凸多目的最適化問題とその逆問題について

前　田　　隆

1．はじめに

数理計画法では，数理計画問題が与えられたとき，これに付随する問題として双対問題がよく知られているが，本論文では，与えられた問題の目的関数と制約関数を交換し，そしてminimize (maximize)をmaximize (minimize)で置き換えた問題を考察する。このような問題は逆問題とよばれ，Cassidy, Field, and Sutherland[1] によって，これら2つの問題の最適解と最適値の関係が示された。その後，Mangasarian[4] は，線形ベクトル値最小化問題に対して逆問題を定義し，2つの問題が共通のパレート最適解をもつための条件を与えた。

このような逆問題は，経済分析において双対アプローチとよばれている。例えば，家計は与えられた予算制約の下で，自己の効用が最大となるように消費計画を決定すると仮定されている(効用最大化問題)。これに対して，双対アプローチでは，家計は一定水準以上の効用を保証する消費計画の中で，支出額が最も少ないものを選択すると仮定されている(支出最小化問題)。この場合，効用最大化問題の最適解は費用最小化問題の最適解であることが知られている。

本論文の目的は，与えられた非線形のベクトル値最小化問題に対して，逆問題であるベクトル値最大化問題を定義し，これら2つの問題の(弱)パレート最適解集合と(弱)パレート最適値写像の間に成立する関係を調べることである。さらに，これらの問題に共通するシンメトリックラグランジュ関数とその鞍点を定義し，鞍点の存在性とこれらの問題の(弱)パレート最適解および(弱)パレート最適値写像との関係を考察する。このため，第2節では，以

下の分析で必要とされる定義と基本的な結果を与える。第3節では，2つの問題の間に成立する関係が示される。第4節では，シンメトリックラグランジュ関数を定義し，鞍点と逆問題の関係が調べられる。第5節では，線形多目的計画問題に対し，逆問題が定義される。

2．問題の定式化と基本的結果

ここでは，以下の分析に用いられる記号，定義および基本的な結果を与える。

R^n を n 次元ユークリッド空間とし，$x\equiv(x_1, x_2, \cdots, x_n)^T \in R^n$ とする。ただし，$x_i \in R, i=1,2,\cdots,n$ であり，T はベクトルの転置を表す。R^n の非負象限を $R_+{}^n \equiv \{x \in R^n | x_i \geqq 0, i=1,2,\cdots,n\}$ によって表す。任意のベクトル $x, y \in R^n$ に対し，内積を $\langle x, y\rangle \equiv \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ によって表す。$x, y \in R^n$ に対し，

$$x \leqq y \quad \text{iff} \quad x_i \leqq y_i,\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ n$$

$$x \leq y \quad \text{iff} \quad x_i \leqq y_i,\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ n,\ x \neq y$$

$$x < y \quad \text{iff} \quad x_i < y_i,\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ n$$

とかく。

空でない部分集合 $S \subseteq R^n$ に対し，$S^* \equiv \{y \in R^n | \langle x,y\rangle \leqq 0, \forall x \in S\}$ を S の極錐という。定義から明らかなように，極錐は空でない閉凸錐である。

$S \subseteq R^n$ を空でない任意の部分集合とし，$x^o \in S$ とする。ベクトル $d \in R^n$ はゼロに収束する正の実数列 $\{t_n\}$ および d に収束する点列 $\{d^n\}$ が存在して，すべての自然数 n に対し，$x^o + t_n d^n \in S$ が成立するとき，S の x^o における接ベクトルといわれる。S の x^o における接ベクトルの全体からなる集合を接錐といい，$T(S\,;x^o)$ とかく。S の x^o における接錐の極錐 $T(S\,;x^o)^*$ を S の x^o における normal cone といい，$N(S\,;x^o)$ かく。

$f : R^n \to R$ を $x^o \in R^n$ において連続微分可能な実数値関数とする。このとき，f の x^o における勾配ベクトルを $\nabla f(x^o)$ によって表す。ただし，$\nabla f(x^o)$ は横ベクトルとする。

ベクトル値関数 $f \equiv (f_1, f_2, \cdots, f_\ell)^T : R^n \to R^\ell$ は，各成分 $f_i : R^n \to R$ が凸関数(凹関数)であるとき，凸関数(凹関数)であるといわれる。

$a \in R^\ell$ および $b \in R^m$ を与えられたパラメータとし，$Q_0 \subseteq R^n$ を空でない任意の凹集合とし，$f_i : R^n \to R,\ i=1, 2, \cdots, \ell$ を連続微分可能な凸関数とし，$g_j : R^n \to R,\ j=1, 2, \cdots, m$ を連続微分可能な凹関数とする。このとき，つぎのベクトル値最適化問題を考えよう。

$$(\mathrm{P}_1)\quad \left|\begin{array}{l} \text{minimize}\quad f(x) \equiv (f_1(x), f_2(x), \cdots, f_\ell(x))^T \\ \text{subject to}\ x \in Q(g\,;b) \equiv Q_0 \cap \{x \in R^n \mid g_j(x) \geqq b_j,\ j=1, 2, \cdots, m\} \end{array}\right.$$

$$(\mathrm{P}_2)\quad \left|\begin{array}{l} \text{maximize}\quad g(x) \equiv (g_1(x), g_2(x), \cdots, g_m(x))^T \\ \text{subject to}\ x \in Q(f\,;a) \equiv Q_0 \cap \{x \in R^n \mid f(x) \leqq a\} \end{array}\right.$$

ベクトル値最大化問題 (P_2) は，(P_1) の逆問題とよばれる。このとき，問題 (P_1) は (P_2) の逆問題である。

問題 (P_1) および (P_2) に対し，最適解を以下のように定義する。

定義 2.1. $x^o \in Q(g\,;b)$ は $f(x) \leq f(x^o)$ を満たす $x \in Q(g\,;b)$ が存在しないとき，問題 (P_1) のパレート最小解といわれる。$x^o \in Q(f\,;a)$ は $g(x^o) \leq g(x)$ を満たす $x \in Q(f\,;a)$ が存在しないとき，問題 (P_2) のパレート最大解といわれる。

定義 2.2. $x^o \in Q(g\,;b)$ は $f(x) < f(x^o)$ を満たす $x \in Q(g\,;b)$ が存在しないとき，問題 (P_1) の弱パレート最小解といわれる。$x^o \in Q(f\,;a)$ は $g(x^o) < g(x)$ を満たす $x \in Q(f\,;a)$ が存在しないとき，問題 (P_2) の弱パレート最大解といわれる。

問題 (P_1) および (P_2) に対し，

$\Phi(b) \equiv \{f(x) \in R^\ell \mid x \in Q(g\,;b)$ は問題 (P_1) のパレート最小解$\}$

$\Phi^\omega(b) \equiv \{f(x) \in R^\ell \mid x \in Q(g\,;b)$ は問題 (P_1) の弱パレート最小解$\}$

$\Psi(a) \equiv \{g(x) \in R^m \mid x \in Q(f\,;a)$ は問題 (P_2) のパレート最大解$\}$

$\Psi^\omega(a) \equiv \{g(x) \in R^m \mid x \in Q(f\,;a)$ は問題 (P_2) の弱パレート最大解$\}$

とおき，それぞれ，パレート最小値写像，弱パレート最小値写像，パレート最大値写像および弱パレート最大値写像とよぶ。

$x^o \in Q(g\,;b)$ を任意にとろう。このとき，

$$J(x^o) \equiv \{j \in \{1,\ 2, \cdots, m\} \mid g_j(x^o) = b_j\}$$

とおく。同様に，$x^o \in Q(f\,;a)$ に対し，

$$I(x^o) \equiv \{i \in \{1,\ 2, \cdots, \ell\} \mid f_i(x^o) = a_i\}$$

とおく。

問題 (P_1) および (P_2) に対し，以下の補題が成立する。各補題の証明については，前田［3］を参照されたい。

補題 2.1. $x^o \in Q(g\,;b)$ が問題 (P_1) の弱パレート最小解であれば，

$$\nabla f(x^o) d < 0 \tag{1}$$

$$\langle \nabla g_j(x^o), d \rangle > 0, \quad j \in J(x^o) \tag{2}$$

を満たす $d \in T(Q_0\,;x^o)$ は存在しない。ただし，$\nabla f(x^o)$ は第 i 行が $\nabla f_i(x^o)$ である ℓ 行 n 列行列である。

補題 2.2. $x^o \in Q(g\,;b)$ が問題 (P_1) の弱パレート最小解であれば，

$$\langle \sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i \nabla f_i(x^o) - \sum_{j=1}^{m} \mu_j \nabla g_j(x^o),\ d \rangle \geqq 0, \quad \forall\, d \in N(Q_0\,;x^o) \tag{3}$$

$$\mu_j(g_j(x^o) - b_j) = 0, \quad j = 1, 2, \cdots, m \tag{4}$$

$$\lambda \equiv (\lambda_1,\ \lambda_2, \cdots, \lambda_\ell)^T \geqq 0, \quad \mu \equiv (\mu_1,\ \mu_2, \cdots, \mu_m)^T \geqq 0 \tag{5}$$

を満たす同時にはゼロではないベクトル $\lambda \in R^\ell, \mu \in R^m$ が存在する。

補題 2.3. $x^o \in Q(g;b)$ を問題 (P_1) の実行可能解とし，$< \nabla g_j(x^o),\ d > > 0$, $j \in J(x^o), d \in T(Q_0\,;x^o)$ を満たす $d \in R^n$ が存在するものとする。このとき，x^o が問題 (P_1) の弱パレート最小解であるための必要十分条件は，(3), (4)および

$$\lambda \equiv (\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_\ell)^T \geq 0,\ \mu \equiv (\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_m)^T \geqq 0 \tag{6}$$

を満たす $\lambda \in R^\ell$, $\mu \in R^m$ が存在することである。

補題 2.4. $x^o \in Q(g\,;b)$ を問題 (P_1) の実行可能解とし，各 $i = 1, 2, \cdots, \ell$ に対し，

$$\langle \nabla f_k(x^o),\ d^i \rangle < 0, \quad k=1,2,\cdots,\ell,\ k \neq i \tag{7}$$

$$\langle \nabla g_j(x^o),\ d^i \rangle > 0, \quad j \in J(x^o) \tag{8}$$

を満たす $d^i \in T(Q_0\,;x^o)$ が存在するものとする。このとき，x^o が問題 (P_1) のパレート最小解であるための必要十分条件は，

$$\langle \sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i \nabla f_i(x^o) - \sum_{j=1}^{m} \mu_j \nabla g_j(x^o),\ d \rangle \geqq 0, \quad \forall d \in N(Q_0;x^o) \tag{9}$$

$$\mu_j(g_j(x^o)-b_j)=0, \quad j=1,2,\cdots,m \tag{10}$$

$$\lambda \equiv (\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_\ell)^T > 0, \quad \mu \equiv (\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_m)^T \geqq 0 \tag{11}$$

を満たす $\lambda \in R^\ell$, $\mu \in R^m$ が存在することである。

補題 2.5. $x^o \in Q(f\,;a)$ が問題 (P_2) の弱パレート最大解であれば，

$$\langle \nabla f_i(x^o),\ d \rangle < 0,\ i \in I(x^o) \tag{12}$$

$$\nabla g(x^o) d > 0 \tag{13}$$

を満たす $d \in T(Q_0\,;x^o)$ は存在しない。

補題 2.6. $x^o \in Q(f\,;a)$ が問題 (P_2) の弱パレート最大解であれば，

$$\langle \sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i \nabla f_i(x^o) - \sum_{j=1}^{m} \mu_j \nabla g_j(x^o),\ d \rangle \geqq 0, \quad \forall d \in N(Q_0\,;x^o) \tag{14}$$

$$\lambda_i(f_i(x^o)-a_i)=0, \quad i=1,2,\cdots,\ell \tag{15}$$

$$\lambda \equiv (\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_\ell)^T \geqq 0,\ \mu \equiv (\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_m)^T \geqq 0 \tag{16}$$

を満たす同時にはゼロではないベクトル $\lambda \in R^\ell$, $\mu \in R^m$ が存在する。

補題 2.7. $x^o \in Q(f\,;a)$ を問題 (P_2) の実行可能解とし，$< \nabla f_i(x^o), d > < 0, i \in I(x^o), d \in T(Q_0\,;x^o)$ を満たす $d \in R^n$ が存在するものとする。このとき，x^o が問題 (P_2) の弱パレート最大解であるための必要十分条件は，

$$\langle \sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i \nabla f_i(x^o) - \sum_{i=1}^{m} \mu_j \nabla g_j(x^o),\ d \rangle \geqq 0,\ \forall d \in N(Q_0\,;x^o) \tag{17}$$

$$\lambda_i(f_i(x^o)-a_i)=0, \quad i=1,2,\cdots,\ell \tag{18}$$

$$\lambda \equiv (\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_\ell)^T \geqq 0,\ \mu \equiv (\mu_1. \mu_2,\cdots,\mu_m)^T \geq 0 \tag{19}$$

を満たす $\lambda \in R^\ell, \mu \in R^m$ が存在することである。

3．主要な結果

ここでは，問題 (P_1) と (P_2) の間に成立する関係を与えよう。

定理 3.1. $x^o \in Q(g\,;b)$ を問題 (P_1) の弱パレート最小解とする。このとき，$\nabla f(x^o)\bar{d}<0$ を満たす $\bar{d} \in T(Q_0 : x^o)$ が存在すれば，x^o は $a \equiv f(x^o)$ に対する問題 (P_2) の弱パレート最大解である。すなわち，$f(x^o) \in \Phi^\omega(b)$ であれば，$g(x^o) \in \Psi^\omega(f(x^o))$ である。

証明　$g(x^o) \notin \Psi^w(f(x^o))$ と仮定しよう。このとき $f(\bar{x}) \leqq f(x^o)$, $g(\bar{x})>g(x^o)$ を満たす $\bar{x} \in Q_0$ が存在する。仮定から，f は凸関数であり，g は凹関数なので，

$$\nabla f(x^o)(\bar{x}-x^o) \leqq f(\bar{x})-f(x^o) \leqq 0 \tag{20}$$

$$\nabla g(x^o)(\bar{x}-x^o) \geqq g(\bar{x})-g(x^o)>0 \tag{21}$$

が成立する。さらに，Q_0 は凸集合なので，$\bar{x}-x^o \in T(Q_0 : x^o)$ である。$d \equiv \bar{x}-x^o$ とおこう。このとき，十分小さな実数 $t>0$ に対し，

$$\nabla f(x^o)(d+t\bar{d})<0 \tag{22}$$

$$\nabla g(x^o)(d+t\bar{d})>0 \tag{23}$$

$$d+t\bar{d} \in T(Q_0\,; x^o) \tag{24}$$

が成立するが，これは x^o が問題 (P_1) の弱パレート最小解であることに反する。　□

注 3.1. 定理 3.1 において，$g(x^o)>b$ は成立しない。したがって，$J(x^o) \neq \emptyset$ である。さらに，$f(x^o) \in \Phi^w(b)$ であれば，$f(x^o) \in \Phi^w(g(x^o))$ である。したがって $f(x^o) \in \Phi^w(\Psi^\omega(f(x^o)))$, $g(x^o) \in \Psi^\omega(g(x^o))$ が成立する。ただし，$\Phi^\omega(\Psi^\omega(f(x^o))) \equiv \cup_{z \in \Psi^w(f(x^o))} \Phi^\omega(z)$ である。特に，$g(x^o)=b$ であれば，$b \in \Psi^\omega(\Phi^\omega(b))$ である。

定理 3.2. $x^o \in Q(f\,; a)$ を問題 (P_2) の弱パレート最大解とする。このとき，$\nabla g(x^o)\bar{d}>0$ を満たす $\bar{d} \in T(Q_0\,; x^o)$ が存在すれば，x^o は $b \equiv g(x^o)$ に対する問題 (P_1) の弱パレート最小解である。すなわち，$g(x^o) \in \Psi^\omega(a)$ であれば，$f(x^o) \in \Phi^\omega(g(x^o))$ である。

注 3.2. 定理 3.2 において，$f(x^o)<a$ は成立しない。したがって，$I(x^o)\neq\emptyset$ である。さらに，$g(x^o)\in\Psi^\omega(a)$ であれば，$g(x^o)\in\Psi^\omega(f(x^o))$ である。したがって，$f(x^o)\in\Phi^\omega(\Psi^\omega(f(x^o)))$, $g(x^o)\in\Psi^\omega(\Phi^\omega(g(x^o)))$ が成立する。特に，$f(x^o)=a$ であれば，$a\in\Phi^\omega(\Psi^\omega(a))$ である。

定理 3.3. $x^o\in Q(g\,;b)\cap Q(f\,;a)$ において，

$$\nabla f(x^o)d^1<0 \tag{25}$$

$$\nabla g(x^o)d^2>0 \tag{26}$$

を満たす $d^1, d^2\in T(Q_0\,;x^o)$ が存在するものとする。x^o が問題 (P_1) の弱パレート最小解ならば，x^o は $a\equiv f(x^o)$ に対する問題 (P_2) の弱パレート最大解である。逆に，x^o が問題 (P_2) の弱パレート最大解ならば，x^o は $b\equiv g(x^o)$ に対する問題 (P_1) の弱パレート最小解である。すなわち，$f(x^o)\in\Phi^\omega(g(x^o))$ であるための必要十分条件は，$g(x^o)\in\Psi^\omega(f(x^o))$ が成立することである。

定理 3.1, 3.2 および 3.3 から，問題 (P_1), (P_2) において，$f(x^o)\in\Phi^\omega(g(x^o))$ であるための必要十分条件は，$g(x^o)\in\Psi^\omega(f(x^o))$ が成立することである。

定理 3.4. $x^o\in Q(g\,;b)\cap Q(f\,;a)$ において，定理 3.3 の仮定はすべて満たされているものとする。さらに，$f(x^1)\leqq a$, $g(x^1)=b$ および $f(x^2)=a$, $g(x^2)\geqq b$ を満たす $x^1, x^2\in Q_0$ が存在するものとする。このとき，$a\in\Phi^\omega(b)$ であるための必要十分条件は，$b\in\Psi^\omega(a)$ が成立することである。

証明　$a\in\Phi^\omega(b)$ とする。このとき，x^o, x^1 は問題 (P_1) の弱パレート最小解である。ゆえに定理 3.3 から，$g(x^o)\in\Psi^\omega(f(x^o))$ が成立する。さらに，このとき $g(x^o)\in\Psi^\omega(a)$ が成立する。実際，$g(\bar{x})>g(x^o)$, $f(\bar{x})\leqq a$ を満たす $\bar{x}\in Q_0$ が存在すると仮定しよう。任意の実数 $\lambda\in(0,1)$ に対し，$x^\lambda\equiv\lambda\bar{x}+(1-\lambda)x^o$ とおくと，$x^\lambda\in Q_0$, $g(x^\lambda)>g(x^o)\geqq b$, $f(x^\lambda)\leqq a$ である。ゆえに，x^λ は問題 (P_1) の弱パレート最小解である。さらに，f は連続微分可能なので，十分小さな $\lambda>0$ に対し，$\nabla f(x^\lambda)d^1<0$, $d^1\in T(Q_0\,;x^\lambda)$ が成立するが，これは x^λ が問題 (P_1) の弱パレート最小解であることに反する。

$b\notin\Psi^\omega(a)$ であれば，$g(\bar{x})>b$, $f(\bar{x})\leqq a$ を満たす $\bar{x}\in Q_0$ が存在する。この

とき，任意の実数$\lambda\in(0,1)$に対し，$x^{\lambda}\equiv\lambda\bar{x}+(1-\lambda)x^{o}$とおくと，$x^{\lambda}$は問題$(\mathrm{P}_1)$の弱パレート最小解であり，かつ十分小さな実数$\lambda>0$に対し，$\nabla f(x^{\lambda})d^{1}<0,\ d^{1}\in T(Q_0\,;x^{\lambda})$が成立するが，これは$x^{\lambda}$が問題$(\mathrm{P}_1)$の弱パレート最小解であることに反する。ゆえに，$b\in\Psi^{\omega}(a)$が成立する。

逆の証明についても同様である。 □

4．鞍点問題と逆問題

問題(P_1)および(P_2)に関連して，シンメトリックラグランジュ関数(symmetric Lagrangian function) $L:R^{\ell}\times Q_0\times R^{m}\to R$を

$$L(\lambda,x,\mu)\equiv\sum_{i=1}^{\ell}\lambda_i(f_i(x)-a_i)-\sum_{j=1}^{m}\mu_j(g_j(x)-b_j) \tag{27}$$

によって定義しよう。

定義 4.1. $(\lambda^{o},x^{o},\mu^{o})\in R_{+}^{\ell}\times Q_0\times R_{+}^{m}$は，

$$L(\lambda,x^{o},\mu)\leqq L(\lambda^{o},x^{o},\mu^{o})\leqq L(\lambda^{o},x,\mu^{o}),\ \ \forall x\in Q_0,\lambda\in R_{+}^{\ell},\mu\in R_{+}^{m} \tag{28}$$

が成立するとき，Lの鞍点といわれる。

定理 4.1. $(\lambda^{o},x^{o},\mu^{o})\in R_{+}^{\ell}\times Q_0\times R_{+}^{m}$がシンメトリックラグランジュ関数$L$の鞍点であれば，

(i) $f(x^{o})\leqq a,\ g(x^{o})\geqq b$
(ii) $\lambda_i^{o}(f_i(x^{o})-a_i)=0,\ i=1,2,\cdots,\ell$
(iii) $\mu_j^{o}(g_j(x^{o})-b_j)=0,\ j=1,2,\cdots,m$
(iv) $L(\lambda^{o},x^{o},\mu^{o})=0$

が成立する。

証明　$(\lambda^{o},x^{o},\mu^{o})$を$L$の鞍点とする。(28)に$\lambda=\lambda^{o},\mu=\mu^{o}+e^{j},j=1,2,\cdots,m$を代入すると，$g_j(x^{o})-b_j\geqq 0,j=1,2,\cdots,m$がえられる。ただし，$e^{j}\in R^{m}$は第$j$成分が1であり，その他の成分がすべてゼロであるベクトルである。再び，(28)に$\lambda=\lambda^{o},\mu=0$を代入すると，$\sum_{j=1}^{m}\mu_j^{o}(g_j(x^{o})-b_j)\leqq 0$がえられる。$\mu_j^{o}$

$\geqq 0$, $g_j(x^o)-b_j\geqq 0$ なので，$\mu_j^o(g_j(x^o)-b_j)=0$, $j=1,2,\cdots,m$ である。同様にして，$f(x^o)\leqq a$, $\lambda_i^o(f_i(x^o)-a_i)=0$, $i=1,2,\cdots,\ell$ であることが示される。(iv) が成立することは，(ii), (iii)から明らかである。 □

定理 4.2. $(\lambda^o, x^o, \mu^o)\in R_+^\ell\times Q_0\times R_+^m$ をシンメトリックラグランジュ関数 L の鞍点とする。$\lambda^o\geq 0$, $\mu^o\geq 0$ であれば，x^o は問題 (P_1) の弱パレート最小解であり，かつ(P_2) の弱パレート最大解である。すなわち，$f(x^o)\in \Phi^\omega(b)$, $g(x^o)\in \Psi^\omega(a)$ である。

証明　(λ^o,x^o,μ^o) が L の鞍点であれば，定理 4.1 の (i) から，x^o は問題 (P_1), (P_2) の実行可能解である。さらに (iii) から，任意の $x\in Q(g\,;b)$ に対し，

$$\sum_{i=1}^{\ell}\lambda_i^o f_i(x^o)\leqq \sum_{i=1}^{\ell}\lambda_i^o f_i(x)-\sum_{j=1}^{m}\mu_j^o(g_j(x)-b_j)\leqq \sum_{i=1}^{\ell}\lambda_i^o f_i(x)$$

が成立する。$\lambda^o\geq 0$ なので，このとき，$f(x)<f(x^o)$ を満たす $x\in Q(g\,;b)$ は存在しない。ゆえに，x^o は問題 (P_1) の弱パレート最小解である。

同様に，任意の $x\in Q(f\,;a)$ に対し，

$$-\sum_{j=1}^{m}\mu_j^o g_j(x^o)\leqq \sum_{i=1}^{\ell}\lambda_i^o(f_i(x)-a_i)-\sum_{j=1}^{m}\mu_j^o g_j(x)\leqq -\sum_{j=1}^{m}\mu_j^o g_j(x)$$

が成立する。$\mu^o\geq 0$ なので，$g(x)>g(x^o)$ を満たす $x\in Q(f\,;a)$ は存在しない。ゆえに，x^o は問題 (P_2) の弱パレート最大解である。

定理 4.2 において，$f(\bar{x})=a$, $g(\bar{x})\geqq b$ を満たす $\bar{x}\in Q_0$ が存在すれば，$a\in \Phi^\omega(b)$ であり，$f(\hat{x})\leqq a$, $g(\hat{x})=b$ を満たす $\hat{x}\in Q_0$ が存在すれば，$b\in \Psi^\omega(a)$ である。特に，$\lambda^o>0$, $\mu^o>0$ であれば，$f(x^o)=a$, $g(x^o)=b$ である。ゆえに，$a\in \Phi^\omega(b)$, $b\in \Psi_\omega(a)$ が成立する。 □

定理 4.3. $(\lambda^o, x^o, \mu^o)\in R_+^\ell\times Q_0\times R_+^m$ をシンメトリックラグランジュ関数 L の鞍点とする。$\lambda^o>0$, $\mu^o>0$ であれば，x^o は問題 (P_1) のパレート最小解であり，(P_2) のパレート最大解である。すなわち，$f(x^o)\in \Phi(b)$, $g(x^o)\in \Psi(a)$ である。

証明　(λ^o, x^o, μ^o) が L の鞍点であれば，定理 4.1 の (i) から，x^o は問題 (P_1), (P_2) の実行可能解である。仮定から，$\lambda^o>0$, $\mu^o>0$ なので，$f(x^o)=a$, $g(x^o)=b$ である。

さて鞍点の定義から，任意の $x\in Q(g;b)$ に対し，

$$\sum_{i=1}^{\ell}\lambda_i^o f_i(x^o)\leqq\sum_{i=1}^{\ell}\lambda_i^o f_i(x)-\sum_{j=1}^{m}\mu_j^o(g_j(x)-b_j)\leqq\sum_{i=1}^{\ell}\lambda_i^o f_i(x)$$

が成立する。$\lambda^o>0$ なので，このとき，$f(x)\leq f(x^o)$ を満たす $x\in Q(g;b)$ は存在しない。ゆえに，x^o は問題 (P_1) のパレート最小解である。

同様に，任意の $x\in Q(f;a)$ に対し，

$$-\sum_{j=1}^{m}\mu_j^o g_j(x^o)\leqq\sum_{i=1}^{\ell}\lambda_i^o(f_i(x)-a_i)-\sum_{j=1}^{m}\mu_j^o g_j(x)\leqq-\sum_{j=1}^{m}\mu_j^o g_j(x)$$

が成立する。$\mu^o>0$ なので，$g(x)\geq g(x^o)$ を満たす $x\in Q(f;a)$ は存在しない。ゆえに，x^o は問題 (P_2) のパレート最大解である。　□

系 4.1. $(\lambda^o,x^o,\mu^o)\in R_+^\ell\times Q_0\times R_+^m$ をシンメトリックラグランジュ関数 L の鞍点とする。$\lambda^o>0,\mu^o>0$ であれば，$b\in\Psi(\Phi(b)),a\in\Phi(\Psi(a))$ が成立する。

定理 4.4. $x^o\in Q(g;b)$ を問題 (P_1) の弱パレート最小解とし，$f(x^o)=a$ とする。さらに，$\nabla f(x^o)d^1<0,d^1\in T(Q_0;x^o)$ および $\nabla g(x^o)d^2>0,d^2\in T(Q_0;x^o)$ を満たす $d^1,d^2\in R^n$ が存在するものとする。このとき，ある $\lambda^o\geq0,\lambda^o\in R^\ell,\mu^o\geq0,\mu^o\in R^m$ が存在し，(λ^o,x^o,μ^o) は L の鞍点となる。

証明　x^o が問題 (P_1) の弱パレート最小解であれば，

$$\langle\sum_{i=1}^{\ell}\lambda_i^o\nabla f_i(x^o)-\sum_{j=1}^{m}\mu_j^o\nabla g_j(x^o),d\rangle\geqq0,\ \forall d\in N(Q_0;x^o)\tag{29}$$

$$\mu_j^o(g_j(x^o)-b_j)=0,j=1,2,\cdots,m\tag{30}$$

$$\lambda^o\equiv(\lambda_1^o,\lambda_2^o,\cdots,\lambda_\ell^o)^T\geq0,\ \mu^o\equiv(\mu_1^o,\mu_2^o,\cdots,\mu_m^o)^T\geq0\tag{31}$$

を満たす $\lambda^o\in R^\ell,\mu^o\in R^m$ が存在する。$\sum_{i=1}^{\ell}\lambda_i^o f_i-\sum_{j=1}^{m}\mu_j^o g_j:R^n\to R$ は凸関数なので，x^o は $\sum_{i=1}^{\ell}\lambda_i^o f_i-\sum_{j=1}^{m}\mu_j^o g_j$ の最小解である。ゆえに，

$$L(\lambda^o,x^o,\mu^o)\leqq L(\lambda^o,x,\mu^o),\quad\forall x\in Q_0$$

が成立する。さらに仮定から，$f(x^o)=a$ なので，

$$L(\lambda,x^o,\mu)\leqq L(\lambda^o,x^o,\mu^o),\quad \forall\lambda\in R^\ell_+,\ \forall\mu\in R^m_+$$

が成立する。ゆえに，(λ^o,x^o,μ^o) はLの鞍点である。 □

定理 4.5. $x^o\in Q(g\,;b)\cap Q(f\,;a)$ を問題 (P_1) のパレート最小解とし，$f(x^o)=a$ とする。さらに，各 $i=1,2,\cdots,\ell$ に対し，

$$\langle\nabla f_k(x^o),\,d^i\rangle<0,\ k=1,2,\cdots,\ell\ \ k\neq i, \tag{32}$$

$$\langle\nabla g_j(x^o),\,d^i\rangle>0,\ j\in J(x^o) \tag{33}$$

を満たす $d^i\in T(Q_0\,;x^o)$ が存在するものとする。このとき，ある $\lambda^o>0,\lambda^o\in R^\ell,\mu^o\geq0,\mu^o\in R^m$ が存在し，(λ^o,x^o,μ^o) はLの鞍点となる。さらに，各 $j=1,2,\cdots,m$ に対し，

$$\langle\nabla f_i(x^o),\ d^j\rangle<0,\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ell \tag{34}$$

$$\langle\nabla g_h(x^o),\ d^j\rangle>0,\ h=1,\ 2,\ \cdots,m,\ h\neq j \tag{35}$$

を満たす $d^j\in T(Q_0\,;x^o)$ が存在すれば，$\mu^o>0$ である。

証明　x^o が問題 (P_1) のパレート最小解であれば，このとき，

$$\langle\sum_{i=1}^{\ell}\lambda_i^o\nabla f_i(x^o)-\sum_{j=1}^{m}\mu_j^o\nabla g_j(x^o),\,d\rangle\geqq0,\ \forall d\in N(Q_0\,;x^o) \tag{29}$$

$$\mu_j^o(g_j(x^o)-b_j)=0,\ j=1,2,\cdots,m \tag{30}$$

$$\lambda^o\equiv(\lambda_1^o,\lambda_2^o,\cdots,\lambda_\ell^o)^T>0,\ \mu^o\equiv(\mu_1^o,\mu_2^o,\cdots,\mu_m^o)^T\geq0 \tag{38}$$

を満たす $\lambda^o\in R^\ell,\mu^o\in R^m$ が存在する。$\sum_{i=1}^{\ell}\lambda_i^o f_i-\sum_{j=1}^{m}\mu_j^o g_j: R^n\to R$ は凸関数なので，x^o は $\sum_{i=1}^{\ell}\lambda_i^o f_i-\sum_{j=1}^{m}\mu_j^o g_j$ の最小解である。ゆえに，

$$L(\lambda^o,x^o,\mu^o)\leqq L(\lambda^o,x,\mu^o),\ \forall x\in Q_0$$

が成立する。さらに仮定から，$f(x^o)=a$ なので，

$$L(\lambda,x^o,\mu)\leqq L(\lambda^o,x^o,\mu^o),\ \forall\lambda\in R^\ell_+,\ \forall\mu\in R^m_+$$

が成立する。ゆえに，(λ^o,x^o,μ^o) はLの鞍点である。 □

5．線形のケース

つぎの線形ベクトル値最適化問題を考えよう。

$$(\mathrm{LP}_1)\quad \left|\begin{array}{ll} \text{minimize} & Cx \\ \text{subject to} & x \in Q(A\,;b) \equiv \{x \in R^n \mid Ax \geqq b\} \end{array}\right.$$

$$(\mathrm{LP}_2)\quad \left|\begin{array}{ll} \text{maximize} & Ax \\ \text{subject to} & x \in Q(C\,;a) \equiv \{x \in R^n \mid Cx \leqq a\} \end{array}\right.$$

$$(\mathrm{LP}_3)\quad \left|\begin{array}{ll} \text{minimize} & Dx \\ \text{subject to} & x \in Q(A\,;b) \cap Q(C\,;a) \end{array}\right.$$

ただし，$C \in R^{\ell \times n}, A \in R^{m \times n}, D^T \equiv (C^T, -A^T) \in R^{n \times (\ell + m)}$，$a \in R^\ell, b \in R^m$ である。

問題 (LP_1), (LP_2) および (LP_3) の間には，つぎの関係が成立する。

定理 5.1. $x^o \in Q(A\,;b) \cap Q(C\,;a)$ が問題 (LP_1) のパレート最小解であり，かつ (LP_2) のパレート最大解であれば，x^o は問題 (LP_3) のパレート最小解である。逆に，x^o が問題 (LP_3) のパレート最小解であり，かつ $Cx^o = a$, $Ax^o = b$ であれば，x^o は問題 (LP_1) のパレート最小解であり，かつ (LP_2) のパレート最大解である。

証明　x^o が問題 (LP_1) のパレート最小解であり，かつ問題 (LP_2) のパレート最大解であるとしよう。x^o が問題 (LP_3) のパレート最小解でなければ，$D\bar{x} \leq Dx^o$ を満たす $\bar{x} \in R^n$ が存在する。このとき，$C\bar{x} \leq Cx^o$ あるいは $-A\bar{x} \leq -Ax^o$ のいずれかが成立するが，これはx^o が問題 (LP_1) のパレート最小解であり，かつ問題 (LP_2) のパレート最大解であることに反する。

逆に，x^o を問題 (LP_3) のパレート最小解とし，$Cx^o = a, Ax^o = b$ とする。x^o が問題 (LP_1) のパレート最小解でなければ，$C\bar{x} \leq Cx^o, A\bar{x} \geqq b = Ax^o$ を満たす $\bar{x} \in R^n$ が存在するが，これはx^o が問題 (LP_3) のパレート最小解であることに反する。同様にして，x^o が問題 (LP_2) のパレート最大解であることが示される。

定理３.１，３.２と同様にして，以下の定理がえられる。

定理 5.2. $x^o \in Q(A;b)$ を問題 (LP_1) のパレート最小解とする。このとき，$Cd \leq 0$ を満たす $d \in R^n$ が存在すれば，x^o は $a \equiv Cx^o$ に対する問題 (LP_2) のパレート最大解である。

定理 5.3. $x^o \in Q(A;b)$ を問題 (LP_2) のパレート最大解とする。このとき，$Ad \geq 0$ を満たす $d \in R^n$ が存在すれば，x^o は $b \equiv Ax^o$ に対する問題 (LP_1) のパレート最小解である。

定理 5.4. $x^o \in Q(A;b) \cap Q(C;a)$ が問題 (LP_3) のパレート最小解であれば，

$$\lambda^T C - \mu^T A = 0 \tag{39}$$

$$\lambda \equiv (\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_\ell)^T > 0,\ \mu \equiv (\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_m)^T > 0 \tag{40}$$

を満たす $\lambda \in R^\ell$, $\mu \in R^m$ が存在する。

証明　x^o が問題 (LP_3) のパレート最小解であれば，$Dd \leq 0$ を満たす $d \in R^n$ は存在しない。このとき，Gale の二者択一の定理から $(\lambda^T, \mu^T)D = \lambda^T C - \mu^T A = 0$ を満たす $\lambda > 0, \lambda \in R^\ell, \mu > 0, \mu \in R^m$ が存在する。　□

定理 5.5. $x^o \in R^n$ を問題 (LP_3) の実行可能解とする。(39)，(40) を満たす $\lambda \in R^\ell, \mu \in R^m$ が存在すれば，x^o は問題 (LP_3) のパレート最小解である。

証明　x^o を問題 (LP_3) の実行可能解とし，$\lambda > 0, \mu > 0$ を (39) および (40) を満たす任意のベクトルとする。$D\bar{x} \leq Dx^o$ を満たす $\bar{x} \in Q(A;b) \cap Q(C;a)$ が存在すると仮定しよう。このとき，

$$0 = (\lambda^T C - \mu^T A)\bar{x} < (\lambda^T C - \mu^T A)x^o = 0$$

が成立するが，これは矛盾である。　□

定理 5.6. $x^o \in R^n$ を問題 (LP_3) の実行可能解とする。

$$\lambda^T C - \mu^T A = 0 \tag{41}$$

$$\lambda^T a - \mu^T b = 0 \tag{42}$$

$$\lambda \equiv (\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_\ell)^T > 0,\ \mu \equiv (\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_m)^T > 0 \tag{43}$$

を満たす $\lambda \in R^\ell$, $\mu \in R^m$ が存在すれば，x^o は問題 (LP_1) のパレート最小解

であり，問題 (LP$_2$) のパレート最大解である。

証明　定理5.1，5.5から，$Ax^o=b$, $Cx^o=a$ が成立することを示せば十分である。x^o を問題 (LP$_3$) の実行可能解とし，$\lambda\in R^\ell$, $\mu\in R^m$ を(41)，(42) および(43)を満たす任意のベクトルとする。このとき，$Ax^o\geqq b$, $Cx^o\leqq a$ なので，

$$0\geqq\lambda^T(Cx^o-a)-\mu^T(Ax^o-b)=(\lambda^TC-\mu^TA)x^o-(\lambda^Ta-\mu^Tb)=0$$

である。$\lambda>0$, $\mu>0$ なので，$Ax^o=b$, $Cx^o=a$ である。　□

参考文献

[1]　Cassidy, R. G., Field, C. A., and R. S. Sutherland, "Inverse Programming : Theory and Examples", *Mathematical Programming,* Vol. 4, pp. 297-308, 1973.

[2]　Gray, D. F., and W. R. Sutherland, "Inverse Programming and the Linear Vector Maximization Problem", *Journal of Optimization Theory and Applications,* Vol. 30, pp. 523-534, 1980.

[3]　前田隆『多目的意思決定と経済分析』牧野書店，1996.

[4]　「数理計画問題とその逆問題について」『連続と離散の最適化数理予稿集』，1996.

[5]　Mangasarian, O. L., "Solution of the Linear Inverse Vector Optimization Problems By a Single Linear Program", *Mathematical Programming,* Vol. 15, pp. 232-235, 1978.