

算 数 科

木 谷 崇
福 井 時 昌
石 田 美 保

1 算数科における学びを豊かにする聞き合い

※¹ 算数的知識

数量や図形に関する
概念や原理、法則など
をまとめたもの

算数科の目的は、子どもの有している算数的知識^{※1}を十分に利用させ、筋道だった考え方ができるように、一人一人を育むことである。この筋道だった考え方には、演繹的、帰納的、類推的な考え方があげられ、数学的な考え方^{※2}とも呼ばれる。また、これらには、抽象化、単純化、一般化等の考え方も含まれる。

※² 数学的な考え方

『数学的な考え方の
具体化と指針』片桐重
男 明治図書
2004

この筋道だった考え方を子どもが身に付けるには、数量や図形に関する概念や原理、法則、技能などの算数的知識を互いに聞き合うことが必要である。なぜなら、子ども一人一人の算数的知識には質的にも、量的にも差があり、一人では算数的知識を再構成する場合に不十分な場合があるからである。

※³ 具体的表現

1つの状況において、
今まで持っていた知識
や方策を用いて解決
した表現

この聞き合いは、まず子どもが、今まで培ってきた算数的知識を駆使し、操作、図、数、式、言語等の多様な表現を通して、具体的表現^{※3}を行うことから始まる。この具体的表現を聞き合う中で、算数的知識をどう構成していったかという数学的な考え方に出会うことになる。子どもは、他者から質の高い考え方に出会ったときに、他者の考え方を獲得し、算数的知識や数学的な考え方の積み上げをする。そして、自らの考え方をどの場面にも使えるように修正・洗練していく。

『真実的数学教育論
に見るモデル論』生徒
が意味理解を深める
ための媒介表現 教育
科学数学教育

昨年度の「見つめ直し」の取り組みから、自分の考えを持った後に、他の思考と比較・関係づける聞き合いが修正・洗練していく上で、重要な役割を果たすと考えた。

1月号, 104-107
森本貴彦・磯田正美
2003

そこで、このような量的に広がりのある考え方や、質的に高まりのある考え方のよさを理解し、今まで有していた自分の算数的知識と比較、関係づけながら修正・洗練し、より良いものに再構成していくことが「学びが豊かになる」ととらえる。

以上から、算数科における学びを豊かにする聞き合いを次のように設定し、取り組んでいくことにする。

子どもが進んで問題を解決していく中で 互いに算数的知識や数学的な考え方を
関係づけながら 修正・洗練し より良いものに再構成していく聞き合い

2 聞き合いのために

(1) 子どもにつけたい態度

① 解法の「違い」を見つけようとする態度

算数科では、算数的に異なっていると見なすことができるようになることが大切である。子どもは、式や答えが同じ場合にそれを同じ考えと見なすことがよくある。それによって、自分の解法と他の解法を比較し、「違い」を見つけようとする必要がある。また、実際に違いを見つけたときには、互いにその点を指摘し合うことが新しい考え方につながると理解していることも大切になる。

② 明確な根拠に基づいて説明・理解しようとする態度

「算数的に受け入れ可能であるもの」を「理解できるもの」として見なすも必要である。つまり、考え方の良し悪しを判断するときは、多数決や権威ではなく、明確な根拠に基づくことが重要であると理解する態度が求められる。また、この態度が更によりよいものを表現していこうという意欲につながる。

(2) 子どもに共有させておきたいこと

経験の確認

事前に子どもがどのような経験を身につけているか確認する必要がある。経験とは日常生活の経験、既習事項である。それらをふまえ、次の学習に発展させ、新しい考え方や知識を身に付けていくことができる。

日常生活の経験から考えさせる場合は、算数科の時間のみならず他の教科や学校生活の中でも、その考え方や知識をおさえておく必要がある。

(3)問題の設定

聞き合いは、子どもが解きたい、考えたいという意欲が高まり、自然と子どもが活動に向かっていくような問題の設定が必要である。

具体的には、経験を活用することで解ける可能性を感じる問題、たくさんの解が出てくる問題、解は同じでも多くの考え方が考えられる問題、誤答が出やすい問題、既習の問題と類似している問題、生活に結びついている問題などである。

さらに、使用する数値、場面の設定、提示の仕方などの工夫を行うことで、その後の活動の原動力となり、同時に関係づけへとつながる。

3 関係づけ再構成する手だて

(1) 表現方法の選択・変換

*⁴ 5つの表現方法

『算数教育における表現力とは』

①現実的表現(実物)

②操作的表現(おはじきやブロック等)

③図的表現(絵、図、グラフ等)

④言語的表現

(言語で説明したり話したりする表現)

⑤記号的表現(数字や文字、記号、式等)

『新しい算数教育』中

原忠男 東洋館出版

1994 No.285

子どもの思考力を高めるには、様々な考え方の中から、数学的に高まりのある考えを見つけ出す必要がある。子どもが考えをもち、表現する際の可視化の方法として算数科では5つの表現方法*⁴をとる。この5つの表現方法とは、①現実的表現、②操作的表現、③図的表現、④言語的表現、⑤記号的表現である。

子どもが個人で考えをもつ場面では、自分の得意な表現方法、適切に伝えることができる表現方法を選択させ、自分の考えを見つめさせる。そのことが関係づけの際の、判断基準となり、互いの考えの関係をとらえやすくなると考えるからである。

交流の場面では、意図的に表現方法を指定したり、他者の表現方法について考えさせたり、別の表現方法に変換させる。5つの表現方法の関連を図ることで、考えの関係が明らかになり、落ちや漏れ重なりに気付いたり、考え方を分類整理したりすることにつながる。そして、より一般化された思考へとつながっていく。

(2) 考え方の価値付け

①「違い」の価値付け

子どもたちの表出したものを「同じ」「違う」の2つの大きな視点で価値づける。

「同じ」を見つけることのできた児童を取り上げる場面では、「どの点が同じ(似ている)か」からきまりや公式などを再構成させる。また、「違う」では、「どのように違うか」と考え方の違いに着目させ、聞き合いの論点を焦点化させる。そのことで、問題への多様な見方、考え方を関係づけていくことができる。

②判断基準の価値付け

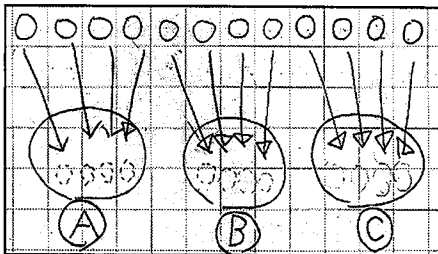
理由説明の中で、明確な根拠に基づいているものを価値付ける。更にそれと共に、算数的に洗練されている、能率的である、エレガントな考え方を価値付けていく。日常生活や具体的問題は、非常に多くの労力、思考を使って処理する必要がある。その中で洗練・能率・美しさを追求することが重要な判断基準であることを意識させる。これらの判断基準を身に付けることができた喜びは、新たな問題解決への意欲にもつながっていく。

4 実践例

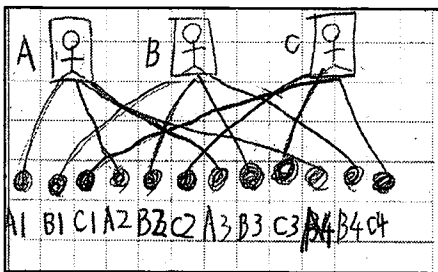
(1) 表現方法の選択・変換

① 3年生の実践（わり算）

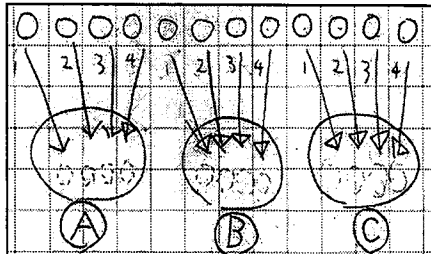
本単元は、除法の意味について理解し、それを用いることができるようにすることがねらいである。本単元では、ねらいにせまるために、具体物の操作や図的表現を繰り返し取り入れ、聞き合いを行った。



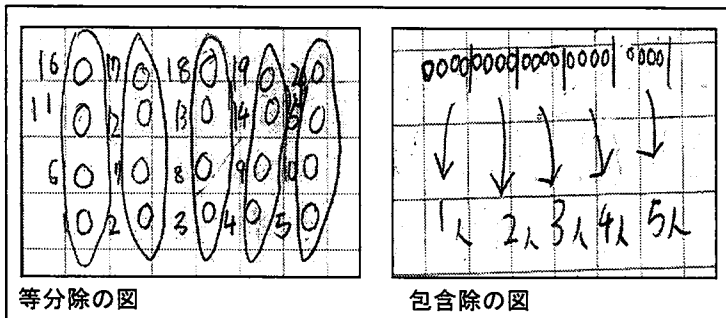
資料1 はじめに書いた図



資料2 操作の様子が分かる図



資料3 表現を変換した図



資料4 操作の違いが分かるノート

「12個のクッキーを3人で同じ数ずつ分けると1人分は何個になるか」をおはじきの操作で考え、図に表した。おはじき操作を共通操作とすることで、ノートへの図的表現がしやすくなった。矢印をかき、おはじき操作した後の図をかいている子が多くいた(資料1)。これでは、図だけを見るとどんな操作を行ったのかわからないが、子どもはおはじき操作をしているので、操作後の様子を図にかけばよいと考えていた。しかし、他の図を使った説明を聞き、自分の図と比べ、操作の様子が分かる図のよさに気づいていった(資料2)。そこで、自分の図におはじき操作の順番が分かるように、矢印の横に数字を書き足していた(資料3)。順番の数字を書き足すことで、自分の考えが伝わる図になっているかを考えることができた。図に表し交流していく中で、友達のと関係づけながら、表現の変換を行っていった。

交流する場面で、いくつかの図を見た子どもから、「かけ算でやった図みたいだね。」「 $4 \times 3 = 12$ だ。」という意見がでた。おはじき操作を図に表したことで、乗法で学習した図と関係づけて考え、九九を用いれば求められるということに気付くことができた。

次に、「20個のパイを1人に4個ずつ分けると何人に分けられるか」を考えた。この場合のおはじき操作は、等分除の場合と違う。既習の操作と違うことに気づき、図の違いが分かるように書いていた(資料4)。

操作や図が違うため、「わり算の式に表していいのかな。」と悩む子どもがいた。「おはじきを動かした後だけみると、1人分をもとめるときと同じになるよ。」という考えを聞き、一人にいくつずつを求める場合でも、わり算の式で表してよいことを理解していった。操作や図では分からな

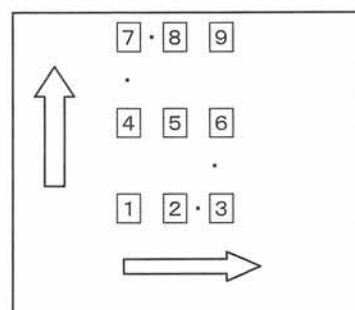
かったが、言語での説明によって、わり算の意味が理解できた。

② 5年生の実践（整数と小数）

本単元は、十進位取り記数法のよさに気付くこと、整数及び小数について十進数としての特徴を統合的にとらえることがねらいである。ねらいに迫る聞き合いをするために、数字の不思議さを用いた問題を用意し、子どもに考える意欲を高めた。自分の考えを持つこ

とが、聞き合いへの第一歩である。この単元では、カードを用いての操作的表現、図をかく図的表現、式にする記号的表現を言語化することによって聞き合いを行った。

本単元の導入で、電卓の数字の並びを利用し、 $123+369+987+741$ のように3桁ずつたしていきその和と、逆回りしたときのたした和が同じになる不思議さに出合わせた。子どもはなぜだろうという疑問がふくらんだ。疑問が大きくなり、意欲を持った子どもに、右図のように小数点をうつつと答えが同じになるかという問題で授業を行った（資料5）。



資料5 数字の並びと小数点の場所

整数の場合が同じだったので、20人以上の子どもが小数点をつけても同じだと考えていた。同じと考えた理由は、整数のときも同じになったからがほとんどであった。違うと考えた子どもが8人いた。その理由は、整数と小数は違うのではないかであった。



資料6 カード操作活動

明確な理由を考える手助けとなるように、操作的表現ができる1から9の数字のカードを2組用意した。また、図的表現をしやすいするために、資料5と同じものを子どもに用意した。

ほとんどの子どもが、1から9の数字カードを2組使い、カードを操作しながら考えていた（資料6）。この操作から、横に並んでいた式を筆算に置き換える子どもが出てきた。筆算も4つの数字を足す考え方もあれば、2つずつの数字の差を考える方法もあった。操作的表現から式的表現、言語的表現へと子ども自らが変換していった。

$$12.3 + 3.69 + 98.7 + 7.41 = 122.1$$

$$14.7 + 7.89 + 96.3 + 3.21 = 122.1$$

資料7 違いから比べた子どもの考え

まず出てきた考えは、上下の式の差を考え、その違いを比べる考え方である（資料7）。子どもの活動量を増やすためと個と個が関係づくために、図で示した子どもの後、他の子どもが、この図を言語に変換するという方法をとった。この場合の答えが同じになるという理由には、子どもは納得していたが、一般的にどうして同じになるかというところに納得がいていないようであった。

次に、上と下の数字が鏡のようになっているからという一般化しようとした考えが出てきた。すぐに、他の子どもから反論があり、鏡になっていると数字は同じだけど、位が違っているのではないかという意見が出てきた。式を図と見立てて、言語化することにより、他の子どもの思考に入りやすくなった。そして、同じ位ごとに筆算する考えが出た（資料8）。同じ位というキーワードがでてきたので、同じ位の数字をたせば、その位の数字の和は同じになるという考え方に関連づいていった。

資料8 筆算で考えた方法

「同じ位のものをたしている」「同じ位のものを引いている」子どもの言葉から位という言葉が出てきたので、位をもとに考えればよいという関係づけまではできた。

一般化したい子どもは、次時では、子ども自らが「どこに小数点をうつつても和は同じになるのか」という課題意識を持っていた。小数点を打つ場所をいろいろ変え、図と式を比

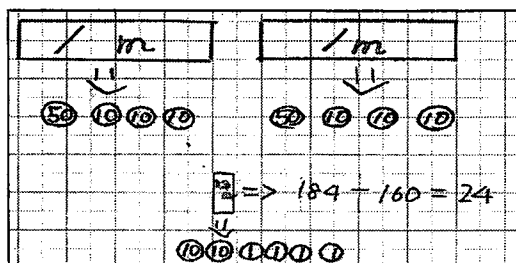
較しながら、前時での考えを利用し、同じにならないという結論に至ることができた。

前時の小数点の打つ位置が特別であり、偶然同じ位の和がそろっていたことに気付いた。

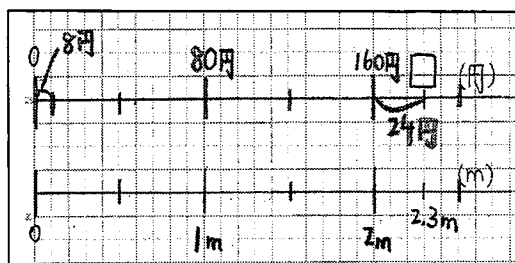
③ 5年生の実践（小数のかけ算）

本単元は、乗数が小数の場合での見方や考え方を拡張することである。今まで乗数が整数の場合の学習を行ってきた。ここで、乗数が小数になっても同じような演算で求められることを実感する必要がある。そこで、比例という考え方を表に出して指導するとどう理解できるかということを考えて行った。図や絵、数直線で考えた後、比例という考え方を使って言語に変換することで、乗数が小数でも、整数と小数に分けて考えるのではなく、今までと同じように倍という考え方ができるようになると考えたからである。

単元の最初の問題は「1mのねだんが80円のリボンを2.3m買いました。代金はいくらですか。」ほとんどの子どもが、 80×2.3 と立式することができた。しかし、子どもの意識を図や数直線に表してみると、整数と小数に分けて図にする子ども（資料9）や0.1m分の値段を利用しているが、小数である0.3mだけ特別に考えている子どもがいた（資料10）。また、80円のもの2.3こ分というまとまりにする考え方に納得できない子どももいた。

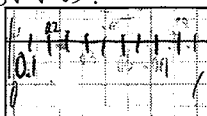


資料9 A児のはじめの考え



資料10 B児のはじめの考え

T: 本当に2.3をかけてもいいの？
 C: いいよ。(ほとんどの子ども)
 T: この考えって、小数の部分を切り取って、後からたしているだけじゃない？
 C: 整数のかけ算のときも、同じように位の違うものをたしたよ。
 T: たす考えは間違っていないよね。
 でも、本当に2.3はかけてもいいの？
 C: ……
 T: (右図の子どもを紹介し)
 Cさんは、何をしたの？
 C: 1を10等分して0.1にしたんだと思います。
 T: 何のために？
 C: 2.3が0.1のいくつ分かを求めたかったんだと思います。



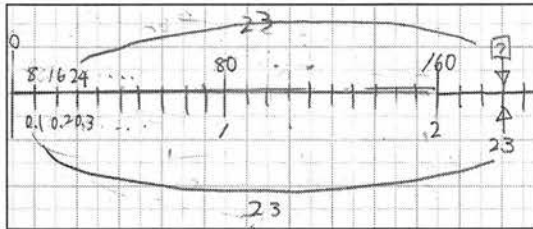
資料11 小数をかけていることの間いかけ

聞いた。子どもから「一方に矢印をかいたら、もう一方にもかくよ」「0.1から2.3まで矢印をかくよ」「8円から□までも矢印だ」「2つとも23倍じゃない」というように小数の場合においても、比例の考えをもとに数直線を見る目が出てきた。

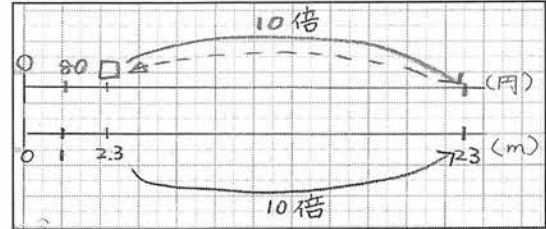
数直線という図的表現に比例という考え方を組み合わせることで、「1mは0.1mの10倍だから0.1mのねだんは10でわればよい。2.3mは0.1mの23倍だから、もう一方のね

表現方法を数直線で表すだけでは、本当に 80×2.3 をしてもよいのか納得できない。そこで、 80×2.3 の積を出すために、数直線を比例を使った図に変換する方法をとった。まず、比例という意識を持たせたかったので、資料10のような数直線を使い、1mから2mまで矢印を引いた。「次みんななら何をする？」と発問したところ、「80円から160円にも矢印を引く」「1mから2mの矢印の下に2倍と書く」「長さが2倍なら、値段も2倍だ」「3倍もあるよ」と次々に比例の考え方を話していた。もう一度思考を小数に戻すために、「本当に2.3をかけてもいいの？」という問いかけを行った（資料11）。0.1から2.3まで矢印を引っ張って、○倍とかいた後、「他にかくことない？」と

だんを23倍してあげればよい。」(資料12)や「2.3mを23mと考え、長さを10倍と考えると、もう一方のねだんも10倍になる。23mの長さのねだんは 80×23 であり、10倍したものを元に戻せばよい。」(資料13)と図的表現から比例を使った言語的表現を行うことで、他者の考えが自分の考えと関係付けられ、最初に2.3を2と0.3と見ていた子どもも2.3をまとまりと見る目が養われた。



資料12 A児の変容



資料13 B児の変容

(2) 考え方の価値付け

① 3年生の実践(あまりのあるわり算)

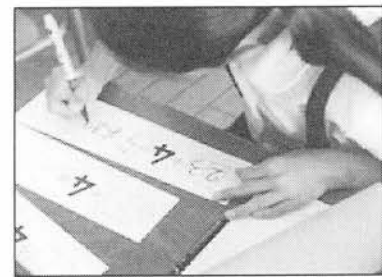
本単元では、わりきれない場合の除法について理解し、除法の意味について理解を深めるとともにそれを用いることができるようにすることがねらいである。除法の意味とわりきれない場合の除法計算については学習している。ここでは、既習の除法との違いに気づき、あまりの数の意味を考える。

「□個のあめを1ふくろに4個ずつ入れると何ふくろできて何個あまるでしょう」という問題を提示した。すると、「□が分からないとできない。」という発言が出た。そこで、□にいろいろな数を当てはめ、あまりの数にひみつがあるかを考えた。

ひみつを見つけやすくするために $\square \square \div 4 =$ というカードを用意した。自分で作った式を書いていた(資料14)。C児はカードを示しながら、「あまりの数が1, 2, 3しかない。」という意見を発表した。すると、「 $16 \div 4$ がないよ。」とわられる数がぬけていることを見つけた意見がでてきた。わられる数の順番に目を向けた子どもを価値付け、板書にカードを追加しながら、並べ変えた(資料15)。

そのことで、わられる数が1増えるとあまりの数が1増えるというひみつを、黒板に並んだカードを使って説明する子どもがでてきた。わられる数とあまりの数の関係をとらえた考えを認め、広めたことで、さらに、「あまり3の式を並べるとわられる数が4とびになっているよ。」「4つずつかたまりになっている(商が同じ)。」などの見方がでてきた。

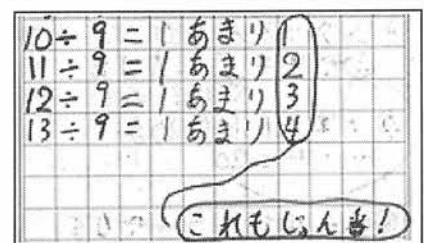
「わる数が3だったらあまりは1と2だよ。」という意見が出てきた。これは、わる数が変わってもいえるかという考え方である。この発言を価値付け、問いかけると、「わる9でやってみる。」「わる5です。」と、個での「どんな数でもいえる」という一般化へと再構



資料14 □に数を当てはめている子ども

C児	$17 \div 4 = 4$ あまり1
	$14 \div 4 = 3$ あまり2
	$15 \div 4 = 3$ あまり3
	あまりの数は1, 2, 3
D児	$16 \div 4 = 4$
E児	$18 \div 4 = 4$ あまり2
	$14 \div 4 = 3$ あまり2
	$15 \div 4 = 3$ あまり3
	$16 \div 4 = 4$
	$17 \div 4 = 4$ あまり1
	$18 \div 4 = 4$ あまり2

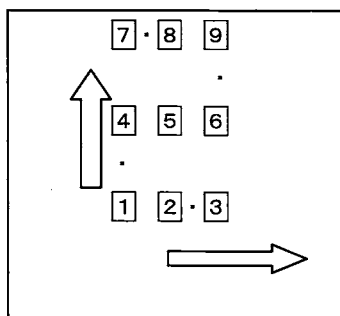
資料15 並び替えることでの価値付け



資料16 わる数を9で考えたノート

成がなされていった(資料16)。

② 5年生の実践(整数と小数)



資料17 変えた小数点の位

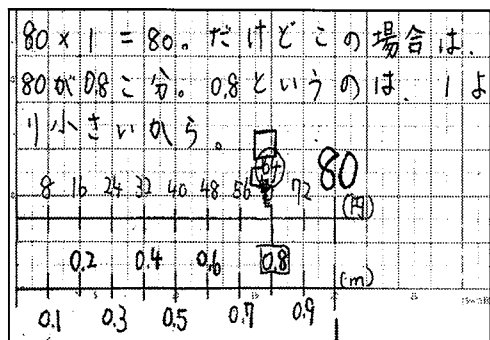
$22.2 + 36.9 + 98.7 + 74.1 =$
 $164.7 + 768.9 + 966.3 + 362.1 =$
 小数点の付いている位がちがう
 10倍すると同じ。

資料18 位に気付く子どもの感想

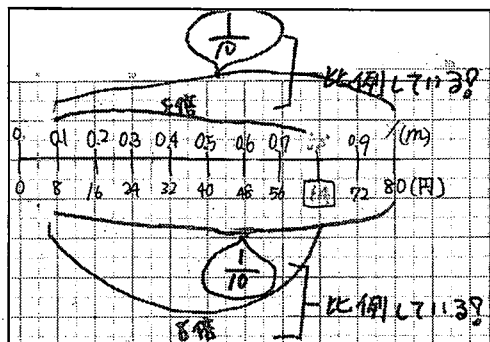
資料18)位だけが違う場合を求めることで、位の考えが整数だけでなく、小数にも拡張できた。

③ 5年生の実践(小数のかけ算)

純小数をかけると、積は被乗数より小さくなることをねらいとした授業で、「1mのねだんが80円のリボンがあります。このリボン0.8mの代金はいくらですか」という具体的な文章問題を提示すると、子どもは答えが小さくなることにすぐ気付いた。「なぜ」と聞くと、「かける数が1より小さいから」と答えた。そこで「かける数が1より小さくなると、なぜ積が小さくなるの?」と聞いた。根拠は頭の中にあるけれど、どう表現してよいか分からない。



資料19 1より小さいことを可視化



資料20 比例と関係付ける子ども

本単元では、整数だけでなく小数にも整数と同じように、位があるということを拡張していくことがねらいである。そのために、特殊な小数点を打ってある問題を用意した(資料17)。

「どちら周りしても同じ和になるか」と聞いたところ、ほとんどの子どもが、式にしたところで、答えが同じにならないことに気付いていた。小数点と位の関係に気付いているからである。

10倍したら、位が一つ上がるという考えを子どもに意識させたいので、 $12.3 + 36.9 + 98.7 + 74.1 = 22.2$ と提示した後、「何

か気付くことない?」と発問した。「位の和は違っているよ」と出た後で、「小数点が4つとも一つずつずれている」という子どもの発言から「下の式も暗算できるよ」と答える子どもが現れた。これらの子どもの発言を価値付けることにより、また、その価値に気付いた子どもを評価することで、「位が1つずつずれると答えも1つずれる」という考えに至

「なぜ積が小さくなるの?」と聞いた。根拠は頭の中にあるけれど、どう表現してよいか分からない。「1より小さいものをかければ、積は小さくなる」という考えは、まだ根拠不足で、一般化されていないと思われた。

今まで、比例という考えと数直線を使って図や言語で表す表現を行ってきたので、数直線にする子が現れた。グループ活動において、数直線を取り上げることで、数直線の考えがクラスに広がり始めた。さらに、数直線にすることで、1より小さいところに答えである□がいき、1より小さいということを可視化でき、価値づけることができた(資料19)。

また、子どもの中に「1を10分の1倍すると0.1になる。1より小さいと10倍にならないから」という意見が出てきた。

この意見につなげて、今まで積み重ねてきた比例という考え方を使って数直線に矢印を引いて○倍とかく図も出てきた(資料20)。資料20を見

で、「8倍って大きくなりそうなのに、積がかけられる数より小さくなっているのはなぜ」など疑問を持つ子どもも生まれた。この疑問を価値づけすると、子どもから「0.1を10倍しないと1にもどらない」「0.1mを8倍では1mの長さにとどかない。だから、値段も80円にとどかない」など、図に比例の見方を考えた言葉にして説明した。また、「1mを10分の1倍して0.1mにしている。0.1mを1mにするためには10倍しないとイケない。0.8mは0.1mの8倍。だから、値段も10分の1倍しているものを8倍している。値段が10倍になると元にもどるんだよ」「一度10分の1倍しているものを、どこまでもどるか考えたのが8倍だよ」という言葉も出てきた。その結果、純小数をかければ積が小さくなるという考えに明確な根拠が生まれ、一般化できたと考える。

その上、もしかける数が0.9だったら、0.99だったら、1.01だったらなど、さらに考え続ける子どもが増え、より一般化されていった。

5 成果と課題

関係づけ再構成するために、算数科では表現方法の選択・変換、考え方の価値付けという手だてをとってきた。

自分の考えを5つの表現方法から選び出し、表現できるようになってきたことが大きな成果である。これは、子どもの経験を踏まえた上で、問題を設定し、提示することで、活動の原動力になった。また、子どもは、5つの表現方法を発達段階や問題に応じて、どの表現方法を使えばよいかを選択できるようになってきた。

考えが持てる、多様なスキルを使えるように子どもを指導してきたことで、はじめて効果的な表現方法の変換ができるようになってきた。そして、ただ変換するだけでなく、その時間の数学的に深まりのある土台となる考え方を意識させながら行った。その結果、自分の選択した表現方法を、他の子どもが考えた表現に比べながら置き換えてみたり、置き換えた方法をさらによい方法はないかと考えたりする子どもも増えてきた。この表現方法を変換する活動は、本校の研究の柱である関係づけを行うには有効な方法であった。変換するには、必ず他の考えを一度受け入れなければならない。今、個が持っている考えと比較・分類しながら、他の考えを聞かなくてはならない。他の考えに積極的に関わり、より理解していこうとする態度、および思考力が育ってきた。

今後の方向性として、教師が指示する変換を行うのではなく、子ども自らがこの表現方法なら伝えやすい、もっと簡単な表現にできると考えられるようにしていきたい。ペアやグループ、全体での交流など、どの場面が効果的か、今後研究を深めていきたい。

考え方の価値付けについては、前提として、子どもの多様な考えがでるような問題の設定をする必要がある。子どもの多様な考えを同じか、違うかという視点で比較することにより、より数学的に深く、どこが似ている、どこが違うというように、聞き合いの論点を絞ることができ、同じ土台の中で、関係づけできていた。また、説明していく中で、よりよいものすること、より能率的にできること、より美しいものにしていこうとし、思考力、判断力が育ち、再構成していく姿が多く見られるようになった。

課題として、子どもの発言を価値付ける方法として、発問だけではなく、板書等の可視化できる工夫が必要である。子ども自らが、価値に気づき、聞き合いの方向性を見出せる研究へと深めていきたい。

また、どの問題を提示するかで、子どもの興味・関心だけでなく、授業で聞き合いが高まりまで変わってくる。知的好奇心をくすぐる問題から子どもが「なぜ」と考え、自分自身で考え抜き、さらに、他の子どもと意見を聞き合いながら問題を解いていく。解きながら、現実の世界から一般化された世界へと考えを高めていく。そのような問題解決を目指し今後の研究を進めていきたい。