

動的線形モデルの応用：  
S.Beerの生存可能モデルに関連して

メタデータ	言語: Japanese 出版者: 公開日: 2017-10-03 キーワード (Ja): キーワード (En): 作成者: 平館, 道子 メールアドレス: 所属:
URL	<a href="http://hdl.handle.net/2297/24051">http://hdl.handle.net/2297/24051</a>

# 動的線形モデルの応用

— S. Beerの生存可能モデルに関連して —

平 館 道 子

## 1. 生存可能システムと動的モデル

S. Beerは社会経済的組織に関して、サイバネティクスの観点から生存可能システムのモデルを提唱し、さまざまな規模の実験的な試みを行っている[1]。その基本的な点は社会経済をリアルタイムで調整しようという点にあり、そのために情報を、データバンクに蓄積されたものではなく、その発生源で即座にとらえ、それらを適切に濾過して調整のためのインプットとしようとしたことである。データを発生源でとらえるにはそのためのネットワークが必要であり、それによって集められた情報を分析し濾過するシステムが設計されなければならない。そのシステムの核心としてBeerがとりあげたのがHarrison-Stevens[2]の動的線形モデルである。この目的のための統計分析プログラムは、対象となる工場や企業のような下位のシステムから日々伝送される最新のデータをフィルターにかけ、何か変化が起こっているかどうかを知らせるようなものでなければならない。そしてその変化が重要なものとなりそうかどうかを教える予知的なものであることが必要である。そのフィルタリングシステムが重要な変数の動きを多次元的に追跡し、変化の徴候をとらえて警戒信号を発することができるようなものであれば、不適切な情報を削減することによって、上位のシステムはその信号を受け取ったときだけでなく調整のための行動をとり、情報の氾濫による混乱を回避しながら知るべき事柄はすべて把握できるという状態を保つことができる。この様

な性格の情報収集のネットワークと濾過システムとは、いわば経済の神経システムであり、リアルタイムの調整に欠くことのできないものである。

この様な要請を満たすものとしてHarrison-Stevensの動的線形モデルが選ばれたのである。それは時系列の観測値と根底にあるプロセスに関するダイナミックモデルであり、さらにこのプロセスがいくつかの状態をとる可能性を導入して、構造的変化に対応できる分析システムとなっている。Harrison-Stevensは状態として、1.偶然変動、2.一時的変動、3.勾配の変化、4.トレンド(階段的)変化の4つを時系列の典型的な状態としている。これらを図示すると図1のようになる。理論的には後にみるようにこの4つに限らず、一般的な数に拡張することができる。前二者の状態は調整にとっては“何事も起こっていない”のであるが、後二者の変化は構造的なものであり、監視しなければならない状態である。Beerはこのモデルを調整プログラムを中心に据え、調整の目的にとってこのシステムが過剰な反応を起こさず、しかも鈍感になりすぎないように、最上位の意思決定者に加重な負担をかけず、しかも知るべきことにはすべてに注意を払ってられるように調整する仕事が最も困難な課題であると、述べている。それはいわば頭脳へのフィルターの設計なのである。その経験からBeerは、このフィルタリングシステムが“頭脳それ自身よりもはるかに高い信頼度で”潜在的な趨勢を検出することがわかった、と述べている。

動的線形モデルの一般理論および様々な変形モデルに関してはいくつかの論文で詳細に述べられているので、以下ではBeerが言及している線形成長モデルと上にのべたようないくつかの状態を組み込んだモデルに関して、その意味あいおよび導かれる結果についてやや詳しく述べ、応用例をしめすことにしよう。

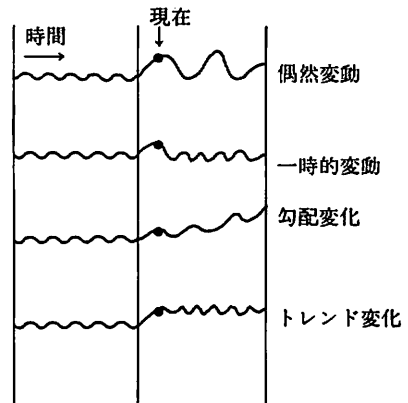


図 1

## 2. 時系列データのパラメータによる表現

いま時系列  $y_t, t=1, 2, \dots$  があり、これらの中に下のような自己回帰的な関係が成り立つとしよう。

$$y_t = 2y_{t-1} - y_{t-2} \dots\dots\dots (1)$$

次に下のようなプロセスを考えると

$$y_t = \mu_t$$

$$\mu_t = \mu_{t-1} + \beta_t \dots\dots\dots (2)$$

$$\beta_t = \beta_{t-1}$$

これが(1)の関係を満足することがわかる。(2)は(1)の関係を意味するが、(1)は必ずしも(2)を意味しない。しかしそれにも拘らず、もし(2)のように構造的に表現する根拠を持つ場合には、 $\mu_t$ は時点  $t$  における時系列プロセスの水準を表現し、 $\beta_t$ は  $t-1$  から  $t$  の間の付加的な成長を表現するというように、プロセスを構造的に把握することができ、そのことから多くの洞察が得られるであろう。 $\mu, \beta$  のようなパラメータの意味づけをしてプロセスの構造を考え、それと観測値とを結合してゆく方法は、モデル構築という点からも、また得られた結果の解釈と検討の問題からも大きな利点をもっている。

(2)は確定的なシステムであるが、これを次のように確率項を付加することによって確率的システムを導くことができる。

$$y_t = \mu_t + v_t$$

$$\mu_t = \mu_{t-1} + \beta_t + w_{1t} \dots\dots\dots (3)$$

$$\beta_t = \beta_{t-1} + w_{2t}$$

これは線形成長モデルであり、後に見るように、 $v_t, w_{1t}, w_{2t}$  はそれぞれ正規分布に従うものと仮定して分析を進めることになる。

## 3. 動的線形モデルとカルマンフィルターによる推定

前節の(3)のようなシステムを多次元のシステムに一般化したものを動的線形モデルと呼ぶ。

$$y_t = F_t \theta_t + v_t \dots\dots\dots (4.1)$$

$$\theta_t = G\theta_{t-1} + Hw_t \dots\dots\dots(4.2)$$

- $y_t$  ;  $m * 1$ , 時点  $t$  における観測値、
- $F_t$  ;  $m * k$ , 独立変数、既知
- $G$  ;  $k * k$ , システム行列
- $\theta_t$  ;  $k * 1$ , パラメータ
- $H$  ;  $K * K$ , 既知の行列
- $v_t$  ;  $m * 1$ ,  $w_t$  ;  $k * 1$ , 確率項

$v_t$ ,  $w_t$ はそれぞれ平均ゼロ、分散共分散行列 $V_t$ ,  $W_t$ の正規分布に従う確率変数で、 $V_t$ ,  $W_t$ は時点 $t$ において既知であるものとする。(4.1)は観測値の生成を記述する式であり、(4.2)は根底にあるシステムを記述するものである。この場合 $F$ が一定の時には時系列の状態領域における表現であり、またこれが独立変数である場合には、一般的な線形モデルの拡張と考えることができる。先に述べたモデル(3)は  $\theta' = (\mu_t, \beta_t)$  であり、 $F_t = F = (1 \ 0)$ ,

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ という時間 } t \text{ に独立な定数行列、} w_t' = (w_{1t},$$

$w_{2t})$  である。

$t-1$ までの観測値を  $(y_t, \dots\dots\dots, y_{t-1}) = Y^{t-1}$  とあらわすことにすると、システム(4)のパラメータ $\theta_t$ の推定は次のように行われる。 $t = 0$ の時点で $\theta_0$ に関する情報が平均と共分散行列  $m_0, C_0$  によって集約されており、その分布は正規分布と付与されているとしよう。そうすると $\theta_t$ は(4.2)より $\theta_t$ の線形関数と正規変量の和であるから、やはり正規分布に従い、平均 $\bar{\theta}_t = Gm_0$ , 分散  $R_t = GC_0G' + HW_tH'$  となる。この分布を $\theta_t$ の事前分布 $P(\theta_t)$ として、 $y_t$ が観測されたのちの $\theta_t$ の事後分布 $P(\theta_t|y_t)$ を求めると、ベイズの定理により

$$P(\theta_t|y_t) = P(\theta_t)p(y_t|\theta_t)/p(y_t)\dots\dots\dots(5)$$

である。ここに $p(y_t|\theta_t)$ は尤度関数であり、式(4.1)より $N(F_t\theta_t, V)$ である。従って事後分布 $P(\theta_t|y_t)$ はやはり正規分布となる。(5)の分子は次のように計算される。指数部分だけを示せば、

$$\begin{aligned} & (y_t - F_t\theta_t)'V_t^{-1}(y_t - F_t\theta_t) + (\theta_t - Gm_0)'R_t^{-1}(\theta_t - Gm_0) \\ & = (\theta_t - m_1)'(F_t'V_t^{-1}F_t + R_t^{-1})(\theta_t - m_1) + (y_t - \hat{y}_t)'B_t^{-1}(y_t - \hat{y}_t) \end{aligned}$$

.....(6)

$$\begin{aligned} \text{ここに} \quad m_1 &= Gm_0 + A_1(y_1 - y_1) \\ C_1 &= (F_1'V_1^{-1}F_1 + R_1^{-1})^{-1} = R_1 - A_1B_1A_1' \\ \hat{y}_1 &= F_1Gm_0, \quad B_1 = F_1R_1F_1' + V_1, \quad A_1 = R_1F_1'(B_1)^{-1}. \end{aligned}$$

分母の $p(y_1)$ は分子を $\theta_1$ に関して積分したものであるから、その指数部は(6)の後の項にほかならない。従って $\theta_1$ の事後分布 $P(\theta_1|y_1)$ は平均、共分散行列がそれぞれ上の $m_1, C_1$ である正規分布である。以下ではこのようなことを $(\theta_1|y_1) \sim N(m_1, c_1)$ と書くことにしよう。 $y$ が時間の経過と共に観測されていくにしたがって、次々にこの推定値を更新して行くことができる。

一般に $Y^{t-1} = (y_1, \dots, y_{t-1})$ が観測された時に $\theta_{t-1}$ の事後分布が $N(m_{t-1}, C_{t-1})$ であるとすると、次に $y_t$ が観測された後の $\theta_t$ の事後分布は先の場合と同様に $N(m_t, C_t)$ となり、再帰的に求められる。すなわち、ベイズの定理により

$$\begin{aligned} P(\theta_t|Y^t) &= P(\theta_t|Y^{t-1})P(y_t|\theta_t)/P(y_t|Y^{t-1}) \\ &.....(7) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m_t &= Gm_{t-1} + A_t(y_t - \hat{y}_t), \\ C_t &= R_t - A_tB_tA_t', \\ \hat{y}_t &= F_tGm_t, \quad R_t = GC_{t-1}G' + HW_tH', \\ B_t &= F_tR_tF_t' + V_t, \quad A_t = R_tF_t'(B_t)^{-1}. \quad \dots\dots\dots(8) \end{aligned}$$

この結果はカルマンフィルターと呼ばれ、パラメータに関する情報を更新し改訂するための再帰的な関係を示している。

ところで、(5)の右辺の分母 $p(y_t)$ 、一般には(7)の $p(y_t|Y^{t-1})$ は $t-1$ 時点まで観測された時、次の $t$ 時点で観測値がどのような確率法則に従うかを示しており、これを $y$ の予測分布といい、この分布を用いて一期先の予測を行うことができる。この場合、予測分布は先に示したようにやはり正規分布 $N(\hat{y}_t, B_t)$ である。また、 $\theta_t$ の事後の期待値 $m_t$ はこの予測誤差 $y_t - \hat{y}_t$ によって $m_{t-1}$ を修正したものであることに注意されたい。次にこれらの結果は $V_t$ と $W_t$ が既知であるという仮定に依存していることにも注意が必要である。普通これらを知っているということは殆どないので、事前分布を用いるのが一般的な方法であるが、ここではそうしないで後に見るようにモデルの状態の導入に積極的に利用することを試みるのである。従ってこれらの分散行列につい

ては、適切な付与を行うために予備的な分析と経験の蓄積とが必要である。

#### 4. いくつかの状態があるモデル

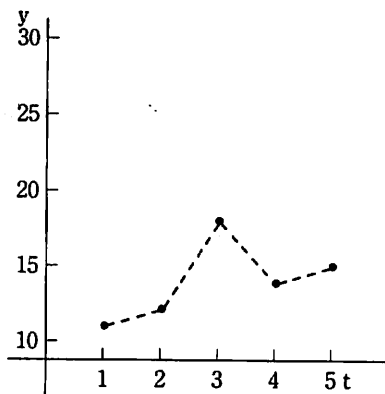
前にも述べたように、時系列データを観測していて、重要な変化があったと判断された時、何等かの決定を行う必要が生じるということは、様々な分野であり得る。事態が通常の状態で推移している間はただ監視しているだけでよいが、変化が生じた時にはただちに手を打たなければならない。このような状況に対して明示的にその意思決定を助けて対応できる統計分析システムの必要性は高いであろう。

前節で述べたモデル(4)の枠組みの中で変化を考えると、それは $\mu$ 、 $\beta$ のようなシステムパラメータの値が通常の変動を越えて大きく変化することであろう。したがってモデルの状態としては、1)パラメータが変化しない通常の状態、2)パラメータは変化しないが観測の関係式(4.1)において確率変量 $v$ が大きく変動する状態、3)システムパラメータが変化する状態、の3つが考えられる。さらに3)はどのパラメータが変化するかを区別して、意味のある状態を想定することができる。従って状態はモデルがどのような意味付けを持つパラメータを含むかに依存する。Harrison-Stevensは(3)のような成長型のモデルにおいて、3)を勾配変化とトレンド変化の2つとしている。そこで前に述べたように4つの状態を設定したのである。

動的線形モデルは(4)からわかるように、 $(F_t, G, V_t, W_t)$ によって特徴づけられる。そこで例えば、 $M_t^1 = (F_t, G, V_t, W_t)$ 、 $M_t^2 = (F_t, G, V_t, W_t^2)$ を考えると、両者では2つの共分散行列が異なっており、異なる構造をあらわす。 $V$ が観測値の変動、 $W$ がパラメータの変動をあらわしていることに注意すれば、これら2つの行列の適切な組合せによって、状態を表現することができよう。そこでまず、先にあげたモデル(3)によって確率項 $v_t$ と $w_t$ がプロセスにあたえる影響をみてみよう。例示の便宜上、まず $t=0$ において $\mu_0=10$ 、 $\beta_0=1$ であり、 $t=3$ 以外の時点では $v_t, w_{1t}, w_{2t}$ がすべて0であるとしよう。 $t=3$ において3つの確率項がそれぞれ5という値をとる場合を考えて、各々の影響を調べることにしよう( $v$ が5になるとき $w_1, w_2$ は0である等)。

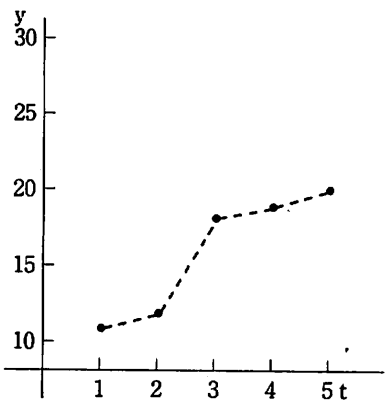
i)  $v = 5$  の場合

t	0	1	2	3	4	5
$\mu$	10	11	12	13	14	15
$\beta$	1	1	1	1	1	1
y		11	12	18	14	15



ii)  $w_{13} = 5$  の場合

t	0	1	2	3	4	5
$\mu$	10	11	12	18	19	20
$\beta$	1	1	1	1	1	1
y		11	12	18	19	20



iii)  $w_{23} = 5$  の場合

t	0	1	2	3	4	5
$\mu$	10	11	12	18	24	30
$\beta$	1	1	1	6	6	6
y		11	12	18	24	30

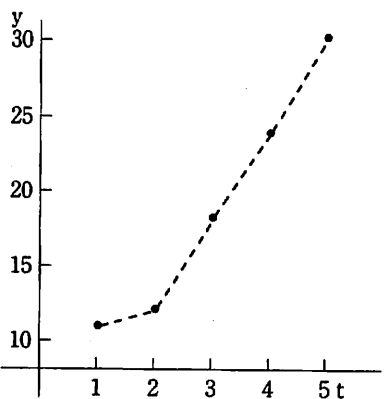


図 2

上の図と表からわかるように、3つの場合はそれぞれ一時的変動、階段関数的変化、勾配の変化をしめしている。一般には、パラメータの確率項が通常の変動を越えて大きな値をとるとき、構造に変化がおこったと考えられる。そのような状況を共分散行列が表現しているのである。

$M_t^j = (F_t, G, V_t^j, W_t^j)$ ,  $j=1, \dots, h$  を  $t$  における状態とし、これらをプロセスが各時点において潜在的にとる可能性のあるすべての状態の集合とすれば、さらに時点間の状態の推移について仮定をおくことによって、いくつかの状態をもつモデルを構成することができ、各々の状態について前節の結果を適用できる。ここでは推移がマルコフ的であると仮定する、すなわち、 $t-1$  から  $t$  への推移はそれより以前の状態とは独立であるとする。しかし、多状態のモデルの場合さらに考えておかなければならないことがある。それは、推移経路が時間の経過とともに爆発的に多くなるという点である。 $t-1$  から  $t$  への経過に従って可能な推移の仕方は  $h^2$  通りあり、さらに時間が進行すれば  $h^3$  通り等となって、膨大な数の分布を扱わなければならなくなる。これは実際的ではないので、何等かの縮約と近似を考えなくてはならない。そのための方法はいくつか考えられるが、単純でカルマンの結果を生かすことができる1つの方法は、各時点  $t-1$  で将来の時点に必要なパラメータと状態に関する情報を、 $h$  個の正規分布

$$(\theta_{t-1} | M_{t-1}^i, y^{t-1}) \sim N(m_{t-1}^i, C_{t-1}^i)$$

および、 $Y^{t-1}$  が観測された後の状態  $i$  がえられる事後確率

$$P_{t-1}^i = P(M_{t-1}^i | Y^{t-1}), \quad i = 1, \dots, h$$

とに縮約、近似することであろう。こうしておけば次の観測値  $y_t$  が得られたとき、カルマンフィルターを用いて、

$$(\theta_t | M_{t-1}^i, M_t^j, Y^t) \sim N(m_t^{ij}, C_t^{ij}), \quad i, j = 1, \dots, h$$

$$m_t^{ij} = G m_{t-1}^i + A_t^{ij} (y_t - \hat{y}_t^{ij}),$$

$$C_t^{ij} = R_t^{ij} - A_t^{ij} (B_t^{ij}) A_t^{ij'}$$

$$\hat{y}_t^{ij} = F_t G m_{t-1}^i, \quad B_t^{ij} = F_t R_t^{ij} F_t' + V_t^j, \quad R_t^{ij} = G C_{t-1}^i G' + H W_t^j H'$$

$$P_t^{ij} = P(M_{t-1}^i, M_t^j | y_t, Y^{t-1})$$

$$= P(y_t | M_{t-1}^i, M_t^j, Y^{t-1}) P(M_t^j | M_{t-1}^i, Y^{t-1})$$

$$\times P(M_{t-1}^i | Y^{t-1}) / P(y_t | Y^{t-1}) \dots \dots \dots (9)$$

$$P_i^t = \sum_{j=1}^h P_i^{tj}$$

が求められる。上式の $P(M_i^t | M_{i-1}^t, Y^{t-1})$ は先に述べた推移確率であり、これを $\pi_{i,t}$ とあらわすことにしよう。次節の応用例では、 $\pi_{i,t}$ は $t-1$ における状態とも時間とも関係のないものとしている。 $\pi$ を推定する方法を考えることもできるが、データが刻々と入ってくる場合の処理法としては、対象とする時系列についての経験から適切な値を固定しておくことが实际的であろう。また、 $P(M_{i-1}^t | Y^{t-1})$ は $P_{i-1}^t$ である。 $P(y_t | M_{i-1}^t, M_i^t, Y^{t-1})$ は状態の推移が与えられた時の $y_t$ の予測分布による尤度関数であり、前にも述べたように $N(\hat{y}_t^j, B_i^j)$ である。

最後に $t$ における縮約は次のようになる。まず

$$P(\theta_t | M_i^t, Y^t) = \sum_{j=1}^h P(\theta_t | M_{i-1}^t, M_i^t, Y^t) P(M_{i-1}^t | M_i^t, Y^t)$$

であり、 $P(M_{i-1}^t | M_i^t, Y^t) = P_i^t / P_i^t$ であるから、この事後分布は正規分布の $P_i^t / P_i^t$ による有限結合である。このことから、平均と分散はつぎのようになる。

$$m_i^t = \sum_{j=1}^h P_i^{tj} m_i^{tj} / P_i^t,$$

$$C_i^t = \sum_{j=1}^h P_i^{tj} \{ (C_i^{tj} + (m_i^{tj} - m_i^t)(m_i^{tj} - m_i^t)) \} / P_i^t \dots\dots\dots (10)$$

この結果、 $(\theta_t | M_i^t, Y^t) \sim N(m_i^t, C_i^t)$ と近似される。

### 5. 応用について

Beerは生存可能モデルにおけるフィルタリングシステムへのインプットとしての情報は現状を示すデータの他、潜在的可能性を示す諸指標が必要であるとしているが、私にはそのような経験がなく、データも持たないのでこの節では簡単な応用例をあげて、実施上の問題点のいくつかについて述べたい。ここでは為替価格に関して、 $y_1$ : 直物 円/ドル、 $y_2$ : 1ヶ月先物 円/ドルとして、暴落のあった1987年10月~12月のデータについて、以下のようなモデルで分析を試みた。

$$y_{1t} = \mu_t + V_{1t}$$

$$y_{2t} = \mu_t + \gamma_t + V_{2t}$$

$$\mu_t = \mu_{t-1} + \beta_t + W_{1t}$$

$$\beta_t = \beta_{t-1} + W_{2t}$$

$$\gamma_t = \gamma_{t-1} + \eta_t + W_{3t}$$

$$\eta_t = \eta_{t-1} + W_{4t}$$

$\mu$ は直物の水準、 $\beta$ はその勾配(線形成長)、 $\gamma$ は先物の付加的な水準、 $\eta$ は同じく付加的な勾配のパラメータである。一つの結果を表1と図3に示した。図中の矢印の時点に変化の徴候を示しているが、対応する状態の事後確率にそれが現れているといえるだろう。予測値は状態毎の予測値 $\hat{y}_t$ の $P_{t-1}$ による期待値をとっている。この状態毎の予測値についてみると、例えば51期の大きな変化の後の52期では、状態1, 2, 3, 4のそれぞれについて直物は、128.31, 128.25, 127.31, 131.96と予測されている。

このモデルへのインプットは $m_t^i, C_t^i, P_t^i$ および $V^i, W^i, \pi^i, i=1, \dots, 4$ である。前の三者についてはその影響はかなり短期的に消滅するが、後の三者は通常固定されるから、その影響は重要である。

### 1) V, Wについて

既に述べたように状態はVとWの組合せによって表現される。そこで、上述の四つの状態を区別すると次のようになる。

状 態	V	W
1 無変化	$V_N$	0
2 トレンド変化	$V_N$	$W_T$
3 勾配変化	$V_N$	$W_S$
4 一時的変動	$V_T$	0

$V_N$ は定常状態における観測値の変動であり、 $V_T$ は一時的な変動状態における分散行列であるから、その分散要素は $V_N$ よりかなり大きい値をとる。またパラメータの変動Wについては、状態1と4では変化しないものと

されているのでゼロ行列であり、 $W_T$ はトレンドパラメータの分散が大きな値をとり、 $W_S$ では勾配パラメータの分散が正の値をとる。

VとWの分散要素の付与については、一つの実験的な方法として観測値の分散の標準的な値を設定し、それぞれの場合の分散をこれとの比において付与することが考えられる。Harrison-Stevensはかなり広範なデータについて

の結果から、1変数の場合、 $V_T$ については定常状態の101倍、 $W_T$ については100倍、 $W_S$ については1倍とすることを勧めている。この場合さらに観測値の分散の標準的な値の設定と共分散の付与の問題がある。このモデルのメリットのの一つは多次元的な情報を用いてより安定した推定を行うことにあるのだから、実際に利用できる付与の手続きを考案することが必要である。

2)  $\pi$ について。

H-Sの研究では、状態1の確率を大きくし、状態2と3については小さくするべきで、さらに状態4は2あるいは3の10倍より大きくするべきであることが示唆されている。具体的には(0.9, 0.003, 0.003, 0.094)が勧められている。V, W,  $\pi$ は複合した影響を与えるので、個別に検討することはできないが、予測の誤差および状態の事後確率の値という点からみるとこれらの値の組み合わせがかならずしも良いとは言えないようである。とくに $\pi$ については、4つの状態の確率をあまり偏った値にすると、状態ごとに分けたメリットが相殺されて変化にたいして鈍感になってしまう傾向がある。システムの感度がどの程度であるべきかは、全体の枠組みの中で決定されるべき問題であろう。例では(0.7, 0.1, 0.1, 0.1)とした場合が示してある。

3) 近似について。

事後確率分布は正確には正規分布の有限結合であることは既に述べたが、それを正規分布によって近似しているので、どの程度の誤差があるかを見極めなくてはならないが、分布の有限結合に関する理論的研究はたとえばD.M. Titterton等[3]がある。実際に問題になるのは有限結合が多峰形になるかどうか、近似誤差がどの程度かの点である。ここでは各状態の分布から見て最も問題になりそうな時点についてこれらの比較を試みた。いくつかの結果を図4に示しておく。これらに関する限りでは近似はかなり良いように思われる。なおこの小論の計算は、金沢大学情報処理センターを利用した。

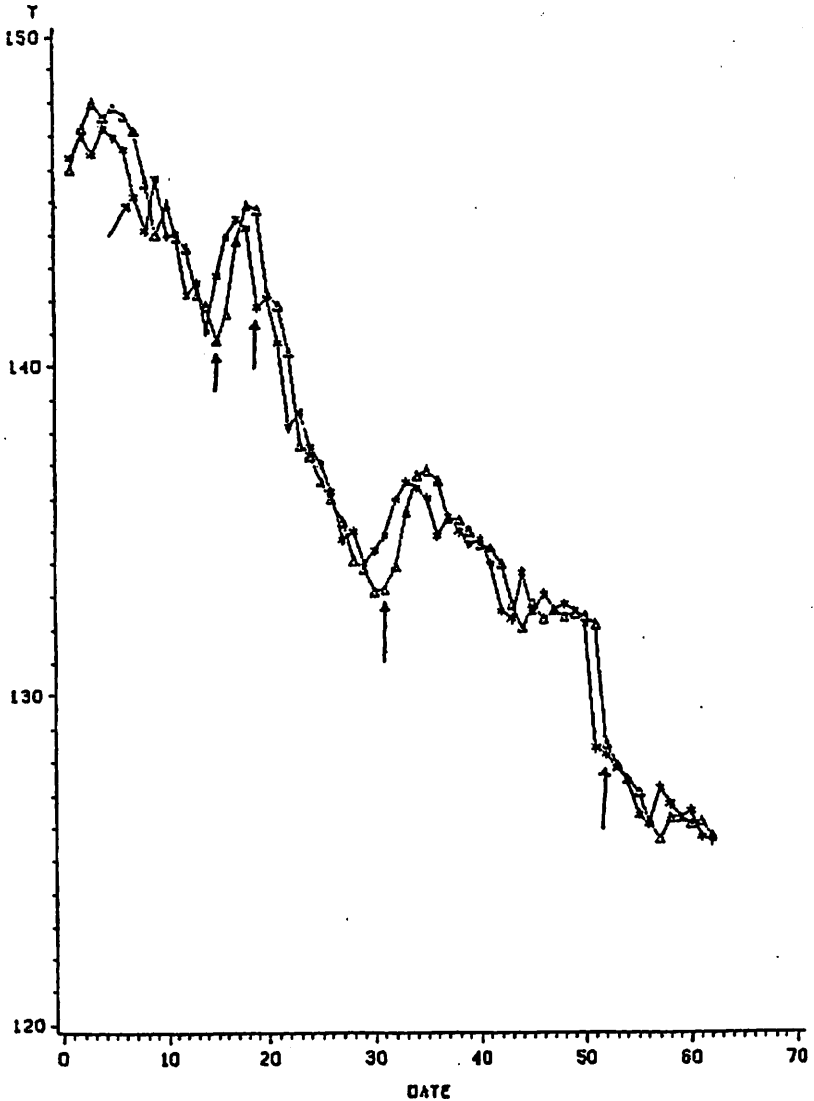


図3 直物為替価格

\*.....観測値  
△.....予測値

表1

期	為替価格直物		為替価格先物		状態の確率			
	実績	予測	実績	予測	状態1	状態2	状態3	状態4
1	146.35	146.00	145.90	145.70	.894	.019	.084	.003
2	147.00	145.24	146.56	147.04	.905	.014	.079	.002
3	146.45	148.00	146.00	147.84	.815	.042	.136	.007
4	147.25	147.57	146.75	147.29	.897	.016	.085	.002
5	146.95	147.85	146.46	147.49	.881	.020	.096	.003
6	146.60	147.61	146.13	147.10	.878	.021	.098	.003
7	145.15	147.06	144.68	146.53	.771	.061	.157	.011
8	144.15	145.60	143.67	144.80	.859	.028	.108	.005
9	145.70	144.00	145.20	143.14	.812	.044	.135	.009
10	144.00	144.95	143.51	144.35	.886	.019	.091	.004
11	144.05	143.94	143.57	143.29	.904	.014	.080	.002
12	142.20	143.63	141.70	143.05	.847	.030	.118	.005
13	142.55	142.19	142.06	141.54	.903	.014	.081	.003
14	141.10	141.85	140.56	141.29	.894	.016	.087	.003
15	142.80	140.78	142.28	140.16	.703	.084	.198	.015
16	143.95	141.63	143.47	141.22	.746	.083	.156	.015
17	144.50	143.81	144.09	143.77	.883	.019	.094	.004
18	144.20	144.93	143.83	144.91	.880	.020	.096	.047
19	141.80	144.81	141.42	144.65	.475	.252	.226	.047
20	142.05	142.25	141.68	141.74	.892	.017	.088	.003
21	140.70	141.84	140.34	141.39	.874	.023	.099	.004
22	138.15	140.44	137.78	139.86	.771	.067	.150	.012
23	138.60	137.60	138.24	136.85	.871	.023	.102	.004
24	137.55	137.28	137.18	136.74	.899	.014	.084	.003
25	137.05	136.50	136.70	136.01	.895	.016	.086	.003
26	136.20	135.98	135.88	135.56	.904	.014	.080	.002
27	134.75	135.30	134.43	134.96	.900	.015	.083	.002
28	135.00	134.13	134.65	133.78	.887	.018	.092	.003
29	134.00	133.82	133.64	133.54	.909	.012	.076	.002
30	134.40	133.15	134.06	132.85	.856	.026	.113	.005

31	134.85	133.21	134.53	133.00	.809	.043	.140	.008
32	135.95	133.92	135.62	133.83	.804	.051	.136	.009
33	136.50	135.60	136.16	135.67	.885	.019	.092	.003
34	136.30	136.69	135.93	136.73	.892	.016	.088	.003
35	136.00	136.82	135.65	136.69	.880	.020	.096	.004
36	134.85	136.56	134.85	136.30	.800	.047	.144	.009
37	135.45	135.39	135.11	134.94	.900	.015	.083	.002
38	135.00	135.36	134.69	134.93	.902	.014	.081	.003
39	134.60	135.00	134.29	134.56	.903	.014	.080	.003
40	134.75	134.58	134.44	134.14	.906	.013	.078	.003
41	134.00	134.49	133.56	134.10	.902	.014	.081	.003
42	132.55	133.98	132.12	133.51	.832	.034	.128	.006
43	132.30	132.76	131.88	132.12	.900	.015	.083	.002
44	133.70	132.01	133.28	131.43	.793	.049	.150	.008
45	132.50	132.78	132.08	132.38	.904	.014	.080	.004
46	133.05	132.29	132.66	131.84	.890	.017	.090	.003
47	132.60	132.53	132.18	132.17	.908	.013	.077	.002
48	132.75	132.39	132.33	132.02	.906	.013	.078	.003
49	132.55	132.45	132.14	132.10	.910	.012	.076	.002
50	132.15	132.39	131.75	132.03	.909	.013	.076	.001
51	128.40	132.14	127.93	131.76	.089	.651	.151	.109
52	128.20	128.52	127.73	127.90	.900	.016	.081	.003
53	127.80	127.87	127.34	127.36	.900	.015	.083	.002
54	127.40	127.48	126.95	126.95	.900	.015	.083	.003
55	126.40	127.07	126.00	126.54	.895	.016	.086	.003
56	126.10	126.17	125.70	125.64	.905	.013	.079	.003
57	127.20	125.64	126.77	125.14	.817	.040	.136	.007
58	126.70	126.29	126.28	125.93	.899	.015	.083	.003
59	126.30	126.30	125.86	125.94	.907	.013	.078	.002
60	126.50	126.10	126.08	125.73	.904	.014	.080	.002
61	125.70	126.18	125.29	125.83	.902	.014	.081	.003
62	125.60	125.73	125.21	125.35	.900	.013	.076	.002

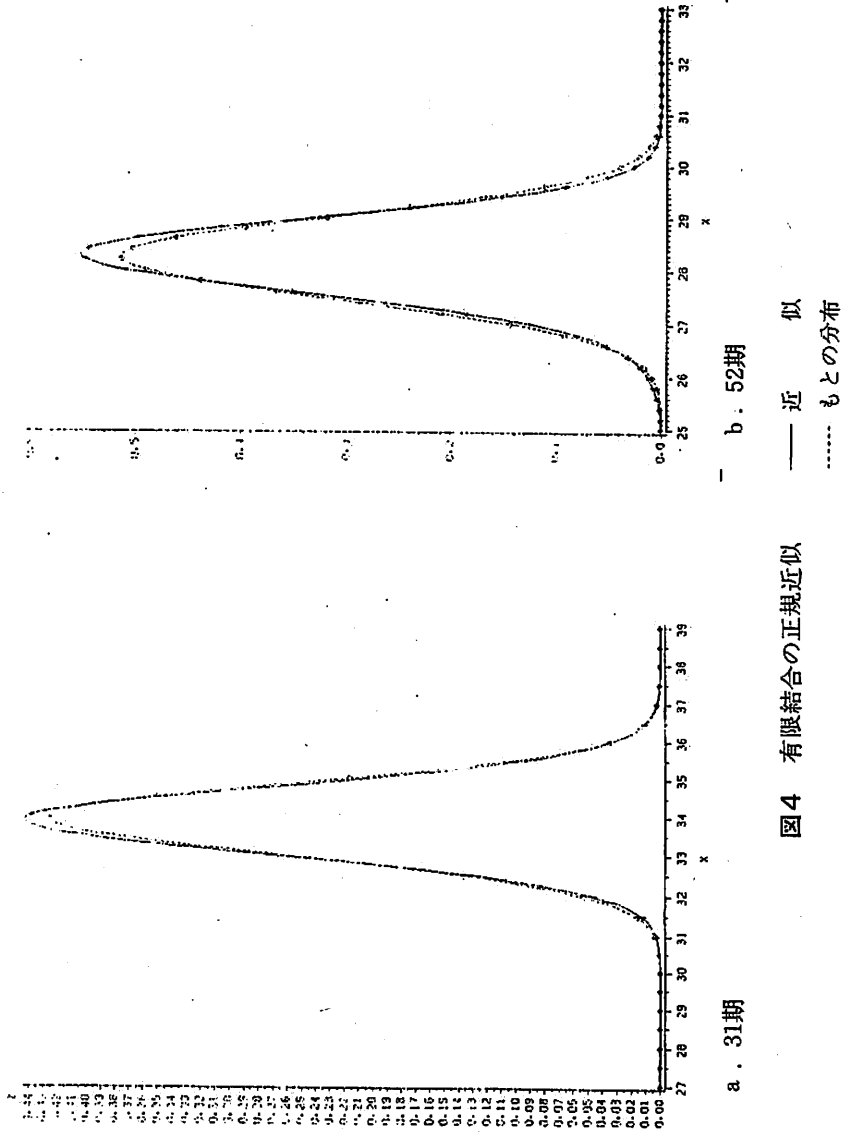


図4 有限結合の正規近似

文献

- 1 . Beer, S. (1972). Brain of the firm. 2ed, J. Wiley.  
邦訳 “企業組織の頭脳。宮沢光一監訳, 啓明社
- 2 . Harrison, P. J. and Stevens, C. F. (1976). A Bayesian Forecasting.  
J. R. Statist. Soc. B, 38, 205-247
- 3 . Titterington, D. M., Smith, A. F. M. and Makov, U. E. (1985). Statistical Analysis of  
Finite Mixture Distributions. J. Wiley