得なかった。本論文は［1］及び［2］における論法を修正することにより集合 $M(r)$ に何の条件をつけない場合でも同様な議論が成立することを示す。まず2節で論説［2］の内容について簡単に振り返りながら，具体的な例でどのような現象が生じるかを考察する。ついで3節で一般の場合を考察することにする。なお本論文における Newton の近似法を利用したいくつかの近似計算及び Fig1 から Fig3 までのグラフは全て Mathematica Version 3による。

II　論説［2］の概観

世の中は好況のときもあるし不況で赤字になるときもある。赤字のときは利益は負と考えるのが自然である。そこで t 期の純利益 $x(t)$ は正の値と負の値とを交互に無限回とるとする。即ち，

仮定1　$x(t)=0$ を満たす t は可算無限個あり，その集合は有限な集積点を持たない。

内部利子率を r とするとき，0期から T 期までの総純利益の第0期における価値は

$$\phi(r,\ T)=\int_0^T \exp(-rt)x(t)dt$$

で与えられる。0期から T 期までの総純利益の現在価値と言われるものである。ただし $\exp(-rt)=e^{-rt}$ である。

仮定2　各 $r>0$ にたいして上記積分は絶対収束する。

仮定2から，各 $r>0$ にたいして $\phi(r,\ T)$ は T の関数として有界となる。そこで

$$\lambda=\sup\{\phi(r,\ T),\ 0\leq T<\infty\}$$

と置くと，上限の定義からある数列 $\{T_j\}$ があって，$\lambda=\lim_{j\to\infty}\phi(r,T_j)$ とできる。数列 $\{T_j\}$ が有限の集積値 T_0 をもてば

$$\lambda=\phi(r,\ T_0)=\max\{\phi(r,\ T),\ 0\leq T\leq\infty\}$$

であり，そうでなければ

$$\lambda=\lim_{T\to\infty}\phi(r,T)=:\phi(r,\infty)$$

である。したがって無限遠点も考慮すれば $\phi(r,\ T)$ は $0\leq T\leq\infty$ で最大値を取ることになる。そこで

$M(r)=\{T'\in[0,\ \infty]$；$\phi(r,\ T)$ は T' で最大値をとる$\}$

とおく。

仮定3　すべての $r\in(0,\ \infty)$ にたいして集合 $M(r)$ はつねに有限値を含む。

以上の仮定のもとでは任意の $T\in M(r)-\{\infty\}$ にたいして $\phi_r(r,\ T)<0$ となり，これより［$\Psi(r)=\max\{\phi(r,\ T)$；$0\leq T\leq\infty\}$ は連続な狭義単調減少関数

となる］というのが［2］の結論だった。［1］及び［2］では$\Psi(r)\neq 0$を暗黙のうちに仮定している。しかし$x(t)$が簡単な関数の場合でも$\Psi(r)=0$となる場合や$M(r)=\{\infty\}$となる場合はごく自然に生じる。そこで仮定1，2のもとでどのような現象が起こりうるのかということを二つの例で見て見よう。

t期の純利益$x(t)$はある程度の周期性をもつであろう。そこでまず$x(t)$として基本周期t_0の連続周期関数を考えてみる。この場合仮定2が満たされていることは明らかである。さて，負でない整数nと$S\in[0,\ t_0]$にたいし，

$$\phi(r, nt_0+S)=\int_0^{nt_0+S}\exp(-rt)x(t)dt=\sum_{k=0}^{n-1}\int_{kt_0}^{(k+1)t_0}\exp(-rt)x(t)dt+\int_{nt_0}^{nt_0+S}\exp(-rt)x(t)dt$$

$$=\phi(r,t_0)\sum_{k=1}^{n-1}\exp(-kt_0)+\exp(-nrt_0)\phi(r,S)$$

$$=\frac{\phi(r,t_0)}{1-\exp(-rt_0)}+\exp(-nrt_0)\left(\phi(r,S)-\frac{\phi(r,t_0)}{1-\exp(-rt_0)}\right)$$

となる。いまある$n_0\geq 1$と$S_0\in[0,\ t_0]$にたいして$n_0t_0+S_0\in M(r)$とする。そのとき

$$\phi(r,\ (n_0\pm 1)t_0+S_0)\leq\phi(r,\ n_0t_0+S_0)$$

であり，したがって

$$\phi(r,S_0)=\frac{\phi(r,t_0)}{1-\exp(-rt_0)}$$

となる。この式からさらに

$$\Psi(r)=\phi(r,n_0t_0+S_0)=\frac{\phi(r,t_0)}{1-\exp(-rt_0)}\geq 0$$

となり，これより「すべての負でない整数nにたいして$nt_0+S_0\in M(r)$」となる。またこの場合$\phi(r,\ t_0)\neq 0$である。何故ならば，もし$\phi(r,\ t_0)=0$とすると$\Psi(r)=0$となるが一方，$a=\max\{t\in(0,\ t_0)\ ;\ x(t)=0\}$とおくと

となり，これは矛盾である。このことの対偶をとれば

「$\phi(r,\ t_0)\leq 0$ ならば $[t_0,\ \infty]\cap M(r)=\emptyset$」

となる。しかし式(1)から $\infty\not\in M(r)$ である。したがって次の結論を得る。

Fact(1)。　$\phi(r,\ t_0)\leq 0$ ならば $M(r)\subset[0,\ t_0]$ である。

次に $\phi(r,\ t_0)>0$ とする。$\max\{\phi(r,\ t)\ ;\ 0\leq t\leq t_0\}=\phi(r,\ S_0)$ を満たす $S_0\in[0,\ t_0]$ にたいし，

$$\phi(r,S_0)-\frac{\phi(r,t_0)}{1-\exp(-rt_0)}<0$$

ならば(1)から $\phi(r,\ nt_0+S_0)$ は n に関して狭義単調増加となる。したがってこの場合は $M(r)=\{\infty\}$ となる。さらに簡単な計算により次のことがわかる。

Fact(2)。　$\phi(r,S_0)=\dfrac{\phi(r,t_0)}{1-\exp(-rt_0)}$ ならば $\Psi(r)=\phi(r,\ S_0)$ かつ，すべての負でない整数 n にたいして $nt_0+S_0\in M(r)$ であり，

$\phi(r,S_0)>\dfrac{\phi(r,S_0)}{1-\exp(-rt_0)}$ ならば $\Psi(r)=\phi(r,\ S_0)$ かつ，$M(r)\subset(0,\ t_0)$ である。

また容易に分かるように

Fact(3)。「$\infty\in M(r)$ かつ $M(r)-\{\infty\}$ は空でない有限集合」という場合は起こらない。

さて以上は周期関数の場合の一般論だったが簡単な例で計算してみよう。

例 1　$x(t)=1+\sin t-\frac{3}{2}\cos t$ とおく。この場合

$$\phi(r,2\pi)=\int_0^{2\pi}\exp(-rt)x(t)dt=\frac{1-\exp((-2\pi r))}{r(1+r^2)}(1+r-\frac{1}{2}r^2)$$

であるから，$\phi(r,\ 2\pi)\geq 0$ であるための必要十分条件は，$r>0$ を考慮すれば，$0<r<1+\sqrt{3}$ となる。またこのときは $S_0=\frac{3}{2}\pi$ である。さらに

$$\phi(r,\frac{3}{2}\pi)=\int_0^{\frac{3}{2}\pi}\exp(-rt)x(t)dt=\frac{1}{r(1+r^2)}\left\{\left(-1+\frac{3}{2}r\right)\exp\left(-\frac{3}{2}\pi r\right)+1+r-\frac{1}{2}r^2\right\}$$

であるから

$$\phi(r,\frac{3}{2}\pi)-\frac{\phi(r,2\pi)}{1-\exp(-2\pi r)}>0\Leftrightarrow r>\frac{2}{3}$$

となる。以上のことから次の結論を得る。

$$M(r)=\begin{cases}\{\infty\}, & 0<r<\frac{2}{3}\\ \left\{2n\pi+\frac{3}{2}\pi\,;\,n=0,1,2,\ldots\right\}, & r=\frac{2}{3}\\ \left\{\frac{3}{2}\pi\right\}, & \frac{2}{3}<r\leq 1+\sqrt{3}\end{cases}$$

$$\Psi(r)=\begin{cases}\frac{1}{r}+\frac{1-\frac{3}{2}r}{1+r^2} & 0<r\leq\frac{2}{3}\\ \frac{1}{r}+\frac{1-\frac{3}{2}r}{1+r^2}+\frac{\exp(-\frac{3}{2}\pi r)}{r(1+r^2)}(-1+\frac{3}{2}r), & \frac{2}{3}<r\leq 1+\sqrt{3}\end{cases}$$

次に $r>1+\sqrt{3}$ のときを考察する。

$$f(r)=\frac{1}{r}+\frac{1-\frac{3}{2}r}{1+r^2}+\frac{\exp(-\frac{3}{2}\pi r)}{r(1+r^2)}(-1+\frac{3}{2}r)$$

とおく。 $f(1+\sqrt{3})>0, f(4)<0$ であることはすぐわかるが, $r>1+\sqrt{3}$ のときの $f(r)$ の零点はただ一つであることが次のようにして分かる。

$$f(r)=0\Leftrightarrow\exp(-\frac{3}{2}\pi r)=\frac{r^2-2r-2}{3r-2}$$

であるが，$\exp\left(-\frac{3}{2}\pi r\right)$ は r に関して狭単調減少，$\frac{r^2-2r-2}{3r-2}$ は r に関して狭義単調増加である。したがって $r>1+\sqrt{3}$ では $f(r)=0$ はただ一つの解を持つ。それを r_0 とおくと，$M(r_0)=\{0,\frac{3}{2}\pi\}$，$r>r_0$ のときは $M(r)=\{0\}$ となる。

以上を整理すると，$M(r)$ 及び $\Psi(r)$ は次の通りである。

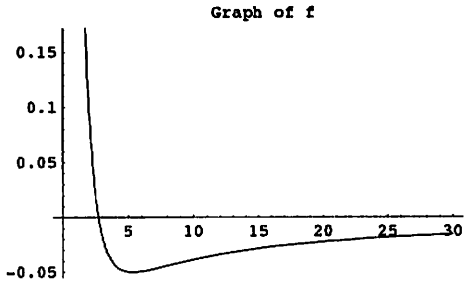
$$M(r)=\begin{cases} \{\infty\}, & 0<r<\frac{2}{3} \\ \left\{2n\pi+\frac{3}{2}\pi\,;\,n=0,1,2,\ldots\right\}, & r=\frac{2}{3} \\ \left\{\frac{3}{2}\pi\right\}, & \frac{2}{3}<r\leq 1+\sqrt{3} \\ \{0,\frac{3}{2}\pi\}, & r=r_0 \\ \{0\} & r>r_0 \end{cases}$$

$$\Psi(r)=\begin{cases} \frac{1}{r}+\frac{1-\frac{3}{2}r}{1+r^2} & 0<r\leq\frac{2}{3} \\ \frac{1}{r}+\frac{1-\frac{3}{2}r}{1+r^2}+\frac{\exp\left(-\frac{3}{2}\pi r\right)}{r(1+r^2)}\left(-1+\frac{3}{2}r\right), & r_0\geq r>\frac{2}{3} \\ 0, & r>r_0 \end{cases}$$

この例では，$0<r\leq r_0$ の範囲では $\Psi(r)$ は狭義単調減少であるが $r\geq r_0$ では恒等的に零である。ちなみに r_0 の近似値は2.732055である。Newton 法によるこの近似計算は次の通りである。

```
f[r_]=1/r+(1−3/2r)/(1+r^2)+E(−3/2Pi r)(−1+3/2r)/(r(1+r^2))
a=2.5 ; n=7 ;
Do[a=a−f[a]/f'[a], [n]]
N[a, 7]
2.732055
```

また$f(r)$, $\Psi(r)$のグラフは次のようになる（Fig 1）。




```
ψ[r_] = Which[0 < r < 2/3, (1/r) + (1 - 3 r/2) / (1 + r^2), 2/3 < r < 2.73,
  (1/r) + (1 - 3 r/2) / (1 + r^2) + (E^(-3 Pi r/2) (-1 + 3 r/2)) / (r (1 + r^2)), r > 2.73, 0]

Plot[ψ[r], {r, 0, 10}, PlotLabel -> "ψ"]
```

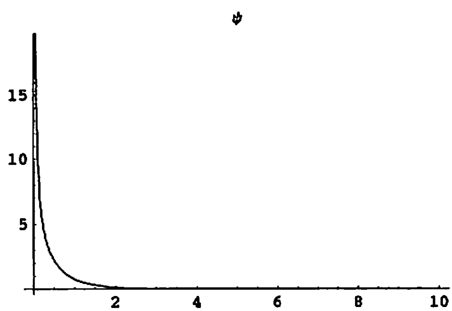


Fig 1

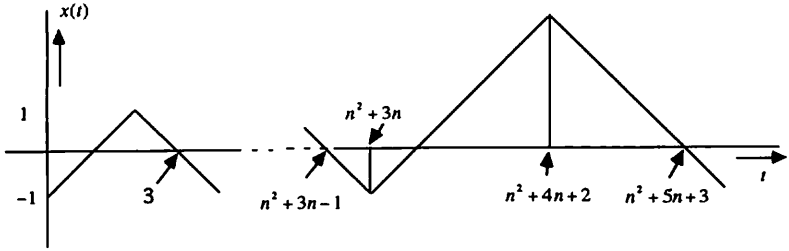
次に，周期関数ではないがある種の周期性をもつ関数を考える。

例2　$(n-1)(n+2) \leq t \leq n(n+3)$　$(n=1,2,\ldots)$ をみたすtに対して，

$$x(t) = -\mid t-(n^2+2n-1) \mid + n$$

で与えられる関数を考える。

$$x(t) = -\mid t-(n^2+4n+2) \mid + n+1 \quad if \quad n(n+3) \leq t \leq (n+1)(n+4)$$



積分を実行することにより，

$$\tau(0,r):=\int_0^3 \exp(-rt)x(t)dt=\frac{\exp(-3r)-2\exp(-2r)-r+1}{r^2}$$

$$\tau(n,r):=\int_{n^2+3n-1}^{n^2+5n+3} \exp(-rt)x(t)dt$$

$$=\frac{\exp(-(n^2+3n-1)r)}{r^2}\{\exp(-(2n+4)r)-2\exp(-(n+3)r)+2\exp(-r)-1\} \quad (n\geqq 1)$$

を得る。またこれらの関数から分母の r^2 を取り去ったものをそれぞれ，$f(0,\ r)$, $f(n,\ r)$，さらに

$$F(n,r):=\sum_{k=0}^{n} f(k,r)2\exp(-r)-1,\ F(r)=\sum_{k=0}^{\infty} f(k,r)=\lim_{n\to\infty} F(n,r),$$

$\sigma(n,\ r)=\exp(-(2n+4)\ r)-2\exp(-(n+3)\ r)+2\exp(-r)-1$

とおく。n を連続変数とみて $\sigma(n,\ r)$ を n で微分すると，$r>0$であるから，

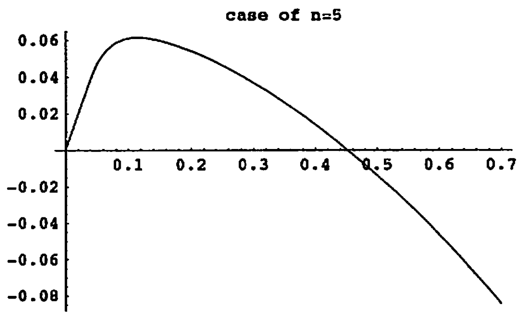
$$\frac{\partial\sigma}{\partial n}=-2r\exp(-(2n+4)r)-2r\exp(-(n+3)r)=2r\exp(-(n+3)r)(1-\exp(-(n+1)r))>0$$

となる。したがって $\sigma(n,\ r)$ は n に関して狭義単調増加である。そこで $\exp(-2r)+\exp(-r)-1=0$ をみたす r を r_1 ($\cong 0.481$)，$2\exp(-r)-1=0$ をみたす r を r_2 ($\cong 0.693$) とすると，$0<r\leqq r_1$ のとき $\sigma(n,\ r)>\sigma(1,\ r)\geqq 0$ ($n>1$)，$r\geqq r_2$ のとき $\sigma(n,\ r)<0$ となる。関数 $F(r)$ の変化の様子を見るために $F(5,\ r)$, $F(10,\ r)$, $F(100,\ r)$, $F(200,\ r)$の４本のグラフ及びそれらを同一平面上に描いたものを見ることにする（Fig 2)。

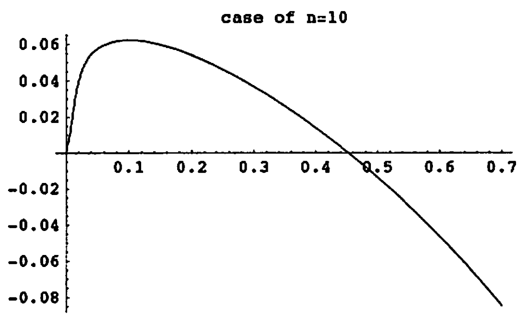
```
f[n_, r_] = E^(-(n^2 + 3 n - 1) r) * (E^(-(2 n + 4) r) - 2 E^(-(n + 3) r) + 2 E^(-r) - 1)
```

$$Fn[r\_] = \sum_{k=1}^{n} f[k, r] + E\text{^}(-3 r) - 2 E\text{^}(-2 r) - r + 1$$

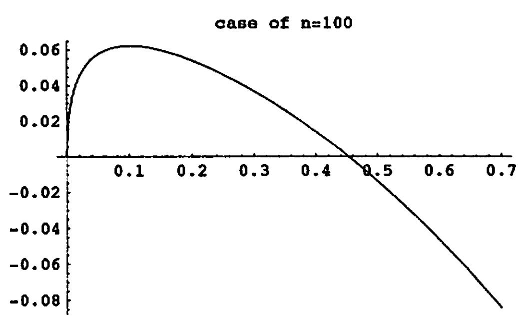
```
a1 = Plot[F5[r], {r, 0, 0.7}, PlotLabel -> "case of n=5"]
```



- Graphics -

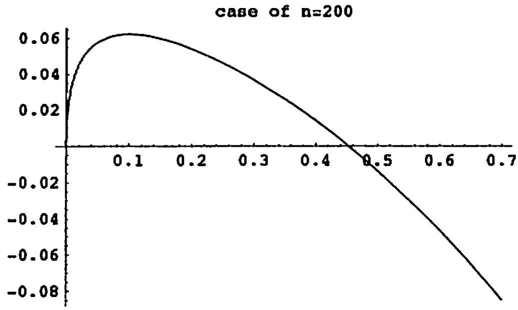


- Graphics -



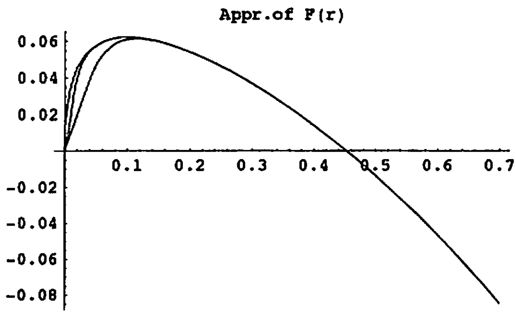
- Graphics -

Fig 2 − 1



- Graphics -

```
Show[a1, a2, a3, a4, PlotLabel -> "Appr.of F(r)"]
```



- Graphics -

Fig 2 − 2

これらのグラフから $F(r)$ は0.4から0.5の間で唯一つの零点を持つことが分かる。その正確な解析は次の通りである。関数 $F(r)$ は $r>0$ の範囲で広義一様収束であるから項別微分可能である。そこで関数

$u(0,\ r)=-3\exp(-3r)+4\exp(-2r)-1$

$u(n,\ r)=-(n^2+5n+3)\exp(-(2n+4)r)+2(n^2+4n+2)\exp(-(n+3)r)$

$\qquad -2(n^2+3n)\exp(-r)+n^2+3n-1 \quad (n\geq 1)$

を $0.4<r<0.5$ の範囲で考える。このとき $1.21<\exp(-r)<1.34$ であることから，上記関数はいずれも負であることが分かる。また

$$\frac{\partial f(0,r)}{\partial r}=u(0,r),\ \frac{\partial f(n,r)}{\partial r}=u(n,r)$$

であるから $F(r)$ はこの範囲で狭義単調減少となる。これらのことから $F(r)$ は $0.4<r<0.5$ の範囲で唯一の零点を持つ。この零点を r_3 とおく。それ以外に零点がないことも同様の考察で分かる。

$F(10, r)$, $F(100, r)$, $F(200, r)$ の零点の近似値は次の通りである。

```
f[n_, r_]=E^(-(n^2+3n-1)r*(E^(-(2n+4)r)-2E^(-(n+3)r)+2E^(-r)-1)
f[r_]=E^(-3r)-2E^(-2r)-r+1
```

$$F\,10(r)=\sum_{k=1}^{10} f(k,r)+f(r)$$

```
a=0.4 ; n=10 ;
Do[a=a-F10[a]/F10'[a], [n]]
N[a, 10]
0.4530613185
```

$$F\,100(r)=\sum_{k=1}^{100} f(k,r)+f(r)$$

```
a=0.4 ; n =10 ;
Do[a=a-F100[a]/F100'[a], [n]]
N[a, 10]
0.4530613185
```

$$F\,200(r)=\sum_{k=1}^{200} f(k,r)+f(r)$$

```
a=0.4 ; n=10 ;
Do[a=a-F200[a]/F200'[a], [n]]
N[a, 10]
0.4530613185
```

n が10, 100, 200の場合についての零点を Newton 法で計算させたものが上記

の数値である。

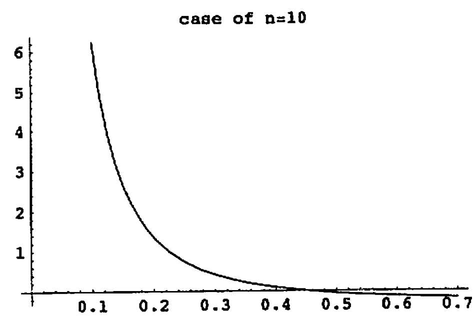
さて，$\sigma(n, r)$ の n に関する単調性から，$0<r<r_3$ ならば $M(r)=\{\infty\}$，$M(r_3)=\{0, \infty\}$，$r<r_2$ ならば $M(r)=\{0\}$ となるのは明らかである。また，$r_3<r<r_2$ を満たす任意の r にたいし，ある $n_0=n_0(r)$があって，$n \geq n_0$ ならば $\sigma(n, r)$ は正となる。これらのことと，$F(r)<0$ という事実から，$M(r)=\{0\}$ であることが容易にわかる。即ち，

$$M(r)=\left\{\begin{array}{ll}\{\infty\}, & 0<r<r_3 \\ \{0, \infty\}, & r=r_3 \\ \{0\}, & r_3<r\end{array}\right\}$$

$$\Psi(r)=\left\{\begin{array}{ll}\dfrac{F(r)}{r^2}, & 0<r<r_3 \\ 0, & r_3 \leq r\end{array}\right\}$$

となる。$\Psi(r)$ を $n=10{,}100$で近似したグラフ及びそれらを同一平面上に画いたグラフは次の通りである（Fig3)。

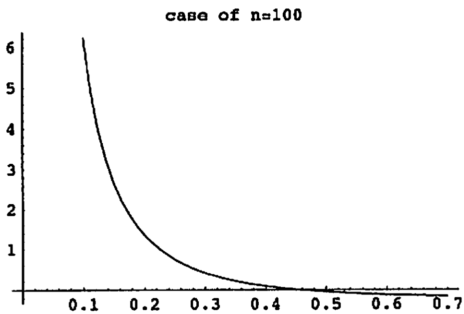
```
In[2]:= f[n_, r_] = E^(-(n^2 + 3 n - 1) r) * (E^(-(2 n + 4) r) - 2 E^(-(n + 3) r) + 2 E^(-r) - 1)

In[3]:= f[r_] = E^(-3 r) - 2 E^(-2 r) - r + 1
        a1 = Plot[F10[r] / r^2, {r, 0.1, 0.7}, PlotLabel -> "case of n=10"]
```




```
Out[10]= - Graphics -
```

Fig 3 − 1

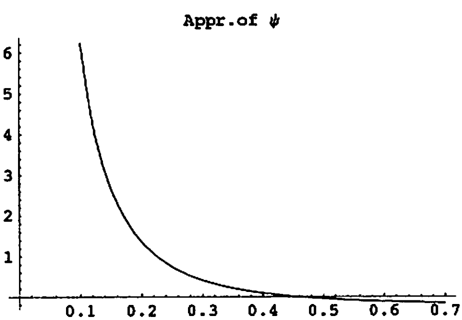
```
In[12]:= a2 = Plot[F100[r] / r^2, {r, 0.1, 0.7}, PlotLabel -> "case of n=100"]
```




```
Out[12]= -Graphics-
```

Fig 3 − 2

```
Show[a1, a2, PlotLabel -> "Appr.of ψ"]
```




```
-Graphics-
```

Fig 3 − 3

さて $M(r)$ に何も条件をつけない場合どうなるだろうか。それを次の節で考察する。

Ⅲ　集合 $M(r)$ が一般の場合

論説［2］で本質的に修正の必要な箇所は補題4であり，それ以外はほとん

ど形式的な修正だけですむ。また定理１のなかで述べた事実を補題４とすることにする。ここでは補題４'，補題５（［２］では補題４）と定理１以外は証明なしで述べることにする。

補題１。　任意の正数 k にたいして $\int_0^{\infty} t^k \exp(-rt)x(t)dt$ は絶対収束する。

補題２。　任意の正数 r_0 と r_0 へ収束する列 $\{r_j\}$ 及びある $T_0 \geq 0$ と，T_0 へ収束する列 $\{T_j\}$ にたいして $\lim_{j\to\infty}\phi(r_j, T_j)=\phi(r_0, T_0)$ が成立する。この補題は $T_0=\infty$, $T_j=\infty$ の場合でも成立する。

補題３。　任意の正数 r_0 にたいし $\min_{T\in M(r_0)}\phi_r(r_0,\ T)$ が存在する。

補題４。　$\Psi'_-(r_0)=\Psi'(r_0-0)=\min_{T\in M(r_0)}\phi_r(r_0,\ T)$ である。

補題４'。　任意の正数 r_0 にたいし $\max_{T\in M(r_0)}\phi_r(r_0,\ T)$ が存在し，

$$\Psi'(r_0+0)=\Psi'_+(r_0)=\lim_{h\to+0}\frac{\Psi(r_0+h)-\Psi(r_0)}{h}=\max_{T\in M(r_0)}\phi_r(r_0,\ T)$$

である。

略証。　$|h|<\frac{r_0}{2}$ ならば

$$\left|\exp(-ht)+ht-1\right|\leq\frac{h^2t^2}{2}\exp\left(\frac{r_0t}{2}\right)\quad\cdots\cdots(*)$$

であるから，$T(h)\in M(r_0+h)$ にたいして

$$\left|\Psi(r_0+h)-\phi(r_0, T(h))-h\,\phi_r(r_0, T(h))\right|\leq\int_0^{T(h)}\exp(-r_0t)\left|\exp(-ht)+ht-1\right|\left|x(t)\right|dt$$

$$\leq\frac{h^2}{2}\int_0^{T(h)}t^2\exp\left(-\frac{r_0t}{2}\right)\left|x(t)\right|dt\leq\frac{h^2}{2}K(r_0)$$

となり，これよりある $T^*\in M(r_0)$ があって

$$\limsup_{h\to+0}\frac{\Psi(r_0+h)-\Psi(r_0)}{h}\le\phi_r(r_0,T^*)$$

となる。次に，任意の$T_0\in M(r_0)$にたいして不等式（＊）から同様にして
$\Psi(r_0+h)\ge\phi(r_0+h,T_0)\ge\phi(r_0,T_0)+h\phi_r(r_0,T_0)-Kh^2$
となる。したがって

$$\liminf_{h\to+0}\frac{\Psi(r_0+h)-\Psi(r_0)}{h}\ge\phi_r(r_0,T_0)$$

であるが，$T_0\in M(r_0)$の任意性から補題4'が直ちに従う。　Q. E. D.

補題５。　任意の正数r_0にたいし，

(1)　$\Psi(r_0)>0$ならば，ある正数cがあって任意の$T_0\in M(r_0)$に対して$\phi_r(r_0,T_0)<-c$である。

(2)　$0\in M(r_0)$ならば任意の$T_0\in M(r_0)$にたいして$\phi_r(r_0,T_0)\le 0$である。

証明。(1)　零でない有限値T_0にたいしては［１］の論法そのままでよい。そこで（ｉ）；$M(r_0)=\{\infty\}$の場合。このとき次の条件①，②を満たす無限列$\{T_j\}$を選べることは容易に分かる。

①　T_jは$x(t)$の零点で，tがT_jを通過するとき$x(t)$の符合は正から負へ変る。

②　$\phi(r_0,T_j)$は単調増加でかつ$\phi(r_0,\infty)$へ収束する。

ここで$\phi(r_0,\infty)>0$であるから，$\phi(r_0,T_j)>0$としてよい。そこで別の無限列S_jを次のようにして作る。まずS_1を，

$$\max_{0\le t\le T_1}\phi(r_0,t)=\phi(r_0,S_1)$$

を満たすように選ぶ。このS_1にたいして

$$\max_{0\le t\le S_1}\phi(r_0,t)=\phi(r_0,S_1)$$

が成立するのは明らかである。次に$\phi(r_0,S_1)<\phi(r_0,T_{j1})$を満たす$T_{j1}$を取り，

それにたいして$\max_{0\le t\le T_{j1}}\phi(r_0,T_{j1})=\phi(r_0,S_2)$を満たす$S_2$を取る。このとき$S_2>T_1$で

ありかつ

$$\max_{0\leq t\leq S_1}\phi(r_0,t)=\phi(r_0,S_2)$$

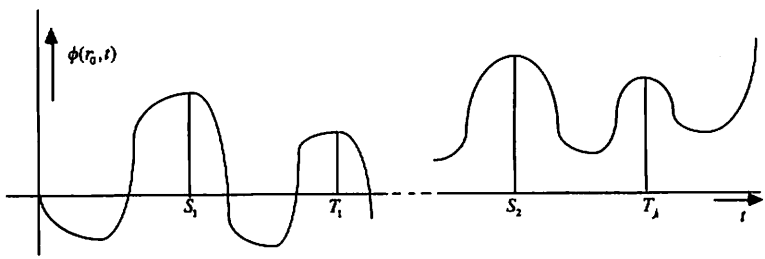
が成立する。次に$\phi(r_0,S_2)<\phi(r_0,T_{j2})$を満たす$T_{j2}$をとり，

$$\max_{0\leq t\leq T_{j2}}\phi(r_0,t)=\phi(r_0,S_3)$$

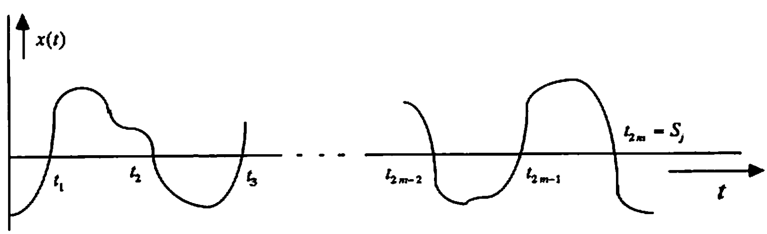
を満たすようなS_3を選ぶ。この操作を続けることによって得られる数列$\{S_j\}$は次の条件を満たす。

$\{S_j\}\to\infty$かつ$\{\phi(r_0,S_j)\}$は$\phi(r_0,\infty)$へ収束する単調増加数列で，すべてのjにたいして$\max_{0\leq t\leq S_j}\phi(r_0,t)=\phi(r_0,S_j)$となる。

さらにS_jが$x(t)$の零点であり，S_jで$x(t)$の符号が正から負に変わるということも明らかである。$\phi(r_0,t)$のグラフの概形は図の通りである。



今S_jを固定して考える。S_j以下の$x(t)$の零点は偶数個であるから，それらを$0<t_1<\ldots<t_{2m}=S_j$とおく。$x(t)$のグラフの概形は図の通りである。



あとは［1］または［2］と同じ論法を使えばよい。その概略は次の通りである。

$$\int_{t_{2m-1}}^{t_{2m}} t\exp(-r_0 t)x(t)dt > t_{2m-1}\int_{t_{2m-1}}^{t_{2m}} \exp(-r_0 t)x(t)dt,$$

$$\int_{t_{2m-2}}^{t_{2m-1}} t\exp(-r_0 t)x(t)dt > t_{2m-1}\int_{t_{2m-2}}^{t_{2m-1}} \exp(-r_0 t)x(t)dt,$$

であるから，これより

$$\int_{t_{2m-2}}^{t_{2m}} t\exp(-r_0 t)x(t)dt > t_{2m-1}\int_{t_{2m-2}}^{t_{2m}} \exp(-r_0 t)x(t)dt$$

が成立する。同様にして

$$\int_{t_{2m-4}}^{t_{2m-2}} t\exp(-r_0 t)x(t)dt > t_{2m-3}\int_{t_{2m-4}}^{t_{2m-2}} \exp(-r_0 t)x(t)dt$$

となる。また$\phi(r_0, S_j) \geq \phi(r_0, t_{2m-2})$, $t_{2m-1} > t_{2m-3}$であるから，

$$\int_{t_{2m-4}}^{t_{2m}} t\exp(-r_0 t)x(t)dt \geq t_{2m-3}\int_{t_{2m-4}}^{t_{2m}} \exp(-r_0 t)x(t)dt$$

となる。これを繰り返すことにより，

$$\int_{0}^{S_j} t\exp(-r_0 t)x(t)dt \geq t_1\int_{0}^{S_j} \exp(-r_0 t)x(t)dt = t_1\phi(r_0, S_j)$$

となる。よってを無限大に飛ばして$\phi_r(r_0, \infty) \leq -t_1\Psi(r_0) < -\dfrac{t_1\Psi(r_0)}{2} = -c$ を得る。

（ii）；$\infty \in M(r_0)$ かつ $M(r_0) - \{\infty\}$が空でない有限集合の場合。このときは$\phi_r(r_0, \infty)$についてのみ調べればよいことは明らかである。いま

$$p(t)=\int_{T_0}^{t} t\exp(-r_0 t)x(t)dt \quad (T_0=\max\{M(r_0)-\{\infty\}\})$$

とおく。T_1をT_0から2番目に大きい$x(t)$の零点とする。$t>T_0$のとき$p(t)<0$かつ$p(t)\to 0\ (t\to\infty)$であるから（i）の場合と同じ性質をもつ無限列$\{T_j\}$がとれる。S_1を$\max\{p(t), T_1\leq t\leq T_2\}=p(S_1)$を満たすようにとる。次に$p(S_1)<p(T_{j1})$を満たす$T_{j1}$を一つ選び，$\max\{p(t), T_1\leq t\leq T_{j1}\}=p(S_2)$を満たす$S_2$を選ぶ。このようにして選んだ無限列$\{S_j\}$は，（i）で選んだ列$\{S_j\}$と同じ性質をもつ。さて，$a$を$T_0$と$T_1$の間にある$x(t)$の零点とすると，

$$\int_{T_1}^{S_j} t\exp(-r_0 t)x(t)dt \geq 0$$

であるから，

$$\int_{T_0}^{S_j} t\exp(-r_0 t)x(t)dt \geq a\int_{T_0}^{S_j}\exp(-r_0 t)x(t)dt$$

となる。これより

$$\int_{T_0}^{\infty} t\exp(-r_0 t)x(t)dt \geq a\int_{T_0}^{\infty}\exp(-r_0 t)x(t)dt=0$$

が成立し，したがって

$$\int_{0}^{\infty} t\exp(-r_0 t)x(t)dt \geq \int_{0}^{T_0} t\exp(-r_0 t)x(t)dt \geq c>0\ ,$$

即ち，$\phi_r(r_0,\infty)\leq -c$となる。(2)も同様である。　Q. E. D.

補題4，4'，5から$\Psi_-'(r_0)\leq\Psi_+'(r_0)\leq 0$の成立することが分かる。

定理1の証明。

(1)　$\Psi(r)$の連続性は補題2から直ちに従う。

(2)　$\Psi(r)$の単調性について；$0<r_1<r_2$にたいし，2点$(r_1,\Psi(r_1)), (r_2,\Psi(r_2))$を結ぶ直線の方程式を$q(r)$とし，$w(r)=\Psi(r)-q(r)$とおく。$w(r_1)=w(r_2)=0$であるから，$r_1\leq r\leq r_2$の範囲で$w(r)<0$となる$r$が存在する場合には$w(r_0)=\min\{w(r)\,;\,r\in(r_1,r_2)\}$とおくと$w_+'(r_0)\geq 0$となる。よって$w_+'(r_0)\geq q(r_0)$となり，

補題4より$\Psi(r_1) \geq \Psi(r_2)$が従う。他の場合も同様である。即ち，$\Psi(r)$は単調減少である。　Q. E. D.

注意。$\Psi(r_0)=0$となるr_0があればr_0以上のrにたいしては$\Psi(r)\equiv 0$となる。しかもこのような場合がきわめて自然に起こり得るということも二つの例の計算からみて容易に想像されよう。

参考文献

[1]. Arrow, K. J, Levhari, D., "Uniqueness of the Internal Rate of Return with Variables Life of Investment," The Economic Journal, Sept., 1969, 560-566.

[2]. Chikara Watanabe, "A Note on the Theorem of K. J. Arrow and D. Levhari Concerning the Uniqueness of the Internal Rate of Return," 金沢大学経済論集　第36号，1999年3月，1−12。