# On Optimization Problems with Set-Valued Maps

# 集合値写像をもつ最適化問題について

前　田　　　隆

## 1. はじめに

連続性や微分可能性，均衡点定理（不動点定理），微分包含式（[1]），さらには最適化問題への応用（[2],[5]）など，集合値写像に対する研究者の関心が高まってきている。特に経済学の分野では，Arrow-Debrue 型経済の一般均衡の存在性，一意性あるいは安定性などの諸性質を調べるうえで，超過需要写像の連続性は重要な役割を果たしている。他方数理計画法の分野では，実数値関数やベクトル値関数は定義域の各点に対してただひとつの点を対応させる集合値写像とみなすことができるため，微分不可能な関数やベクトル値関数を統一的に取り扱うためのひとつの方法として，集合値写像を制約条件あるいは目的写像にもつ数理計画問題が幅広い注目を集めている。

本論文の目的は，集合値写像を目的写像および制約写像にもつ最適化問題，すなわち集合値写像最適化問題に対して非線形計画問題における Kuhn-Tucker 型の最適性の条件を求めることである。このため，第2節において，集合値写像に対して derivative の定義とその基本的な性質を与える。第3節では，集合値写像最小化問題を定式化し，最適解を定義する。第4節では，前節で定義した問題に対して，最適解の特徴づけを行う。

## 2. 数学的準備

ここでは，以下の議論で用いられる記号，定義および集合値写像に関する基本的性質を簡単に紹介しよう。

$R^n$ を $n$-次元ユークリッド空間，$R^n_+ \equiv \{x \equiv (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T \in R^n \mid x_i \geqq 0,\ i=1, 2, \cdots, n\}$，$R^n_- \equiv -R^n_+$ とする。ただし，$T$ はベクトル $x$ の転置である。$R^n_+$ の内部を int $R^n_+$ によって表す。すなわち，int $R^n_+ \equiv \{x \in R^n_+ \mid x_i > 0,\ i=1, 2, \cdots, n\}$ である。

任意の2つのベクトル$x, y \in R^n$に対して，その内積を$\langle x, y \rangle$とかく。さらに，$R^n$の2つのベクトル$x, y$に対して，$x-y \in R^n_+$であるとき，$x \geqq y$とかき，$x-y \in \mathrm{int}\, R^n_+$であるとき，$x > y$とかく。さらに，$x, y \in R^n$に対して，$x-y \in R^n_+$であり，$x \neq y$であるとき，$x \geq y$とかく。

**Definition 2.1.** $X, Y$をそれぞれ$R^n$，$R^\ell$の空でない部分集合とする。各$x \in X$に対して，$Y$の部分集合を対応させる関係が与えられているとき，この関係を$X$から$Y$への集合値写像といい，$F: X \rightsquigarrow Y$とかく。

通常の写像$f: R^n \to R^\ell$は$x \in R^n$に対して，ただひとつの点$\{f(x)\} \subseteq R^\ell$を対応させる集合値写像と看做すことができるため，一価写像などとよばれる。

集合値写像$F: X \rightsquigarrow Y$が与えられたとき，$\mathrm{Dom}(F) \equiv \{x \in X \mid F(x) \neq \phi\}$，$\mathrm{Range}(F) \equiv \{y \in Y \mid y \in F(x),\ x \in \mathrm{Dom}(F)\}$，$\mathrm{Graph}(F) \equiv \{(x, y) \in X \times Y \mid y \in F(x)\}$とかき，それぞれ$F$の有効定義域，値域およびグラフという。以下では，一般性を失うことなく，$X=R^n$，$Y=R^\ell$とする。

$F: R^n \rightsquigarrow R^\ell$が与えられたとき，$\widehat{F}: R^n \rightsquigarrow R^\ell$を

$$\widehat{F}(x) \equiv F(x) + R^\ell_+ \equiv \{y + d \in R^\ell \mid y \in F(x),\ d \in R^\ell_+\}$$

によって定義する。ただし，$F(x) = \phi$のとき，$F(x) + R^\ell_+ \equiv \phi$である。集合値写像$F: R^n \rightsquigarrow R^\ell$および$G: R^n \rightsquigarrow R^m$が与えられたとき，集合値写像$H: R^n \rightsquigarrow R^\ell \times R^m$および$\widehat{H}: R^n \rightsquigarrow R^\ell \times R^m$をそれぞれ

$$H(x) \equiv F(x) \times G(x) \equiv \{(y, z) \in R^\ell \times R^m \mid y \in F(x),\ z \in G(x)\}$$

$$\widehat{H}(x) \equiv H(x) + (R^\ell_+ \times R^m_+)$$

によって定義する。ただし，$F(x) = \phi$あるいは$G(x) = \phi$であれば，$H(x) \equiv \phi$である。したがって，

$$\mathrm{Dom}(H) = \mathrm{Dom}(\widehat{H}) = \mathrm{Dom}(F) \cap \mathrm{Dom}(G)$$

である。

**Definition 2.2.** $F: R^n \rightsquigarrow R^\ell$は$\mathrm{Graph}(F)$が凸集合であるとき，凸写像であるという[1]。

$F$が凸写像であれば，$\widehat{F}$も凸写像である。

---

[1] 各$x \in R^n$に対して，$F(x)$が凸集合のとき，$F$は凸値写像（convex-valued mapping）といわれる。

**Definition 2.3.** $F: R^n \to R^\ell$は$\widehat{F}$が凸写像であるとき，$R^\ell_+$-凸写像であるという。

**Lemma 2.1.** $F: R^n \to R^\ell$が凸写像であるための必要十分条件は，任意の$x, y \in R^n$および$\lambda \in [0.1]$に対して

$$\lambda F(x) + (1-\lambda) F(y) \subseteq F(\lambda x + (1-\lambda) y)$$

が成立することである。

**証明** 証明は簡単なので，省略する。 □

**Definition 2.4.** $F: R^n \to R^\ell$, $(x^0, y^0) \in \mathrm{Graph}(F)$とする。$x^0$のある近傍$N(x^0)$および正の数$K$が存在し，すべての$x$, $x' \in N(x^0)$に対して，

$$F(x) \subseteq F(x') + K \| x - x' \| B \tag{2.1}$$

が成立するとき，$F$は$x^0$において局所リプシッツ連続であるといい，実数$K$をリプシッツ係数という。ただし，$B \equiv \{ y \in R^\ell \mid \| y \| \leqq 1 \}$であり，$\| y \|$は$y \in R^\ell$のユークリッド・ノルムである。

**Definition 2.5.** $S$を$R^n$の空でない任意の部分集合とし，$x^0 \in S$とする。ベクトル$u \in R^n$はゼロに収束する正の実数列$\{t_n\}$および$u$に収束する点列$\{u^n\}$が存在し，すべての自然数$n$に対して，$x^0 + t_n u^n \in S$が成立するとき，$S$の$x^0$における接ベクトル(tangent vector)といわれる。$S$の$x^0$における接ベクトルの全体からなる集合を接錐(tangent cone)といい，$T(S; x^0)$とかく。

**Definition 2.6.** $S$を$R^n$の空でない任意の部分集合として，$x^0 \in S$とする。ベクトル$u \in R^n$はゼロに収束する任意の正の実数列$\{t_n\}$に対して，$u$に収束する点列$\{u^n\}$が存在し，すべての自然数$n$に対して，$x^0 + t_n u^n \in S$が成立するとき，$S$の$x^0$におけるウルシェスクの接ベクトル(Ursescu's tangent vector)といわれる。$S$の$x^0$におけるウルシェスクの接ベクトルの全体からなる集合をウルシェスク錐(Ursescu's cone)といい，$T^U(S; x^0)$とかく。

定義から明らかなように，接錐およびウルシェスク錐は原点を含む閉錐である。

**Lemma 2.2.** $S$を$R^n$の空でない凸集合とし，$x^0 \in S$とする。このとき，$T(S; x^0)$は閉凸錐であり，

$$S-\{x^0\} \subseteq T(S;x^0)=T^U(S;x^0)$$

が成立する。

**証明**　証明は，例えば [3] を参照。 □

**Definition 2.7.** $S$を$R^n$の空でない任意の部分集合とし，$x^0 \in S$とする。このとき，

$$N(S;x^0) \equiv \{y \in R^n \mid \langle y, x \rangle \leqq 0, \ \forall x \in T(S;x^0)\}$$

を$S$の$x^0$における一般化された法錐 (generalized normal cone) という。

**Definition 2.8.** $F: R^n \to R^\ell$, $(x^0, y^0) \in \mathrm{Graph}(F)$とする。このとき，$DF(x^0, y^0): R^n \to R^\ell$, $D^UF(x^0, y^0): R^n \to R^\ell$を

$$DF(x^0, y^0)(u) \equiv \{v \in R^\ell \mid (u, v) \in T(\mathrm{Graph}(F);(x^0, y^0))\}$$

$$D^UF(x^0, y^0)(u) \equiv \{v \in R^\ell \mid (u, v) \in T^U(\mathrm{Graph}(F);(x^0, y^0))\}$$

によって定義し，それぞれ$F$の$(x^0, y^0)$における derivative，ウルシェスク derivative という。特に，

$$\mathrm{Graph}(DF(x^0, y^0)) = \mathrm{Graph}(D^UF(x^0, y^0))$$

が成立するとき，$F$は$(x^0, y^0)$において derivable であるという。

$F: R^n \to R^\ell$が凸写像であれば，Lemma 2.2 から，$F$は任意の$(x, y) \in \mathrm{Graph}(F)$において derivable である。

**Definition 2.9.** $F: R^n \to R^\ell$, $(x^0, y^0) \in \mathrm{Graph}(F)$とする。このとき，$\partial F(x^0, y^0): R^\ell \to R^n$を

$$\partial F(x^0, y^0)(v) \equiv \{u \in R^n \mid (u, -v) \in N(\mathrm{Graph}(F);(x^0, y^0))\}$$

によって定義し，$F$の$(x^0, y^0)$における codifferential という。

つぎの lemma が成立することは明らかである。

**Lemma 2.3.** $F: R^n \to R^\ell$, $G: R^n \to R^m$, $(x^0, y^0, z^0) \in \mathrm{Graph}(H)$とする。このとき，任意の$u \in \mathrm{Dom}(DH(x^0, y^0, z^0))$に対して，

$$DH(x^0, y^0, z^0)(u) \subseteq DF(x^0, y^0)(u) \times DG(x^0, z^0)(u) \qquad (2.2)$$

が成立する。さらに，

(i) $F$は$x^0$において局所リプシッツ連続であり，$(x^0, y^0)$において derivable である。

(ii) $G$は$x^0$において局所リプシッツ連続であり，$(x^0, z^0)$において derivable である。

のいずれかが成立すれば，任意の $u \in \mathrm{Dom}(DH(x^0, y^0, z^0))$ に対して，

$$DH(x^0, y^0, z^0)(u) = DF(x^0, y^0)(u) \times DG(x^0, z^0)(u) \quad (2.3)$$

が成立する。

**証明**　$(v, w) \in DH(x^0, y^0, z^0)(u)$ であれば，ゼロに収束する正の実数列 $\{t_n\}$ および $(u, v, w)$ に収束する点列 $\{(u^n, v^n, w^n)\}$ が存在し，すべての $n$ に対して

$$(x^0, y^0, z^0) + t_n(u^n, v^n, w^n) \in \mathrm{Graph}(H)$$

が成立する。すなわち，すべての $n$ に対して

$$\begin{aligned}(y^0 + t_n v^n, z^0 + t_n w^n) &\in H(x^0 + t_n u^n) \\ &= F(x^0 + t_n u^n) \times G(x^0 + t_n u^n)\end{aligned}$$

が成立する。ゆえに，$(v, w) \in DF(x^0, y^0)(u) \times DG(x^0, z^0)(u)$ である。

つぎに，(ii) が成立すると仮定して，(2.3) が成立することを示そう。(i) が成立する場合についても同様にして，証明することができる。任意に $u \in \mathrm{Dom}(DH(x^0, y^0, z^0))$ をとろう。$(v, w) \in DF(x^0, y^0)(u) \times DG(x^0, z^0)(u)$ であれば，このとき，ゼロに収束する正の実数例 $\{t_n\}$ および $(u, v)$ に収束する点列 $\{(u^n, v^n)\}$ が存在し，すべての $n$ に対して，$y^0 + t_n v^n \in F(x^0 + t_n u^n)$ が成立する。仮定から，$G$ は $(x^0, z^0)$ において derivable なので，この $\{t_n\}$ に対して，$(u, w)$ に収束する点列 $\{(u'^n, w^n)\}$ が存在し，すべての $n$ に対して，$z^0 + t_n w^n \in G(x^0 + t_n u'^n)$ が成立する。さらに，$G$ は $x^0$ において局所リプシッツ連続なので，十分大きなすべての $n$ に対して，

$$z^0 + t_n w^n \in G(x^0 + t_n u^n) + K t_n \| u'^n - u^n \| B$$

が成立する。ただし，$K > 0$ はリプシッツ定数であり，$B \equiv \{ z \in R^m \mid \| z \| \leqq 1 \}$ である。ゆえに，各 $n$ に対して，$b^n \in B$ が存在し，

$$z^0 + t_n(w^n - K \| u'^n - u^n \| b^n) \in G(x^0 + t_n u^n) \quad (2.4)$$

$$\lim_{n \to \infty} (w^n - K \| u'^n - u^n \| b^n) = w$$

が成立する。一般性を失うことなく，すべての $n$ に対して，(2.4) が成立すると仮定しよう。このとき，すべての $n$ に対して

$$(y^0, z^0) + t_n(v^n, w^n - K \| u'^n - u^n \| b^n) \in H(x^0 + t_n u^n)$$

が成立する。ゆえに，$(v, w) \in DH(x^0, y^0, z^0)(u)$である。 □

同様にして，つぎのlemmaが成立することが示される。

**Lemma 2.4.** $F: R^n \to R^\ell$および$G: R^n \to R^m$を集合値写像とし，$(x^0, y^0) \in \mathrm{Graph}(F)$，$(x^0, z^0) \in \mathrm{Graph}(G)$とする。このとき，任意の$u \in \mathrm{Dom}(D\widehat{H}(x^0, y^0, z^0))$に対して，

$$D\widehat{H}(x^0, y^0, z^0)(u) \subseteq D\widehat{F}(x^0, y^0)(u) \times D\widehat{G}(x^0, z^0)(u) \quad (2.5)$$

が成立する。さらに，

(i) $F$は$x^0$において局所リプシッツ連続であり，$\widehat{F}$は$(x^0, y^0)$においてderivableである。

(ii) $G$は$x^0$において局所リプシッツ連続であり，$\widehat{G}$は$(x^0, z^0)$においてderivableである。

のいずれかが成立すれば，任意の$u \in \mathrm{Dom}(D\widehat{H}(x^0, y^0, z^0))$に対して，

$$D\widehat{H}(x^0, y^0, z^0)(u) = D\widehat{F}(x^0, y^0)(u) \times D\widehat{G}(x^0, z^0)(u) \quad (2.6)$$

が成立する。

**Lemma 2.5.** $F: R^n \sim R^\ell$を集合値写像とし，$(x^0, y^0) \in \mathrm{Graph}(F)$とする。$T(\mathrm{Graph}(F); (x^0, y^0))$が凸集合であれば，このとき，$\mathrm{Range}(DF(x^0, y^0))$は$R^\ell$の凸集合である。

**証明** 任意に$v^1, v^2 \in \mathrm{Range}(DF(x^0, y^0))$をとろう。このとき，$u^1, u^2 \in \mathrm{Dom}(DF(x^0, y^0))$が存在し，

$$(u^i, v^i) \in T(\mathrm{Graph}(F); (x^0, y^0)), \quad i = 1, 2$$

が成立する。仮定から，$T(\mathrm{Graph}(F); (x^0, y^0))$は凸集合なので，任意の$\lambda \in [0, 1]$に対して

$$\lambda(u^1, v^1) + (1-\lambda)(u^2, v^2) \in T(\mathrm{Graph}(F); (x^0, y^0))$$

である。すなわち，

$$\lambda v^1 + (1-\lambda) v^2 \in DF(x^0, y)(\lambda u^1 + (1-\lambda) u^2)$$

である。ゆえに，$\mathrm{Range}(DF(x^0, y^0))$は凸集合である。 □

## 3. 問題の定式化と解の定義

集合値写像$F: R^n \rightsquigarrow R^\ell$および$G: R^n \sim R^m$が与えられたとき，つぎの

問題を考えよう。

$$(\mathrm{P})\quad \left|\begin{array}{ll}\text{minimize} & F(x)\\ \text{subject to} & G(x)\cap R^m_- \neq \phi\end{array}\right. \tag{3.1}$$

問題(P)において，目的写像$F$が一価写像であれば，問題(P)はベクトル値最小化問題となる。したがって，問題(P)に対して，実行可能解および最適解をつぎのように定義しよう。

**Definition 3.1.** $(x^0, y^0)\in R^n\times R^\ell$は，$y^0\in F(x^0)$，$G(x^0)\cap R^m\neq\phi$であるとき，問題(P)の実行可能解であるという。

**Definition 3.2.** 問題(P)の実行可能解$(x^0, y^0)\in \mathrm{Graph}(F)$は，$y<y^0$を満たす他の実行可能解$(x, y)$が存在しないとき，問題(P)の弱パレート最適解であるという。

問題(P)に関連するつぎの問題を考えよう。

$$(\widehat{\mathrm{P}})\quad \left|\begin{array}{ll}\text{minimize} & \widehat{F}(x)\\ \text{subject to} & 0\in \widehat{G}(x)\end{array}\right. \tag{3.2}$$

$(x^0, y^0)\in R^n\times R^\ell$は$y^0\in\widehat{F}(x^0)$，$0\in\widehat{G}(x^0)$であるとき，問題$(\widehat{\mathrm{P}})$の実行可能解であるという。実行可能解$(x^0, y^0)$は，$y<y^0$を満たす他の実行可能解$(x, y)$が存在しないとき，問題$(\widehat{\mathrm{P}})$の弱パレート最適解であるという。

問題(P)と問題$(\widehat{\mathrm{P}})$の間には，つぎの関係が成立する。

**Theorem 3.1.** $(x^0, y^0)\in \mathrm{Graph}(F)$が問題(P)の弱パレート最適解であるための必要十分条件は$(x^0, y^0)$が問題$(\widehat{\mathrm{P}})$の弱パレート最適解となることである。

**証明**　$(x^0, y^0)$が問題(P)の弱パレート最適解であれば，ある$z^0\in G(x^0)\cap R^m_-$が存在する。したがって，$0=z^0-z^0\in G(x^0)+R^m_+=\widehat{G}(x^0)$である。すなわち，$(x^0, y^0)$は問題$(\widehat{\mathrm{P}})$の実行可能解である。さて，$y<y^0$である問題$(\widehat{\mathrm{P}})$の実行可能解$(x, y)$が存在すると仮定しよう。このとき，一般性を失うことなく，$y\in F(x)$であると仮定することができる。さらに，$0\in\widehat{G}(x)$なので，$0=z+d$である$z\in G(x)$，$d\in R^m_+$が存在する。ゆえに，$z=-d\in R^m_-$である。すなわち，$(x, y)$は問題(P)の実行可能解

である。しかしながら，これは$(x^0, y^0)$が問題(P)の弱パレート最適解であることに反する。逆が成立することも同様にして示すことができるので証明を省略する。 □

## 4. 必要条件と十分条件

ここでは，前節で定義した問題(P)に対して，ある実行可能解が問題(P)の弱パレート最適解であるための必要条件および十分条件を与えよう。

**Theorem 4.1.** $(x^0, y^0) \in \mathrm{Graph}(F)$が問題(P)の弱パレート最適解であれば，このとき，任意の$z^0 \in \widehat{G}(x^0) \cap R^m_-$に対して

$$D\widehat{H}(x^0, y^0, z^0)(u) \cap \mathrm{int}\, R^\ell_- \times \mathrm{int}\, R^m_- \neq \phi \tag{4.1}$$

を満たす$u \in R^n$は存在しない。

**証明** ある$z^0 \in \widehat{G}(x^0) \cap R^m_-$に対して，$(v, w) \in D\widehat{H}(x^0, y^0, z^0)(u)$，$v < 0$および$w < 0$を満たす$(u, v, w)$が存在すると仮定しよう。このとき，ゼロに収束する正の実数列$\{t_n\}$および$(u, v, w)$に収束する点列$\{(u^n, v^n, w^n)\}$が存在し，すべての$n$に対して

$$y^0 + t_n v^n \in \widehat{F}(x^0 + t_n u^n) = F(x^0 + t_n u^n) + R^\ell_+ \tag{4.2}$$

$$z^0 + t_n w^n \in \widehat{G}(x^0 + t_n u^n) = G(x^0 + t_n u^n) + R^m_+ \tag{4.3}$$

が成立する。ゆえに，各$n$に対して，$d^n \in R^\ell_+$および$r^n \in R^m_+$が存在し，すべての$n$に対して，

$$y^0 + t_n v^n - d^n \in F(x^0 + t_n u^n)$$

$$z^0 + t_n w^n - r^n \in G(x^0 + t_n u^n)$$

が成立する。このとき，十分大きなすべての$n$に対して，$y^0 + t_n v^n - d^n < y^0$，$z^0 + t_n w^n - r^n \leqq 0$であるが，これは$(x^0, y^0)$が問題(P)の弱パレート最適解であることに反する。 □

$(x^0, y^0) \in \mathrm{Graph}(F)$が問題(P)の弱パレート最適解であれば，$0 \in \widehat{G}(x^0) \cap R^m_-$である。したがって，つぎのcorollaryがえられる。

**Corollary 4.1.** $(x^0, y^0) \in \mathrm{Graph}(F)$が問題(P)の弱パレート最適解であれば，

$$D\widehat{H}(x^0, y^0, 0)(u) \cap \mathrm{int}\, R^\ell_- \times \mathrm{int}\, R^m_- \neq \phi \tag{4.4}$$

を満たす$u \in R^n$は存在しない。

**Theorem 4.2.** $(x^0, y^0) \in \mathrm{Graph}(F)$を問題(P)の弱パレート最適解，$z^0 \in \widehat{G}(x^0) \cap R^m_-$とし，$T(\mathrm{Graph}(\widehat{H});(x^0, y^0, z^0))$は凸集合であるものとする。このとき，任意の$(v, w) \in \mathrm{Range}(D\widehat{H}(x^0, y^0, z^0))$に対して

$$\langle \lambda, v \rangle + \langle \mu, w \rangle \geqq 0, \tag{4.5}$$

$$(\lambda, \mu) \geq (0, 0), \tag{4.6}$$

を満たすベクトル$\lambda \in R^\ell$および$\mu \in R^m$が存在する。

**証明**　Lemma 2.5から，$\mathrm{Range}(D\widehat{H}(x^0, y^0, z^0))$は凸集合である。$(x^0, y^0)$が問題(P)の弱パレート最適解であれば，Theorem 4.1から，$\mathrm{Range}(D\widehat{H}(x^0, y^0, z^0))$と$\mathrm{int}\, R^\ell \times \mathrm{int}\, R^m$とを分離する超平面が存在する。すなわち，(4.5)および(4.6)を満足する$\lambda \in R^\ell$，$\mu \in R^m$が存在する。 □

Theorem 4.2において，$\lambda \geq 0$であるとは限らない。$(x^0, y^0, z^0) \in \mathrm{Graph}(H)$において$\lambda \geq 0$であるとき，問題(P)は$(x^0, y^0, z^0)$においてnormalであるという。$\lambda \geq 0$を保証するための条件は，一般に制約想定あるいは正則性の条件とよばれるが，ここではつぎの制約想定を定義しよう。

$(x^0, y^0, z^0) \in \mathrm{Graph}(\widehat{H})$において

$$P(\mathrm{Range}(D\widehat{H}(x^0, y^0, z^0))) = R^m \tag{4.7}$$

が成立する。ただし，$P(\mathrm{Range}(D\widehat{H}(x^0, y^0, z^0)))$は$\mathrm{Range}(D\widehat{H}(x^0, y^0, z^0))$の$R^m$への射影である。

**Theorem 4.3.** 問題(P)において，Thorem 4.2の仮定はすべて満たされているものとし，さらに$(x^0, y^0, z^0) \in \mathrm{Graph}(\widehat{H})$において制約想定(4.7)が成立しているものとする。このとき，$(x^0, y^0)$が問題(P)の弱パレート最適解であれば，(4.5)を満たすベクトル$\lambda \geq 0$，$\lambda \in R^\ell$および$\mu \geqq 0$，$\mu \in R^m$が存在する。

**証明**　Theorem 4.2から，$\lambda \geq 0$であることを示せばよい。$\lambda = 0$であると仮定しよう。このとき，(4.5)から，$\mu = 0$が導かれるが，これは(4.6)に反する。 □

Codiffentialの定義から，つぎのcorollaryがえられる。

**Corollary 4.2.** $(x^0, y^0) \in \mathrm{Graph}(F)$を問題(P)の弱パレート最適解，$z^0 \in \widehat{G}(x^0) \cap R^m_-$とし，$T(\mathrm{Graph}(\widehat{H});(x^0, y^0, z^0))$は凸集合であるものとする。このとき，(4.6)および

$$0 \in \partial \widehat{H}(x^0, y^0, z^0)(\lambda, \mu) \tag{4.8}$$

を満たすベクトル$\lambda \in R^\ell$および$\mu \in R^m$が存在する。さらに，$(x^0, y^0, z^0)$において制約想定(4.7)が成立すれば，$\lambda \geq 0$である。

**Corollary 4.3.** $(x^0, y^0) \in \mathrm{Graph}(F)$を問題(P)の弱パレート最適解，$z^0 \in \widehat{G}(x^0) \cap R^m_-$とし，$T(\mathrm{Graph}(\widehat{H});(x^0, y^0, z^0))$は凸集合とする。このとき，

(i) $F$は$x^0$において局所リプシッツ連続であり，$\widehat{F}$は$(x^0, y^0)$においてderivableである。

(ii) $G$は$x^0$において局所リプシッツ連続であり，$\widehat{G}$は$(x^0, z^0)$においてderivableである。

のいずれかが成立すれば，(4.6)および

$$\langle \lambda, v \rangle + \langle \mu, w \rangle \geq 0, \ \forall (v, w) \in \mathrm{Range}(D\widehat{F}(x^0, y^0) \times D\widehat{G}(x^0, z^0)) \tag{4.9}$$

を満たすベクトル$\lambda \in R^\ell$および$\mu \in R^m$が存在する。さらに，$(x^0, y^0, z^0)$において制約想定(4.7)が成立すれば，$\lambda \geq 0$である。

$F$が$R^\ell_+$-凸写像，$G$が$R^m_+$-凸写像であれば，任意の$(x^0, y^0, z^0) \in \mathrm{Graph}(\widehat{H})$に対して，$T(\mathrm{Graph}(\widehat{H});(x^0, y^0, z^0))$は凸集合となる。したがって，以下のcorollariesがえられる。

**Corollary 4.4.** $F: R^n \sim R^\ell$および$G: R^n \sim R^m$は$R^\ell_+$-凸，$R^m_+$-凸写像とし，$(x^0, y^0) \in \mathrm{Graph}(F)$を問題(P)の弱パレート最適解，$z^0 \in \widehat{G}(x^0) \cap R^m_-$とする。このとき，(4.5)，(4.6)および(4.8)を満たすベクトル$\lambda \in R^\ell$および$\mu \in R^m$が存在する。さらに，$(x^0, y^0, z^0)$において制約想定(4.7)が成立すれば，$\lambda \geq 0$である。

**Corollary 4.5.** $(x^0, y^0) \in \mathrm{Graph}(F)$を問題(P)の弱パレート最適解，$z^0 \in \widehat{G}(x^0) \cap R^m_-$とし，$F: R^n \sim R^\ell$および$G: R^n \sim R^m$はそれぞれ$R^\ell_+$-凸，$R^m_+$-凸写像とする。このとき，

(i) $F$は$x^0$において局所リプシッツ連続であり，$\widehat{F}$は$(x^0, y^0)$におい

て derivable である。

(ii) $G$ は $x^0$ において局所リプシッツ連続であり，$\hat{G}$ は $(x^0, z^0)$ において derivable である。

のいずれかが成立すれば，(4.6) および (4.9) を満たすベクトル $\lambda \in R^{\ell}$ および $\mu \in R^m$ が存在する。さらに，$(x^0, y^0, z^0)$ において制約想定 (4.7) が成立すれば，$\lambda \geq 0$ である。

**Theorem 4.4.** 問題 (P) において，$F : R^n \rightsquigarrow R^{\ell}$ および $G : R^n \rightsquigarrow R^m$ はそれぞれ $R^{\ell}_{+}$-凸，$R^m_{+}$-凸写像であり，$(x^0, y^0, z^0) \in \mathrm{Graph}(H)$，$z^0 \in G(x^0) \cap R^m_{-}$ とし，$(x^0, y^0, z^0)$ において制約想定 (4.7) が満たされているものとする。さらに，

(i) $F$ は $x^0$ において局所リプシッツ連続であり，$\hat{F}$ は $(x^0, y^0)$ において derivable である。

(ii) $G$ は $x^0$ において局所リプシッツ連続であり，$\hat{G}$ は $(x^0, z^0)$ において derivable である。

のいずれかが成立するものとする。このとき，$(x^0, y^0)$ が問題 (P) の弱パレート最適解であれば，

$$\mathrm{Range}(D\hat{F}(x^0, y^0) + UD\hat{G}(x^0, z^0)) \cap \mathrm{int}\, R^{\ell}_{-} = \phi \tag{4.10}$$

を満たす $U \in \mathscr{U}$ が存在する。ただし，$\mathscr{U} \equiv \{U \in R^{\ell \times m} \mid U \geqq 0\}$ である。

**証明**　$(x^0, y^0)$ が問題 (P) の弱パレート最適解であれば，このとき，

$$\langle \lambda, v \rangle + \langle \mu, w \rangle \geqq 0,\ \forall (v, w) \in \mathrm{Range}(D\hat{F}(x^0, y^0) \times D\hat{G}(x^0, z^0)) \tag{4.11}$$

を満たすベクトル $\lambda \geq 0$，$\lambda \in R^{\ell}$ および $\mu \geqq 0$，$\mu \in R^m$ が存在する。$\lambda \geq 0$ なので，一般性を失うことなく $\sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i = 1$ と仮定することができる。さて，$U \equiv 1\mu^T$ によって $\ell \times m$ 行列を定義しよう。このとき，$U \in \mathscr{U}$ であり，$\lambda^T U = \mu^T$ である。ただし，$1 \equiv (1, 1, \ldots, 1)^T \in R^{\ell}$ である。このとき，(4.10) から，任意の $v + Uw \in \mathrm{Range}(D\hat{F}(x^0, y^0) + UD\hat{G}(x^0, z^0))$ に対して，

$$\langle \lambda, v + Uw \rangle = \langle \lambda, v \rangle + \langle \mu, w \rangle \geqq 0$$

が成立する。ゆえに，$v + Uw \notin \mathrm{int}\, R^{\ell}_{-}$ であり，(4.10) が成立する。 □

(4.10) が非線形計画問題における Kuhr-Tucker の定理の一般化となって

いることを確認することは容易であろう。

さてつぎに，問題(P)のある実行可能解$(x^0, y^0) \in \mathrm{Graph}(F)$が弱パレート最適解であるための十分条件を与えよう。

**Theorem 4.5** $(x^0, y^0) \in \mathrm{Graph}(F)$を問題(P)の実行可能解とし，$z^0 \in G(x) \cap R^m_-$とする。さらに，$\mathrm{Graph}(\hat{H}) - \{(x^0, y^0, 0)\} \subseteq T(\mathrm{Graph}(H); (x^0, y^0, z^0))$が成立するものとする。このとき，(4.9)を満足する$\lambda \geqq 0$，$\lambda \in R^\ell$および$\mu \geqq 0$，$\mu \in R^m$が存在すれば，$(x^0, y^0)$は問題(P)の弱パレート最適解である。

**証明** $(x^0, y^0)$が問題(P)の弱パレート最適解でなければ，このとき，$\bar{y} < y^0$を満たす問題(P)の実行可能解$(\bar{x}, \bar{y})$が存在する。仮定から，任意の$\bar{z} \in G(\bar{x}) \cap R^m_-$に対して，$(\bar{x} - x^0, \bar{y} - y^0, \bar{z}) \in T(\mathrm{Graph}(H); (x^0, y^0, z^0))$である。すなわち，

$$(\bar{y} - y^0, \bar{z}) \in D\hat{H}(x^0, y^0, z^0)(\bar{x} - x^0)$$

が成立する。このとき，(4.9)を満足するベクトル$\lambda \in R^\ell$および$\mu \in R^m$に対して，

$$\langle \lambda, \bar{y} - y^0 \rangle + \langle \mu, \bar{z} \rangle < 0$$

が成立するが，これは矛盾。 □

**Theorem 4.6.** 問題(P)において$F: R^n \rightsquigarrow R^\ell$，$G: R^n \rightsquigarrow R^m$をそれぞれ$R^\ell_+$-凸，$R^m_+$-凸写像とし，$(x^0, y^0) \in \mathrm{Graph}(F)$を問題(P)の実行可能とする。このとき，

$$\langle \lambda, v \rangle + \langle \mu, w \rangle \geqq 0, \ \forall (v, w) \in \mathrm{Range}(D\hat{F}(x^0, y^0) \times D\hat{G}(x^0, 0)) \quad (4.12)$$

を満足するベクトル$\lambda \geqq 0$，$\lambda \in R^\ell$および$\mu \geqq 0$，$\mu \in R^m$が存在すれば，$(x^0, y^0)$は問題(P)の弱パレート最適解である。

**証明** $F: R^n \rightsquigarrow R^\ell$，$G: R^n \rightsquigarrow R^m$が$R^\ell_+$-凸，$R^m_+$-凸写像であれば，$\mathrm{Graph}(\hat{H})$は凸集合である。したがって，Lemma 2.2から，$(x^0, y^0, 0) \in \mathrm{Graph}(\hat{H})$において$\mathrm{Graph}(\hat{H}) - \{(x^0, y^0, 0)\} \subseteq T(\mathrm{Graph}(\hat{H}); (x^0, y^0, 0))$が成立する。さて，$(x^0, y^0)$が問題(P)の弱パレート最適解ではないと仮定しよう。このとき，$\bar{y} < y^0$を満たす問題(P)の実行可能解$(\bar{x}, \bar{y})$および$\bar{z} \in G(\bar{x}) \cap R^m_-$が存在し，$(\bar{x} - x^0, \bar{y} - y^0, \bar{z})$

$\in T(\mathrm{Graph}(\widehat{H});(x^0, y^0, 0))$が成立する。すなわち，

$$(\bar{y}-y^0, \bar{z}) \in DH(x^0, y^0, 0)(\bar{x}-x^0)$$

が成立する。このとき，任意の$\lambda \geq 0$, $\mu \geqq 0$に対して

$$\langle \lambda, \bar{y}-y^0 \rangle + \langle \mu, \bar{z} \rangle < 0$$

であるが，これは(4.12)に反する。 □

## 参 考 文 献

[1] Aubin, J., P., and H. Frankowska, *Set-Valued Analysis*, Birkhäuser, Boston, Basel, Berlin, 1990.

[2] Luc, D. T., *Theory of Vector Optimization*, Springer-Verlag, Berlin, Heiderberg, New York, 1989.

[3] Maeda, T., *On Pareto Optimality in nondifferentiable multi-objective optimization problem*, KEIEI TO KEIZAI, Nagasaki University, Vol. 64, pp. 107-120, 1980.

[4] 前田隆 *Optimization Problems with Set-Valued Maps*, 『京都大学数理解析講究録』, 京都大学数理解析研究所, 1996 ( 近刊 ).

[5] 前田隆『多目的意思決定と経済分析』, 牧野書店, 1996 ( 近刊 ).

[6] Ursescu, C., *Multifunctions with closed convex graph*, Czechoslovakia Mathematics Journal, vol.25, pp.438-441, 441