# Inverse Problems in Fuzzy Linear Programming Problems

# ファジィ線形計画問題と逆問題

前　田　　　隆

## 1．はじめに

ファジィ数を目的関数や制約条件式の係数とする線形計画問題，すなわち，ファジィ線形計画問題を考察する場合，目的関数値がファジィ値となるため，通常の線形計画問題と異なり，いわゆる，最適解は存在しない。このため，実行可能解および最適解の定義，さらにはファジィ線形計画問題の解釈をめぐって，多くの議論が交わされてきた。坂和［4］では，ファジィ線形計画問題に対し，各係数をファジィ数の $\alpha$- カット値の上限あるいは下限で置き換えた可能性線形計画問題が定義され，その $\alpha$- 可能性最適解と $\alpha$- 可能性最適値の特徴づけが与えられた。さらに，Sakawa et al.［5］では，ファジィ線形多目的計画問題に対して，$(\alpha, \gamma)$-可能性パレート最適解が定義された。

本論文の目的は，三角型のファジィ数を目的関数および制約条件式にもつファジィ線形計画問題に対して，可能性最大化問題とその逆問題を定義し，これら 2 つの問題の間に成立する関係を調べることである。特に，この逆問題が可能性線形計画問題と同値であり，可能性線形計画問題の逆問題が，可能性最大化問題であることが示される。さらに，この関係を利用し，ファジィ線形計画問題に対して，双対問題を定義し，いわゆる，双対定理を導く。

## 2．数学的準備

ここでは，以下の分析で用いられる記号，定義および基本的な結果を与える。$R^n$ を $n$ 次元ユークリッド空間とし，$x \equiv (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T \in R^n$ とする。ただし，$x_i \in R, i = 1, 2, \cdots, n$ であり，$T$ はベクトルの転置を表す。任意の

$x, y \in R^n$ に対し，内積を $\langle x, y \rangle$ によって表す。さらに，$x, y \in R^n$ に対し，$x \leqq y$ iff $x_i \leqq y_i$，$i = 1, 2, \cdots, n, x \leq y$ iff $x \leqq y$, かつ $x \neq y$ とかく。

**定義2.1.** $\tilde{a}$ を実数直線 $R$ 上で定義されたファジィ集合とし，$\mu_{\tilde{a}}$ をそのメンバシップ関数とする。このとき，ある実数 $c$ が一意に存在して，

(i) $\mu_{\tilde{a}}(c) = 1$,

(ii) $\mu_{\tilde{a}}$ は $(-\infty, c]$ 上で単調非減少，

(iii) $\mu_{\tilde{a}}$ は $(c, +\infty]$ 上で単調非増加

が成立するとき，$\tilde{a}$ をファジィ数という。ファジィ数の全体からなる集合を $\mathfrak{I}$ によって表す。

実数 $a \in R$ の特性関数 $\chi_a : R \to \{0, 1\}$ は上の条件 (i), (ii) および (iii) を満たすので，$a \in \mathfrak{I}$ である。

**定義2.2.** $L : R \to R$ をつぎの条件を満たす任意の実数値関数とする。

(i) $L(x) = L(-x) \quad \forall x \in R$,

(ii) $L(x) = 1$ iff $x = 0$,

(iii) $L$ は $[0, +\infty)$ 上で狭義単調減少であり，かつ，$x_0 = \inf\{x > 0 | L(x) = 0\}$ を満たす実数 $x_0$ が存在する

このとき，$L$ を型関数といい，実数 $x_0$ を $L$ のゼロ点という。

**定義2.3.** $m$ を任意の実数とし，$\alpha$ を任意の正の実数とする。さらに，$L$ を任意の型関数とする。ファジィ数 $\tilde{a}$ は，メンバシップ関数 $\mu_{\tilde{a}} : R \to [0, 1]$ が

$$\mu_{\tilde{a}}(x) \equiv \max\left\{L\left(\frac{x - \mathrm{m}}{\alpha}\right), 0\right\} \quad x \in R \tag{1}$$

によって与えられるとき，$L$ 型ファジィ数といわれる。特に，型関数 $L$ が $[0, x_0]$ 上で線形であるとき，$\tilde{a}$ を三角型ファジィ数という。ただし，実数 $x_0$ は $L$ のゼロ点である。三角型ファジィ数の全体からなる集合を $\mathfrak{I}_T$ によって表す。

$\tilde{a}$ を任意のファジィ数とし，$\alpha \in [0, 1]$ を任意の実数とする。このとき，$\{x \in R \mid \mu_{\tilde{a}}(x) \geqq \alpha\}$ を $\alpha$-レベル集合という。特に，ファジィ数 $\tilde{a}$ が $L$ 型ファジィ数であれば，$\alpha$-レベル集合は閉区間となるので，ファジィ数 $\tilde{a}$ の $\alpha$-レベル集合を $[a^L_\alpha, a^R_\alpha]$ によって表す。ただし，$a^L_\alpha \equiv \min\{x \in \mathrm{R} \mid \mu_{\tilde{a}}(x) = \alpha\}$, $a^R_\alpha \equiv \max\{x \in R \mid \mu_{\tilde{a}}(x) = \alpha\}$ である。

**定義2.4.** 任意のファジィ数 $\tilde{a}$, $\tilde{b}$ に対して，不等式関係を以下のように定義する。

(i) $\mathrm{Pos}(\tilde{a} \geqq \tilde{b}) \equiv \sup\{\min(\mu_{\tilde{a}}(x), \mu_{\tilde{b}}(y)) \mid x \geqq y\}$,

(ii) $\mathrm{Pos}(\tilde{a} > \tilde{b}) \equiv \sup_x \left\{\inf_y \{\min(\mu_{\tilde{a}}(x), 1-\mu_{\tilde{b}}(y)) \mid x \leqq y\}\right\}$,

(iii) $\mathrm{Nes}(\tilde{a} \geqq \tilde{b}) \equiv \inf_x \left\{\sup_y \{\max(1-\mu_{\tilde{a}}(x), \mu_{\tilde{b}}(y)) \mid x \geqq y\}\right\}$,

(iv) $\mathrm{Nes}(\tilde{a} > \tilde{b}) \equiv \inf\left\{\max(1-\mu_{\tilde{a}}(x), 1-\mu_{\tilde{b}}(y)) \mid x \leqq y\right\}$.

ただし，$\mathrm{Pos}(\tilde{a} \geqq \tilde{b})$ は $\tilde{a}$ が $\tilde{b}$ 以上である可能性の度合い（可能性測度）を表し，$\mathrm{Nes}(\tilde{a} \geqq \tilde{b})$ は $\tilde{a}$ が $\tilde{b}$ 以上である必然性の度合い（必然性測度）を表す。

**定理2.1.** $\tilde{a}$ および $\tilde{b}$ を任意の三角型ファジィ数とする。このとき，つぎの関係が成立する。

(i) $\mathrm{Pos}(\tilde{a} \geqq \tilde{b}) \geqq \alpha$ iff $a^R_\alpha \geqq b^L_\alpha$,

(ii) $\mathrm{Pos}(\tilde{a} > \tilde{b}) \geqq \alpha$ iff $a^R_\alpha \geqq b^R_{1-\alpha}$,

(iii) $\mathrm{Nes}(\tilde{a} \geqq \tilde{b}) \geqq \alpha$ iff $a^L_{1-\alpha} \geqq b^L_{1-\alpha}$,

(iv) $\mathrm{Nes}(\tilde{a} > \tilde{b}) \geqq \alpha$ iff $a^L_{1-\alpha} \geqq b^R_{1-\alpha}$.

## 3．可能性最大化問題と逆問題

はじめに，ファジィ数を目的関数の係数とするつぎのファジィ線形計画問題を考察しよう。

$$(\mathrm{FLP}_1)\quad \left|\begin{array}{l} \mathrm{maximize}_x\ \langle \tilde{c}, x\rangle_F \\ \text{subject to}\quad Ax \leqq b,\ x \geqq 0, \end{array}\right.$$

ただし，

$$A\equiv\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},\ b\equiv(b_1,\ b_2,\ \cdots,\ b_m),\ \tilde{c}\equiv(\tilde{c}_1,\ \tilde{c}_2,\ \cdots,\ \tilde{c}_n),$$

$a_{ij}\in R, i=1,2,\cdots,m, j=1,2,\cdots,n, b_j\in R, j=1,2,\cdots,m, \tilde{c}_i\in\mathcal{F}_T, i=1,$ $2,\cdots,n$ であり，$\langle\tilde{c},x\rangle_F\equiv\sum_{i=1}^{n}\tilde{c}_ix_i$ である。

問題 ($\mathrm{FLP_1}$) は目的関数値がファジィ数であるために，いわゆる最適解の概念は存在しない。そこで，問題 ($\mathrm{FLP_1}$) に対し，可能性最大化問題を以下のように定義しよう。

$$(\mathrm{FLP^P_{1z}})\ \left|\ \begin{array}{ll} \text{maximize}_x & \mathrm{Pos}(\langle\tilde{c},x\rangle_F\geqq z) \\ \text{subject to} & Ax\leqq b,\ x\geqq 0, \end{array}\right.$$

ただし，実数 $z\in R$ は与えられたパラメータである。

問題 ($\mathrm{FLP^P_{1z}}$) はファジィ目的関数値が任意に与えられた目標値 $z\in R$ 以上である可能性を最大にする実行可能解を求める問題である。さて，問題 ($\mathrm{FLP^P_{1z}}$) に対し，逆問題をつぎのように定義しよう。

$$(\mathrm{FLP^P_{1\alpha}})\ \left|\ \begin{array}{ll} \text{maximize}_{x,z} & z \\ \text{subject to} & Ax\leqq b,\ x\geqq 0, \\ & \mathrm{Pos}(\langle\tilde{c},\ x\rangle_F\geqq z)\geqq\alpha, \end{array}\right.$$

ただし，実数 $\alpha\in[0,\ 1]$ は与えられたパラメータである。

問題 ($\mathrm{FLP^P_{1\alpha}}$) はファジィ目的関数値が $z$ 以上である可能性が $\alpha$ 以上の目標値のなかで，最大の目標値を求める目標値最大化問題である。明らかに，可能性最大化問題 ($\mathrm{FLP^P_{1z}}$) は非線形計画問題であり，目標値最大化問題 ($\mathrm{FLP^P_{1\alpha}}$) は線形計画問題である。また，問題 ($\mathrm{FLP^P_{1\alpha}}$) の逆問題は，問題 ($\mathrm{FLP^P_{1z}}$) である。

定理 2.1 から，問題 ($\mathrm{FLP}^{P}_{1z}$) および ($\mathrm{FLP}^{P}_{1\alpha}$) は，それぞれつぎの問題と同値であることがわかる。

$$(\mathrm{FLP}^{P}_{1z})\quad \left|\begin{array}{ll} \text{maximize}_{x,\alpha} & \alpha \\ \text{subject to} & Ax \leqq b,\, x \geqq 0, \\ & \langle c^{R}_{\alpha}, x\rangle \geqq z,\, \alpha \in [0,1], \end{array}\right.$$

$$(\mathrm{FLP}^{P}_{1\alpha})\quad \left|\begin{array}{ll} \text{maximize}_{x} & \langle c^{R}_{\alpha}, x\rangle \\ \text{subject to} & Ax \leqq b,\, x \geqq 0, \end{array}\right.$$

ただし，$c^{R}_{\alpha} \equiv (c^{R}_{1\alpha},\ c^{R}_{2\alpha},\ c^{R}_{n\alpha})^{T} \in R^{n}$ である。

さて，問題 ($\mathrm{FLP}^{P}_{1z}$) および ($\mathrm{FLP}^{P}_{1\alpha}$) に対し，最適値写像をそれぞれ

$$\Phi^{P}_{1}(\alpha) \equiv \sup\{\langle c^{R}_{\alpha},\ x\rangle \mid Ax \leqq b,\, x \geqq 0\},$$
$$\Psi^{P}_{1}(z) \equiv \sup\{\alpha \mid \langle c^{R}_{\alpha}, x\rangle \geqq z,\, Ax \leqq b,\, x \geqq 0,\, \alpha \in [0,1]\}$$

によって定義しよう。ただし，$\sup\{\emptyset\} \equiv -\infty$ である。

以下では，議論を簡単にするため，$\Phi^{P}_{1}(0) \equiv \langle c^{R}_{0}, x^{0}\rangle$ が存在すると仮定し，$Z^{0} \equiv (\Phi^{P}_{1}(0), +\infty)$, $Z^{1} \equiv (-\infty,\ \Phi^{P}_{1}(1)]$ および $Z^{2} \equiv [\Phi^{P}_{1}(1), \Phi^{P}_{1}(0)]$ とおく。このとき，以下の定理が成立する。

**定理 3.1.** 問題 ($\mathrm{FLP}^{P}_{1z}$) において，つぎのことが成立する。

$$\Psi^{P}_{1}(z) = \begin{cases} -\infty & \text{iff}\quad z \in Z^{0}, \\ 1 & \text{iff}\quad z \in Z^{1}, \\ \alpha \in [0,1] & \text{iff}\quad z \in Z^{2}. \end{cases}$$

**定理 3.2.** $z \in Z^{2}$ を任意の実数とする。点 $(x^{*}, \alpha^{*})$ が問題 ($\mathrm{FLP}^{P}_{1z}$) の最適解であれば，このとき，$x^{*}$ は問題 ($\mathrm{FLP}^{P}_{1\alpha^{*}}$) の最適解であり，$\langle c^{R}_{\alpha^{*}}, x^{*}\rangle = z$ が成立する。

**定理 3.3.** $\alpha^{*} \in [0,1]$ を任意の実数とする。ベクトル $x^{*} \in R^{n}$ が問題 ($\mathrm{FLP}^{P}_{1\alpha^{*}}$) の最適解であれば，このとき，$(x^{*}, \alpha^{*})$ は問題 ($\mathrm{FLP}^{P}_{1z}$) の最適解で

ある。ただし，$z^*=\langle c^R_{\alpha^*}, x^*\rangle$ である。

定理3.2および3.3から，

$$z=\Phi^P_1(\Psi^P_1(z)),\quad \forall z\in Z^2,$$
$$\alpha=\Psi^P_1(\Phi^P_1(\alpha)),\quad \forall \alpha\in[0,1]$$

がえられる。すなわち，$\Phi^P_1$ と $\Psi^P_1$ は逆関数の関係であることがわかる。

つぎに，ファジィ数を制約条件式に含む問題を考察しよう。

$$(\mathrm{FLP}_2)\quad \left|\begin{array}{ll}\text{maximize}_x & \langle c, x\rangle \\ \text{subject to} & \tilde{A}x\leqq\tilde{b},\ x\geqq 0,\end{array}\right.$$

ただし，$\tilde{A}$ は三角型ファジィ数 $\tilde{a}_{ij}\in\mathcal{T}_T$, $i=1,2,\cdots,n$, $j=1,2,\cdots,m$ を第 $i,j$ 成分とする $m\times n$ 行列であり，$\tilde{b}$ は三角型ファジィ数 $\tilde{b}_j\in\mathcal{T}_T$, $j=1,2,\cdots,m$ を要素とする $m$ 次元ベクトルである。

さて，問題 $(\mathrm{FLP}_2)$ に対し，可能性最大化問題をつぎのように定義しよう。

$$(\mathrm{FLP}^P_{2z})\quad \left|\begin{array}{ll}\text{maximize}_x & \mathrm{Pos}(\tilde{A}x\leqq\tilde{b}) \\ \text{subject to} & \langle c, x\rangle\geqq z,\ x\geqq 0,\end{array}\right.$$

ただし，$z\in R$ は与えられたパラメータである。

このとき，問題 $(\mathrm{FLP}^P_{2z})$ の逆問題は

$$(\mathrm{FLP}^P_{2\alpha})\quad \left|\begin{array}{ll}\text{maximize}_{x,z} & z \\ \text{subject to} & \langle c, x\rangle\geqq z, \\ & \mathrm{Pos}(\tilde{A}x\leqq\tilde{b})\geqq\alpha,\ x\geqq 0,\end{array}\right.$$

となる。ただし，$\alpha\in[0,1]$ は与えられたパラメータである。

問題 $(\mathrm{FLP}^P_{2z})$ および $(\mathrm{FLP}^P_{2\alpha})$ は，それぞれつぎと同値である。

$$(\mathrm{FLP}^P_{2z})\quad \left|\begin{array}{ll}\text{maximize}_{x,\alpha} & \alpha \\ \text{subject to} & \langle c,x\rangle\geqq z, \\ & A^L_\alpha x\leqq b^R_\alpha,\ x\geqq 0,\ \alpha\in[0,1],\end{array}\right.$$

$$(\mathrm{FLP}^{P}_{2\alpha})\quad \left|\begin{array}{ll}\text{maximize}_x & \langle c, x\rangle \\ \text{subject to} & A^L_\alpha x \leqq b^R_\alpha,\ x \geqq 0.\end{array}\right.$$

問題 $(\mathrm{FLP}^{P}_{2z})$ および $(\mathrm{FLP}^{P}_{2\alpha})$ に対し，最適値写像をそれぞれ

$$\Phi^P_2(\alpha) \equiv \sup\{\langle c, x\rangle \mid A^L_\alpha x \leqq b^R_\alpha, x \geqq 0\},$$
$$\Psi^P_2(z) \equiv \sup\{\alpha \mid \langle c, x\rangle \geqq z, A^L_\alpha x \leqq b^R_\alpha, x \geqq 0, \alpha \in [0,1]\}$$

によって定義する。

以下では，議論を簡単にするため，$\Phi^P_2(1)\equiv\langle c, x^1\rangle$ および $\Phi^P_2(0) \equiv \langle c, x^0\rangle$ が存在すると仮定し，$Z^0 \equiv (\Phi^P_2(0), +\infty), Z^1 \equiv (-\infty, \Phi^P_2(1)]$ および $Z^2 \equiv [\Phi^P_2(1), \Phi^P_2(0)]$ とおく。

このとき，つぎの定理が成立する。

**定理 3.4.** 問題 $(\mathrm{FLP}^{P}_{2z})$ において，つぎのことが，成立する。

$$\Psi^P_2(z)=\begin{cases} -\infty \ \text{iff} & z\in Z^0,\\ 1 \ \text{iff} & z \in Z^1,\\ \alpha\in[0,1] \ \text{iff} & z\in Z^2.\end{cases}$$

**定理 3.5.** $z \in Z^2$ を任意の実数とする。$(x^*, \alpha^*)$ を問題 $(\mathrm{FLP}^{P}_{2z})$ の最適解とし，

$$\sum_{j=1}^{n} a^L_{ij\alpha^*} d_j < 0, \quad i \in I_1(x^*), \tag{2}$$
$$d_i \geqq 0, \quad i \in I_2(x^*) \tag{3}$$

を満たすベクトル $d \in R^n$ が存在するものとする。ただし

$$I_1(x^*) \equiv \{i \in \{1, 2, \cdots, m\} \mid \sum_{j=1}^{n} a^L_{ij\alpha^*} x^*_j = b^R_{i\alpha^*}\},$$
$$I_2(x^*) \equiv \{i \in \{1, 2, \cdots, n\} \mid x^*_i = 0\},$$

である。このとき，ベクトル $x^*$ は問題 $(\mathrm{FLP}^{P}_{2\alpha^*})$ の最適解である。

**定理 3.6.** $\alpha^*\in[0,1]$を任意の実数とする。ベクトル$x^*\in R^n$を問題$(\mathrm{FLP}^{\mathrm{P}}_{2\alpha^*})$の最適解とし，

$$\langle c, d\rangle>0,\ d_i\geqq 0,\ i\in I_2(x^*) \tag{4}$$

を満たすベクトル$d\in R^n$が存在するものとする。このとき，$(x^*, \alpha^*)$は問題$(\mathrm{FLP}^{\mathrm{P}}_{2z^*})$の最適解である。ただし，$z^*=\langle c, x^*\rangle$である。

定理 3.5 および 3.6 から，問題$(\mathrm{FLP}^{\mathrm{P}}_{2z})$および$(\mathrm{FLP}^{\mathrm{P}}_{2\alpha^*})$において，

$$z=\Phi^P_2(\Psi^P_2(z)),\quad \forall z\in Z^2,$$
$$\alpha=\Psi^P_2(\Phi^P_2(\alpha)),\quad \forall \alpha\in[0,1]$$

が成立することがわかる。

最後に，ファジィ数が目的関数と制約条件式の両方に含まれる場合を考えよう。

$$(\mathrm{FLP})\quad\left|\begin{array}{ll}\text{maximize}_x & \langle\tilde{c}, x\rangle_F\\ \text{subject to} & \tilde{A}x\leqq\tilde{b},\ x\geqq 0.\end{array}\right.$$

問題(FLP)に対し，可能性最大化問題を

$$(\mathrm{FLP}^{\mathrm{P}}_z)\quad\left|\begin{array}{ll}\text{maximize}_x & (\mathrm{Pos}(\langle\tilde{c}, x\rangle_F\geqq z),\ \mathrm{Pos}(\tilde{A}x\leqq\tilde{b}))\\ \text{subject to} & x\geqq 0\end{array}\right.$$

によって定義しよう。ただし，$z\in R$はパラメータである。

問題$(\mathrm{FLP}^{\mathrm{P}}_z)$に対して，逆問題をつぎのように定義しよう。

$$(\mathrm{FLP}^{\mathrm{P}}_{\alpha\beta})\quad\left|\begin{array}{ll}\text{maximize}_{x,z} & z\\ \text{subject to} & \mathrm{Pos}(\langle\tilde{c}, x\rangle_F\geqq z)\geqq\alpha,\\ & \mathrm{Pos}(\tilde{A}x\leqq\tilde{b})\geqq\beta,\ x\geqq 0,\end{array}\right.$$

ただし，$\alpha,\ \beta\in[0,1]$はパラメータである。

問題$(\mathrm{FLP}^{\mathrm{P}}_z)$および$(\mathrm{FLP}^{\mathrm{P}}_{\alpha\beta})$はそれぞれつぎの問題と同値である。

$$(\mathrm{FLP}_z^{\mathrm{P}})\quad \left|\begin{array}{ll} \text{maximize}_{x,\alpha,\beta} & (\alpha, \beta) \\ \text{subject to} & \langle c_\alpha^R, x\rangle \geqq z, \\ & A_\beta^L x \leqq b_\beta^R,\ x \geqq 0,\ \alpha, \beta \in [0, 1], \end{array}\right.$$

$$(\mathrm{FLP}_{\alpha\beta}^{\mathrm{P}})\quad \left|\begin{array}{ll} \text{maximize}_{x} & \langle c_\alpha^R, x\rangle \\ \text{subject to} & A_\beta^L x \leqq b_\beta^R,\ x \geqq 0. \end{array}\right.$$

ところで，問題 $(\mathrm{FLP}_z^{\mathrm{P}})$ は 2 つの目的関数をもつベクトル値最適化問題であり，一般に最適解は存在しない。そこで問題 $(\mathrm{FLP}_z^{\mathrm{P}})$ に対してパレート最適解をつぎのように定義しよう。

**定義 3.1.** 問題 $(\mathrm{FLP}_z^{\mathrm{P}})$ の実行可能解 $(x^*, \alpha^*, \beta^*)$ は $(\alpha^*, \beta^*) \leq (\alpha, \beta)$ を満たす他の実行可能解 $(x, \alpha, \beta)$ が存在しないとき，パレート最適解といわれる。

さて，問題 $(\mathrm{FLP}_z^{\mathrm{P}})$ および $(\mathrm{FLP}_{\alpha\beta}^{\mathrm{P}})$ に対し，最適値写像およびパレート最適値写像をそれぞれ

$$\Phi^P(\alpha, \beta) \equiv \sup\{\langle c_\alpha^R, x\rangle \mid A_\beta^L x \leqq b_\beta^R,\ x \geqq 0\}, \tag{5}$$

$$\Psi^P(z) \equiv \sup\{(\alpha, \beta) \mid \langle c_\alpha^R, x\rangle \geqq z,\ A_\beta^L x \leqq b_\beta^R,\ x \geqq 0,\ \alpha, \beta \in [0, 1]\} \tag{6}$$

によって定義する。

以下では，$\Phi^P(1, 1) \equiv \langle c_1^R, x^1\rangle$ および $\Phi^P(0, 0) \equiv \langle c_0^R, x^0\rangle$ が存在すると仮定し，$Z^0 \equiv (\Phi^P(0, 0), +\infty)$, $Z^1 \equiv (-\infty, \Phi^P(1, 1))$, $Z^2 \equiv (-\infty, \Phi^P(1, 0))$, $Z^3 \equiv [\Phi^P(1, 1),\ \Phi^P(0, 0)]$, $Z^4 \equiv (-\infty, \Phi^P(1,0))$ および $Z^5 \equiv [\Phi^P(1, 0), \Phi^P(0, 0)]$ とおく。

**定理 3.7.** $z \in Z^5$ を任意の実数とし，$(x^*, \alpha^*, \beta^*)$ を問題 $(\mathrm{FLP}_z^{\mathrm{P}})$ のパレート最適解とする。このとき，$x^*$ は問題 $(\mathrm{FLP}_{\alpha^*\beta^*}^{\mathrm{P}})$ の最適解である。

**定理 3.8.** $z \in Z^3$ を任意の実数とし，$(x^*, \alpha^*, \beta^*)$ を問題 $(\mathrm{FLP}_z^{\mathrm{P}})$ のパレート最適解とする。さらに，(2) および (3) を満たすベクトル $d \in R^n$ が存在する

ものとする。このとき，ベクトル $x^*$ は問題 $(\mathrm{FLP}^{\mathrm{P}}{}_{\alpha^*\beta^*})$ の最適解である。

**定理3.9.** $\alpha^*, \beta^* \in [0,1]$ を任意の実数とし，ベクトル $x^*$ を問題 $(\mathrm{FLP}^{\mathrm{P}}{}_{\alpha^*\beta^*})$ の最適解とする。さらに，

$$\langle c^R_{\alpha^*},\ d\rangle > 0,\ d_i \geqq 0,\ i \in I_2(x^*) \tag{7}$$

を満たすベクトル $d \in R^n$ が存在すると仮定する。このとき，$(x^*, \alpha^*, \beta^*)$ は問題 $(\mathrm{FLP}^{\mathrm{P}}_{z^*})$ のパレート最適解である。ただし，$z^* = \langle c^R_{\alpha^*},\ x^*\rangle$ である。

定理3.8および3.9から，

$$
\begin{array}{ll}
z \in \Phi^P(\Psi^P(z)), & \forall z \in Z^3, \\
(\alpha, \beta) \in \Psi^P(\Phi^P(\alpha,\ \beta)), & \forall \alpha,\ \beta \in [0,1]
\end{array}
$$

が成立することがわかる。

## 4．双　対　性

ここでは，前節で定義した問題 $(\mathrm{FLP}_1)$ および $(\mathrm{FLP})$ に対し，双対問題を定義しよう。まずはじめに，問題 $(\mathrm{FLP}_1)$ に対し，双対問題を定義し，いわゆる双対定理が成立することを示そう。

問題 $(\mathrm{FLP}_1)$ に付随する可能性最大化問題 $(\mathrm{FLP}^{\mathrm{P}}_{1z})$ に対する逆問題 $(\mathrm{FLP}^{\mathrm{P}}_{1\alpha})$ は，実数を係数とする通常の線形計画問題である。したがって，双対問題は

$$
(\mathrm{DFLP}^{\mathrm{P}}_{1\alpha})\ \left|\ 
\begin{array}{ll}
\text{minimize}_y & \langle b,\ y\rangle \\
\text{subject to} & A^T y \geqq c^R_\alpha,\ y \geqq 0,
\end{array}\right.
$$

となる。ただし，$A^T$ は行列 $A$ の転置を表す。

$A^T y \geqq c^R_\alpha$ iff $\mathrm{Pos}(A^T y \leqq \tilde{c}) \leqq \alpha$ であることに注意すると，問題 $(\mathrm{DFLP}^{\mathrm{P}}_{1\alpha})$ は，

$$(\mathrm{DFLP}^{\mathrm{P}}_{\mathrm{I}\alpha})\quad \left|\begin{array}{ll}\text{minimize}_y & \langle b,\ y\rangle \\ \text{subject to} & \mathrm{Pos}(A^T y \leqq \tilde{c}) \leqq \alpha,\ y \geqq 0\end{array}\right.$$

となる。したがって，問題 $(\mathrm{DFLP}^{\mathrm{P}}_{\mathrm{I}\alpha})$ に対する逆問題は，

$$(\mathrm{DFLP}^{\mathrm{P}}_{\mathrm{I}\omega})\quad \left|\begin{array}{ll}\text{minimize}_x & \mathrm{Pos}(A^T y \leqq \tilde{c}) \\ \text{subject to} & \langle b, y\rangle \leqq \omega,\ y \geqq 0\end{array}\right.$$

となる。ただし，$\omega \in R$ はパラメータである。

さて，問題 $(\mathrm{DFLP}^{\mathrm{P}}_{\mathrm{I}\alpha})$ および $(\mathrm{DFLP}^{\mathrm{P}}_{\mathrm{I}\omega})$ に対し，最適値写像をそれぞれ

$$\Phi^{DP}_{\mathrm{I}}(\alpha) \equiv \inf\{\langle b, y\rangle \mid A^T y \geqq c^R_\alpha,\ y \geqq 0\},$$
$$\Psi^{DP}_{\mathrm{I}}(\omega) \equiv \inf\{\alpha \mid \langle b,\ y\rangle \leqq \omega,\ A^T y \geqq c^R_\alpha,\ y \geqq 0,\ \alpha \in [0,\ 1]\}$$

によって定義する。ただし，$\inf\{\emptyset\} \equiv +\infty$ とする。

以下では，議論を簡単にするため，$\Phi^{DP}_{\mathrm{I}}(0) \equiv \langle b,\ y^0\rangle$ が存在するものと仮定し，$W^0 \equiv (\Phi^{DP}_{\mathrm{I}}(1), +\infty)$，$W^1 \equiv (-\infty,\ \Phi^{DP}_{\mathrm{I}}(0)]$，$W^2 \equiv [\Phi^{DP}_{\mathrm{I}}(0),\ \Phi^{DP}_{\mathrm{I}}(1)]$ とおく。このとき，問題 $(\mathrm{DFLP}^{\mathrm{P}}_{\mathrm{I}\alpha})$ と $(\mathrm{DFLP}^{\mathrm{P}}_{\mathrm{I}\omega})$ の間につぎの関係が成立する。

**定理 4.1.** $\omega \in W^2$ を任意の実数とし，$(y^*,\ \alpha^*)$ を問題 $(\mathrm{DFLP}^{\mathrm{P}}_{\mathrm{I}\omega})$ の最適解とする。さらに，

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} d_i > 0,\ j \in I_1(y^*),$$
$$d_j \geqq 0,\ j \in I_2(y^*)$$

を満たす $d \in R^m$ が存在するものとする。ただし，

$$I_1(y^*) \equiv \{j \in \{1, 2, \cdots,\ n\} \mid \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y^*_i = c^R_{j\alpha^*}\},$$
$$I_2(y^*) \equiv \{j \in \{1, 2, \cdots,\ m\} \mid y^*_j = 0\}$$

である。このとき，ベクトル $y^*$ は問題 $(\mathrm{DFLP}^{\mathrm{P}}_{\alpha^*})$ の最適解である。

**定理 4.2.** $\alpha^* \in [0,\ 1]$ を任意の実数とし，ベクトル $y^*$ を問題 $(\mathrm{DFLP}^{\mathrm{P}}_{\mathrm{I}\alpha^*})$ の最適解とする。さらに，

$$\langle b,\ d\rangle < 0,\ d_i \geqq 0,\ i \in I_2(y^*) \tag{8}$$

を満たす $d \in R^m$ が存在するものとする。このとき，$(y^*, \alpha^*)$ は問題 $(\mathrm{DFLP}^{\mathrm{P}}_{1\omega^*})$ の最適解である。ただし，$\omega^* = \langle b, y^*\rangle$ である。

さて，問題 $(\mathrm{FLP}^{\mathrm{P}}_{1z})$ と $(\mathrm{DFLP}^{\mathrm{P}}_{1\omega})$ の間に双対関係が成立することを示そう。

**定理 4.3.** $z \in R$ を任意の実数とし，$(x, \alpha)$ および $(y, \beta)$ をそれぞれ問題 $(\mathrm{FLP}^{\mathrm{P}}_{1z})$ および $(\mathrm{DFLP}^{\mathrm{P}}_{1z})$ の任意の実行可能解とする。このとき，

$$\alpha \leqq \beta \tag{9}$$

が成立する。

**定理 4.4.** $z \in R$ を任意の実数とし，$(x, \alpha)$ および $(y, \alpha)$ をそれぞれ問題 $(\mathrm{FLP}^{\mathrm{P}}_{1z})$ および $(\mathrm{DFLP}^{\mathrm{P}}_{1z})$ の任意の実行可能解とする。このとき，$(x, \alpha)$ は問題 $(\mathrm{FLP}^{\mathrm{P}}_{1z})$ の最適解であり，$(y, \alpha)$ は問題 $(\mathrm{DFLP}^{\mathrm{P}}_{1z})$ の最適解である。

**定理 4.5.** $z \in Z^2$ を任意の実数とし，$(x^*, \alpha^*)$ を問題 $(\mathrm{FLP}^{\mathrm{P}}_{1z})$ の最適解とする。さらに，(8) を満たすベクトル $d \in R^m$ が存在するものとする。このとき，あるベクトル $x^* \in R^n$ が存在して，$(x^*, \alpha^*)$ が問題 $(\mathrm{FLP}^{\mathrm{P}}_{1z})$ の最適解となる。

最後に，問題 (FLP) に対して，双対問題を定義しよう。問題 $(\mathrm{FLP}^{\mathrm{P}}_{\alpha\beta})$ は，線形計画問題なので，双対問題は，

$$(\mathrm{DFLP}^{\mathrm{P}}_{\alpha\beta}) \left|\begin{array}{ll} \text{minimize}_y & \langle b^R_\beta, y\rangle \\ \text{subject to} & A^{LT}_\beta y \geqq c^R_\alpha,\ y \geqq 0 \end{array}\right.$$

となる。これは，つぎの問題と同値である。

$$
(\mathrm{DFLP}^{\mathrm{P}}_{\alpha\beta})\quad
\begin{array}{|lll}
\text{minimize}_{y,\omega} & \omega & \\
\text{subject to} & \mathrm{Pos}(\langle \tilde{b}, y\rangle \leqq \omega) \leqq \beta, & \\
 & \mathrm{Pos}(\tilde{A}^T y \geqq \upsilon) \leqq \beta, & \\
 & \mathrm{Pos}(\upsilon \geqq \tilde{c}) \leqq \alpha,\ y \geqq 0. &
\end{array}
$$

したがって，問題 $(\mathrm{DFLP}^{\mathrm{P}}_{\alpha\beta})$ に対する逆問題は

$$
(\mathrm{DFLP}^{\mathrm{P}}_{\omega})\quad
\begin{array}{|ll}
\text{minimize}_{y,\alpha,\beta} & (\alpha, \beta) \\
\text{subject to} & \mathrm{Pos}(\langle \tilde{b}, y\rangle \leqq \omega) \leqq \beta, \\
 & \mathrm{Pos}(\tilde{A}^T y \geqq \upsilon) \leqq \beta, \\
 & \mathrm{Pos}(\upsilon \geqq \tilde{c}) \leqq \alpha, \\
 & \alpha, \beta \in [0,1]
\end{array}
$$

となる。ただし，$\upsilon \in R^n$ および $\omega \in R$ はパラメータである。

さて，問題 $(\mathrm{DFLP}^{\mathrm{P}}_{\alpha\beta})$ および $(\mathrm{DFLP}^{\mathrm{P}}_{\omega})$ に対し，最適値写像およびパレート最適値写像をそれぞれ

$$
\begin{aligned}
\Phi^{DP}(\alpha, \beta) &\equiv \inf\{\langle b^R_\beta, y\rangle \mid A^{LT}_\beta y \geqq c^R_\alpha,\ y \geqq 0\}, \\
\Psi^{DP}(\omega) &\equiv \inf\{(\alpha, \beta) \mid \langle b^R_\beta, y\rangle \leqq \omega,\ A^{LT}_\beta x \geqq c^R_\alpha,\ y \geqq 0, \alpha, \beta \in [0,0]\}
\end{aligned}
$$

によって定義しよう。以下では，議論を簡単にするため，$\Phi^{DP}(1,1) \equiv \langle b^R_0, y^1\rangle$ および $\Phi^{DP}(0,0) \equiv \langle b^R_0, y^0\rangle$ が存在すると仮定し，$W^0 \equiv (-\infty, \Phi^{DP}(1,1)]$, $W^1 \equiv [\Phi^{DP}(1,1), \Phi^{DP}(0,0)]$, $W^2 \equiv [\Phi^{DP}(1,1), \Phi^{DP}(1,0)]$ および $W^3 \equiv (\Phi^{DP}(0,0), +\infty)$ とおく。

**定理 4.6.** $\omega \in W^2$ を任意の実数とし，$(y^*, \alpha^*, \beta^*)$ を問題 $(\mathrm{DFLP}^{\mathrm{P}}_{\omega})$ のパレート最適解とする。さらに，

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij\beta^*}^{L} d_i > 0,\ j \in I_1(y^*), \tag{10}$$

$$d_i \geqq 0,\ i \in I_2(y^*) \tag{11}$$

を満たす $d \in R^m$ が存在するものとする。このとき，$y^*$ は問題 $(\mathrm{DFLP}^{\mathrm{P}}_{\alpha^*\beta^*})$ の最適解である。ただし，

$$I_1(y^*) \equiv \{j \in \{1,\ 2,\ \cdots,\ n\} \mid \sum_{i=1}^{m} a_{ij\beta^*}^{L} y_i^* = c_{j\alpha^*}^{R}\},$$

$$I_2(y^*) \equiv \{j \in \{1,\ 2,\ \cdots,\ n\} \mid y_j^* = 0\}$$

である。

**定理 4.7.** $\alpha^*, \beta^* \in [0, 1]$ を任意の実数とし，$y^*$ を問題 $(\mathrm{DFLP}^{\mathrm{P}}_{\alpha^*\beta^*})$ の最適解とする。さらに，

$$\langle b^{R}_{\beta^*}, d\rangle < 0,\ d_i \geqq 0,\ i \in I_2(y^*) \tag{12}$$

を満たすベクトル $d \in R^n$ が存在するものとする。このとき，$(y^*, \alpha^*, \beta^*)$ は問題 $(\mathrm{DFLP}^{P}_{\omega})$ のパレート最適解である。ただし，$\omega = \langle b^{R}{}_{\beta^*}, y^*\rangle$ である。

問題 $(\mathrm{FLP}^{\mathrm{P}}_{z})$ と $(\mathrm{DFLP}^{\mathrm{P}}{}_{\alpha^*\beta^*})$ の間には，つぎの双対定理が成立する。

**定理 4.8.** $z \in Z^2$ を任意の実数とし，$(x, \alpha, \beta)$ および $(y, \alpha', \beta')$ をそれぞれ問題 $(\mathrm{FLP}^{\mathrm{P}}_{z})$ および $(\mathrm{DFLP}^{\mathrm{P}}_{z})$ の任意の実行可能解とする。このとき，

$$(\alpha',\ \beta') \leq (\alpha,\ \beta) \tag{13}$$

は成立しない。

**定理 4.9.** $z \in Z^2$ を任意の実数とし，$(x,\ \alpha,\ \beta)$ および $(y,\ \alpha,\ \beta)$ をそれぞれ問題 $(\mathrm{FLP}^{\mathrm{P}}_{z})$ および $(\mathrm{DFLP}^{\mathrm{P}}_{z})$ の任意の実行可能解とする。このとき，$(x,\ \alpha,\ \beta)$ は問題 $(\mathrm{FLP}^{\mathrm{P}}_{z})$ のパレート最適解であり，他方，$(y,\ \alpha,\ \beta)$ は問題 $(\mathrm{DFLP}^{\mathrm{P}}_{z})$ のパレート最適解である。

## 5. おわりに

本論文では，与えられたファジィ線形計画問題に対し，可能性最大化問題と逆問題とよばれる目標値最大化問題を定義し，これら2つの問題の間に成立する関係を調べた。さらに，この関係を利用して，ファジィ線形計画問題に対し，双対定理を導いた。

ところで，ここでは，ファジィ線形計画問題に対し，可能性最大化問題を定義したが，可能性測度にかえて，必然性測度を用いた必然性最大化問題とその逆問題を考察することも可能である。この場合でも，本論文の定理はそのまま成立する。特に，双対問題に関しては，可能性測度による定式化よりも必然性測度による定式化の方が，興味深い結果がえられることが知られている。さらに，ここでのアプローチは，多目的ファジィ線形計画問題に対しても，同様に適用することができる。

本論文は，京都大学数理解析研究所で開催された研究集会『離散数理と連続数理における最適化理論』(1997年7月16日～18日) での報告を修正，加筆したものである。

**【参考文献】**


[1] Dubois, D. and H. Prade "Ranking fuzzy numbers in the setting of possibilty theory", *Information Science*, Vol. 30, 1983, pp.183-224.

[2] 乾口雅弘，久米靖文「ファジィ多目的計画問題の解に対する概念」，日本ファジィ学会誌，No. 2, 1990, pp.65－78.

[3] 前田隆『多目的意思決定と経済分析』牧野書店，1996.

[4] 坂和正敏『ファジィ理論の基礎と応用』森北出版，1989.

[5] Sakawa, M. and H. Yano, "Feasibility and Pareto optimality for multiobjective programming problems with fuzzy parameters", *Fuzzy set and systems*, Vol. 43, No. 1, 1991, pp.1-15.