数学的な思考力を育む指導と評価

浜口　国彦
数学科　戸水　吉信
三浦　幸生

１．テーマ設定の理由

本校数学科では，数学的な思考力の育成を目標として，これまで継続的に研究を重ねてきた。金沢大学の大谷実教授の指導の下，ファン・ヒーレの思考水準について学習をすすめ，実践を重ねてきた。そして，思考力の育成のために，自己表現力を高め，伝えあう活動を行い，授業実践を行った。

平成２２年度は，言語活動を学習活動の一部に取り入れ，数学科における「言語に関わって伸ばしたい力」を「筋道を立てて説明する力」と位置づけ，他者に自分の考え方を分かりやすく「説明する」力の育成を目指した授業実践を行ってきた。

平成２３年度は，言語活動における学習活動の評価の研究を行い，「筋道を立てて説明する力の評価」を「数学的な見方や考え方」に焦点をあて，形成的評価としての積み重ねを行ってきた。その際，「筋道を立てた説明」を，「直感的な説明」「類推的な説明」「帰納的な説明」「演繹的な説明」に分類し，生徒の考えをより的確に評価し，より効果的にフィードバックする方法を模索してきた。

これまでの数学科の研究の流れを考えると，平成２２年度や平成２３年度の研究は，まさに数学的な思考力を育むための有効な手段の一つであると考えられる。すなわち，筋道を立てて説明する力を伸ばすことは，自分の考えを整理し，それを数学的に表現する力につながり，また，それを伝えあい，評価しあうことが，さらに自分の考えを数学的に高めることにつながると考えられるからである。

そこで今年度は，数学科の研究テーマを「数学的な思考力を育む指導と評価」とし，昨年度までの研究を生かしながら，生徒が数学的に考える力を伸ばす指導と評価のあり方について研究を進めることにした。すなわち，言語活動を思考力を育む学習活動の一部として位置づけ，生徒にどのような力がついたか検証し，それを生徒自身にフィードバックするとともに，授業者がそれを振り返り，授業自体にフィードバックされるような形成的評価の積み重ねを行うことを研究の方針としたい。そして最終的には，生徒に「演繹的に説明する」力をつけることを目標として，形成的評価の成果を検証し，それを思考力を育むための効果的な指導と評価としてまとめていきたい。

①直感的な説明・・・操作活動等を通して直感的に説明する
②類推的な説明・・・他の類似した事例から類推的に説明する
③帰納的な説明・・・具体的な事例や特別な事例から一般的な法則が成り立つことを説明する
④演繹的な説明・・・既習の法則をもとにあることがらが成り立つことを説明する

２．数学科として特に育みたい思考力について

数学的思考力を一言で定義することは難しいが本校では次のようにとらえていきたい。

・既習の数学的知識・技能を用いて問題解決したり数学的な事柄を論理的に考え，筋道を立てて説明できる力

数学科としては，数学的な思考力につながる力として，特に「筋道を立てて説明する力」を育みたいと考えている。課題を解決する際，言葉や数，式，図，グラフなどの数学的表現を用いて考えを進めたり深めたりする。また，色々と考えることによってよりよい数学的表現できるようになる。更に，他者に自分の考えを「筋道を立てて説明しよう」とすれば，自分の考えを整理したり深めることで数学的思考が深まる。また，相手に理解してもらうためにはよりよい数学的表現で相手に説明しようとする。このように，数学的思考力と数学的表現力は切り離すことのできないものである。つまり「筋道を立てて説明しよう」とすれば「筋道を立てて考える」ことが促されることになる。

筋道を立てた説明を本校数学科では「直感的な説明」「類推的な説明」「帰納的な説明」「演繹的な説明」ととらえている。

類推的な考え方・説明や帰納的な考え方・説明を用いて身の回りや数学的な事象から新たな決まりや法則を見つけることができる。ただ，見つけただけではそのことが本当に正しいかどうかは判断できない。学年が進むにつれて演繹的な考え方を用いて，いつでも正しいことを説明する場面が増えていく。そこで，「演繹的に説明する力」を育むことを本校数学科の第一の目標としていきたい。

しかし，学年の発達段階や単元・教材に応じ，４つの考え方それぞれの関係や，たとえば４つの考え方の時系列に沿った流れなども鑑みて，指導と評価を行うことが大切であると考えている。そのため，生徒の考え方やその表現を予想し，４つの考え方に分類した評価指標をつくっておくことが，より効果的な指導と評価につながると考えている。昨年度までも，評価指標を作成し指導と評価に役立ててきたが，今年度はさらにそれぞれの考え方の関係性や思考の流れがわかるような評価指標の作成に取り組みたい。

３．数学的思考力育成のために

（１）数学的思考力を育成するための学習場面

授業の中で数学的な思考力を育成するためには次のような学習場面をつくっていきたい。

①数学的な思考力を促す課題の提示

②個人追求し考えをまとめる活動

③他者に説明したり伝え合う活動

　ア　各自が自分の考えを，他者に説明し合う。

　イ　問題解決のために図や式で表現したもの別の生徒が理解し説明する。

　ウ　他の人の考えを取り入れたり，評価したりする。

（２）数学的な思考力を促す課題の提示

まず生徒が「おや　どうなるだろうか　なぜだろう　どうしたらよいかな　本当だろうか　どちらがよいだろうか」など生徒の内面からの問いが出るような課題設定が必要である。身の回りの事象や既習の学習内容の中に生徒が不思議さや疑問を感じる課題があれば，生徒が興味・関心を示し，自ら進ん考えようとする。その際，生徒の思考を促す教師の発問の吟味も大切である。そうすれば生徒の内面で既習の数学の知識・技能を用いて考えようとする。

（３）数学的思考力を促す発問

適切な学習課題をもとに，教師の発問によってまず生徒の個人追求による思考活動が促される。その発問を次のように分類した。

①ある性質や決まりの一般性を問う

「いつでも言えますか」…帰納的な思考や演繹的な思考を促す

「他の場合でも言えますか」…帰納的な思考や類推的な思考を促す

②理由や根拠を問う

「なぜ言えますか」「どんな理由からですか」「これは○○と言えますか」

…帰納的な思考や演繹的な思考を促す

③発展性を問う

「他に何が言えますか」「もっと言えることはありますか」「さらに言えることはありますか」

「条件を変えたらどうなりますか」…直観的な思考・帰納的な思考や類推的な思考を促す

④共通性や相違性を問う

「これは○○と同じですか」「○○との違いは何ですか」…類推的な思考を促す

（4）他者に説明したり伝え合う活動

個人追求した結果を他者に説明することで自分の考えが正しいか，あるいは修正が必要かを評価できる。また，解決への見通しがもてない生徒は他の生徒の考えを聞くことで課題への理解を深めることができる。

他者に説明したり伝え合う活動としては「周囲の生徒同士，班活動，一斉指導」があるが，それぞれの長所と短所を教師が理解したうえで学習活動として取り入れる必要がある。

①周囲の生徒同士での学習活動

「話しやすい。全員が説明する機会をもてる。短時間に簡単に活動できる。」等の長所があるが「様々な考え方に触れる機会が少ない。互いに説明できない場合は活動が成り立たない。」等の欠点がある。

②班（３人～５人）での学習活動

「数人の考えを聞くことで，自分の考えを高めたり修正できる。発言しやすい。」等のよさがあるが，欠点として「班活動のルールに慣れることが必要である。各班の活動内容や活動時間に差が生じる。個性の強い生徒がいると，班の人間関係がうまくいかない」等である。

③学級全体での一斉学習

「様々な考え方を知る機会が増え，クラス全体で考えをまとめることができる。より高い次元の知識や考えを習得できる機会ができる。全員で考え方を共通理解できる。」等の長所が反面「生徒全員が自分の考えを発表できない。全員の前で話すのが得意でない生徒には，よい考えがあっても発表しにくい。」等の欠点がある。

４．数学的思考力・表現力と言語活動

生徒の数学的思考力を育成するための授業のあり方として前述したように次のような過程を取り入れていく。

①生徒が課題追求をして自分の考えをまとめる。

②自分の考えを数学的に表現する。

③数学的表現を用いて相手に分かりやすく説明する。

④相手の説明を理解し，相手の考え方を評価したり取り入れる。

そのとき言葉や数，式，図，表，グラフなどの数学的表現を用いた言語活動が行われる。生徒の

内面で数学的表現を用いて考えまとめる言語活動と生徒同士が互い説明し合い伝え合う言語活動がある。相手に説明し理解してもらおうとすると，自分の考えが整理され，よりよい数学的表現で相手に説明しようとする。相手に聞いてもらえたことで自分の考えのよさや欠点に気づくこともできる。

相手の説明を聞くことで新しい見方や考えに出会ったり気づいたりすることができる。また，わからないことを教えあうことにもなる。さらに授業の課題を発展させた課題ついてレポートを作成させると，自分の考えを深め数学的思考力の育成につながる。

学習課題に対して言葉や数，式，図，表，グラフなどの数学的表現を用いて考え，自分の考えを分かりやすく説明したり，根拠を明らかにし筋道を立て説明し，表現し伝え合ったりする活動は数学的な思考力・表現力を伸ばしていくものと考えられる。

5. 評価とその生かし方

評価については，まず縦軸に直感的・類推的・帰納的・演繹的の説明の型の分類をとる。次に，横軸に十分満足・おおむね満足・支援を要するの段階をそれぞれとる。この２つの軸をもとにマトリックス表を作成し，評価の基準を整理した。評価の基準は，教員でも，生徒でも，だれが見てもわかりやすくぶれのない評価ができるよう，具体的な生徒の活動の状況をできるだけ記載するよう努めた。このことによって，評価したことをその場で生徒にフィードバックし，よりよい説明の仕方を共有できるようになった。そのことがさらに生徒がよりよい説明をする力につながり，生徒の思考力を伸ばすことにつながると考えた。

この表を，本校数学科では「評価の指針」と呼ぶことにし，言語活動を行って生徒の思考力を伸ばす活動を行う際，評価とフィードバックに役立ててきた。この「評価の指針」ついては，数学科教員同士が日常的に話し合いを重ね，試行錯誤しながら，少ない労力で，より実効性のあるものを目指し，今も改良を重ねている。表もすべてを埋める必要もなく，活動によって必要な部分だけを生徒に示しながら，よりよい評価，よりよいフィードバックを行うようつとめている。

＜評価の指針作成例＞

１年「比例と反比例」・・・２つの量が比例していることや反比例していることを説明する活動

	説明の状況	十分満足できる状況（A）	概ね満足できる状況(B)	支援を要する状況（C）
直感的な説明	・一方が2倍，3倍になるともう一方が2倍，3倍になったり1／2倍，1／3倍になったりすることを直感的に使って説明する。	一方がもう一方の逆数倍になることを用いて説明している。	1／2や1／3にあたる量を実際に求め，それを用いて説明している。	変化の前と後で何倍になっているかが分からない。
類推的な説明	・他の問題の解法から x や y にあたる量を類推して説明する。 ・比例式に類推する思考。	2つの量の比が等しいことを用いて説明している。	1あたりの量を求め，それの何倍になるかということを用いて説明している。	2つの量の割合を考えたり，1あたりの量を比較する考えに至らない。
帰納的な説明	・２つの量の変化を表にまとめ，そこから式を作って説明する。 ・１にあたる量を求め，それが何にあたるかを比例や反比例の式を用いて説明する。 ・変化の仕方からグラフがどうなるかを予想し，グラフを用いて説明する。	２つの量の変化から，比例や反比例になることを帰納的に説明し，それを用いている。（片方が a 倍になるともう片方も a 倍になることや，$y／x$ が一定であることなど，数学的な根拠を使っている。）	２つの量の変化から，式やグラフを用いて説明している。	２つの量の変化をまとめた表から，法則を見いだすことができない。
演繹的な説明	・２つの量の関係を読み取って比例や反比例の一般式で表されることを用いて説明する。	事象を表した問題文から，比例や反比例になることを演繹的に説明し，それを用いている。（一般型に１組の x，y の値を代入して式を求めている。）	事象を表した問題文から式を作って説明している。	事象を表した問題文から数学的な関係を見いだすことができない。

６．１学年の実践例

（１）学習場面（課題）

次の①～③はｙがｘに反比例しているか。
①１２ｋｍの道のりを時速ｘｋｍで進むとｙ時間かかる。
②１０Ｌ入る水槽に毎分２Ｌの割合で水を入れるとｘ分で水の量はｙＬになる。
③２４個あるビー球をｘ人で分けると１人あたりｙ個になる。

比例・反比例を一通り学習した後の練習問題として行う。①は連続量の変域の中でｙはｘに反比例している。②は０≦ｘ≦５の変域でｙはｘに比例している。③ ｙ＝24／ｘ が成り立ち，限られた自然数の変域では反比例している。生徒には比例・反比例している根拠を上げて発表させる。これまでの学習から式・表をかいて判断する。

ｙ＝24／ｘ

ｘ	1	2	3	4	6	8	12	24
ｙ	24	12	8	6	4	3	2	1

そこで①～③のグラフを描いてみることにする。①は０＜ｘで双曲線になる。②は０≦ｘ≦５で直線（線分）になる。①②グラフはこれまでの学習と大きな相違はない。多くの生徒は③のグラフも連続したグラフを描こうとする。しかし，教師の問いかけから（ｘ，ｙ）＝（１，２４）（２，１２）（３，８）（４，６）（６，４）（８，３）（１２，２）（２４，１）の８点しかないことに気づく。グラフを連続的に結ぶことができず，今までの反比例のグラフ双曲線と形状が異なるので，反比例か疑問に思う生徒が出てくる。生徒の疑問としては「グラフが連続していない。」「今までのグラフと違うので反比例と言えるか」「ｘが２倍になってもｙの値がない場合があるので反比例と言えるのか」「変域を考えるとその変域ではｙ＝２４／ｘが成り立つので反比例と言えるのではないか」等が出てくる。

グラフが双曲線にならなくても「２４個あるビー球をｘ人で分けると一人あたりｙ個になる。」という事象でｙはｘに反比例しているか。

ここで上記のような学習課題が設定できる。新指導要領では１年で「関数関係を見いだし表現する」を指導することになった。ｘの値が決まればｙの値も決まるという関係を学習していく。これまで伴って変化する量としてとらえていた比例・反比例をこの関数関係としてとらえ直していく指導が必要になる。この離散量の変域においても反比例するということを学習することで，反比例もｘの値が決まればｙの値も決まるという関数関係の一つであるとの認識を高める学習活動になると考えられる。

また，比例・反比例を表・式・グラフで考察する学習を進めてきたが，グラフや表では見かけの上では比例・反比例がどうか判断に迷う場合がある。しかし，式で表現すればどのような場合でも判断できる。中学校で比例・反比例の定義が式になっている意味の理解を深まると思われる。

（2）課題の提示方法

プリントで問題を提示し，電子黒板で表やグラフを描いて課題を把握しやすくする。

（3）発問と流れ

「どうなるだろうか。」「なぜだろうか。」「本当だろうか。」「どちらが正しいだろうか。」「どうすればよいだろうか。」等の内面的問いが生じる問いかけを考えていく。この題材の場合の中心的な発問は「離散量を変域とした場合のでも反比例するか」ということである。

発問１　「表を書いてそれをもとにグラフをかいてみよう。」

グラフを連続的な双曲線で結ぶ生徒がほとんどである。グラフはなぜ結んで良かったのか確認する。点の集合としてグラフがかかれている。この場合はｘ＝５，ｘ＝７のときｙの値は存在しない。また，正の整数値以外のｘの値も存在しない。（ｘ，ｙ）＝（１，２４）（２，１２）（３，８）（４，６）（６，４）（８，３）（１２，２）（２４，１）の８点しかないのでグラフを連続的に結ぶことはできない。

今までの反比例のグラフ双曲線と形状が異なるので，反比例か疑問に思う生徒が出てくると考えられる。生徒からそのような疑問が出てきたら問いかける。

発問２　「グラフが双曲線にならないがこのｘとｙは反比例しているか」

そこで反比例の条件「ｘの値が２倍，３倍，･･･になるとｙの値が１／２倍，１／３倍･･･になる。」が成り立つか考える。あるいは式ｙ＝a／ｘが成り立つか考える。８点の中では「ｘの値が２倍，３倍，･･･になるとｙの値が１／２倍，１／３倍･･･になる。」が成り立つ。しかし，ｘ＝５だとｘが２倍になってもｙが１／２倍になると２．５で値がないのでこの関係が成り立たない。生徒の間でも意見が分かれることが考えられる。また，式はこの８点では成り立つことから反比例だと考える生徒も出てくる。

補助発問「ここで既習事項である変域について取り上げる。この課題の変域はどうなるだろうか」

変域は正の整数でしかもｘ＝１，２，３，４，６，８，１２，２４の８しかない。この変域ではではｙ＝２４／ｘが成り立ち，ｘがａ倍になるとｙは１／ａ倍になるので反比例と言える。

（4）説明し合う活動内容

本校数学科として「他者に伝え合い評価する。」活動を取り入れることで他者の考えを取り入れたり，自分の考えを数学的に高めることができると考えている。

この題材では，反比例すると考える生徒は次のような根拠を上げる。

ｙ＝24／ｘが成り立つ。ｘが２倍になるとｙは１／２倍になっている。 変域が自然数では反比例する。

反比例でないと考える生徒は下記のような根拠を挙げる。

グラフが反比例のグラフと違う。整数以外の値がないから。
例えば，ｘ＝５のときが３倍になってもｙの値のないのでｙが１／３倍にならないから。

生徒個々人の考えがまとまった段階で，班あるいは周囲の生徒同士の話し合いで意見交換する。さらに意見交換後各自の考えを全体指導で発表させる。初めは反比例しないという意見もかなりあった。「事象には変域」があり変域よってグラフの形状が変わることに触れて考えさせた。このとで生徒の考えが収束していった。

（５）評価とその生かし方

思考力の評価は，次の評価指標を用いた形成的評価を行う。個人追求活動の時は机間指導を行う。グループでの発表の際は相互評価を生かす。また，全体発表・一斉指導では演繹的な説明につながるように支援したりフィードバックする。

	説明の状況	十分満足できる状況	概ね満足できる状況	支援を要する状況
直観的な説明	グラフの様子から反比例かそうでないか説明する。	グラフが８個の点しかないのでグラフからは反比例かどうか判断できない。	８個の点を結べば双曲線になるので反比例と言えそう。	グラフが双曲線でないので反比例ではない。小数等の値がないので反比例でない。
帰納的な説明	表からｘがａ倍になるとｙは１/ａ倍になることを実際の数を用いて説明する。	変域内ではｘの値が２倍３倍になるとｙの値が１/２，１/３倍になることを具体的な数をあげて説明している。	表からｘの値が２倍３倍になるとｙの値が１/２，１/３倍になるので反比例すると説明している。	この表ではｘが５倍，７倍などになるとｙは１/５倍，１/７倍になる数がないので反比例と説明している。
演繹的な説明	ｙ＝２４／ｘが成り立つので反比例すると説明する。	変域が２４以下の自然数と考えればその変域の中で式が成り立つので反比例である。	ｙ＝２４／ｘの式が成り立つので反比例である。	ｘ＝５などの値の時はビー玉を分けることができないので式が成り立たない場合がある。

（６）思考力の検証

「２４個あるビー球をｘ人で分けると１人あたりｙ個になる。」の問題では，「①生徒が課題追求をして自分の考えをまとめる。」「②自分の考えを数学的に表現する。」の２つの段階で，対応表や式という数学的表現を用いて問題を考察していく。つまり，対応表を作ってｘとｙの変化の様子を調べたり，ｙ＝２４／ｘを立式したりして判断するような思考活動の場面が生まれる。さらに，「③数学的表現を用いて相手に分かりやすく説明する。」では，①②の段階で個人追及したことを用いて班や周囲の生徒に説明することになる。次に，「④相手の説明を理解し，相手の考え方を評価したり取り入れる。」では，離散量の変域でグラフを描く。これまでの双曲線という連続したグラフと違った８個の点だけのグラフをかく。このことで，グラフは変域によってグラフの形状が異なることを全体の場で考察する。さらに，グラフが双曲線ではない場合でも反比例と言えるのかという学習課題が生じる。班活動や一

斉指導の中で生徒同士が互い説明し合い伝え合う言語活動が行われることになる。自分の意見を発表する生徒は一部であるが，自分と同じような意見や別の見方さらに自分と異なる意見に触れることになる。特に変域という考えを用いて考えたり，その考えを聞くことよって生徒の中に相手の考えを評価し取り入れるような思考活動が行われると考えられる。このことで比例・反比例の式による定義の必要性を理解したり関数関係に対する認識が高まる。また，演繹的説明が進んでいく一歩となる。

7．第２学年の実践例

（１）学習課題

新しい定理（図形の性質）を考え，それが成り立つわけを説明しよう。

（２）実践の流れ

①次の順序で図形の性質を学習し，学習した順に以下のように番号をふっておく。

0　　直線が表す角は１８０°である。（１周を３６０°とする。）

1　　対頂角は等しい。

２－１　平行線の同位角は等しい。

２－２　平行線の錯角は等しい。

３－１　同位角が等しい２直線は平行である。

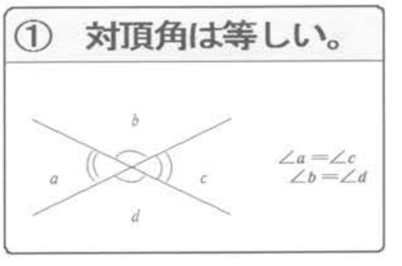
３－２　錯角が等しい２直線は平行である。

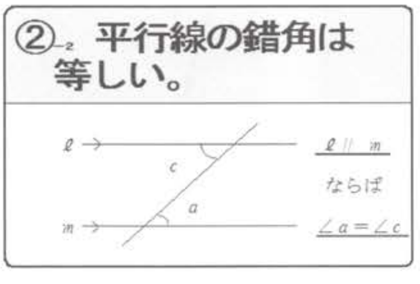
４－１　三角形の内角の和は１８０°である。

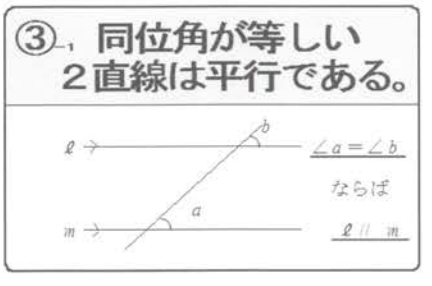
４－２　三角形の外角は，それと隣り合わない２つの内角の和に等しい。

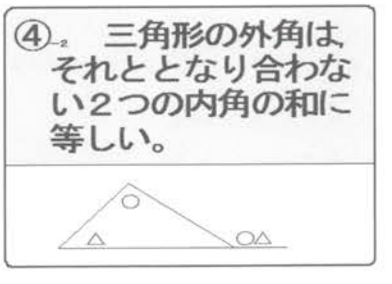
5　　n 角形の内角の和は１８０°×（n－２）である。

6　　多角形の外角の和は３６０°である。









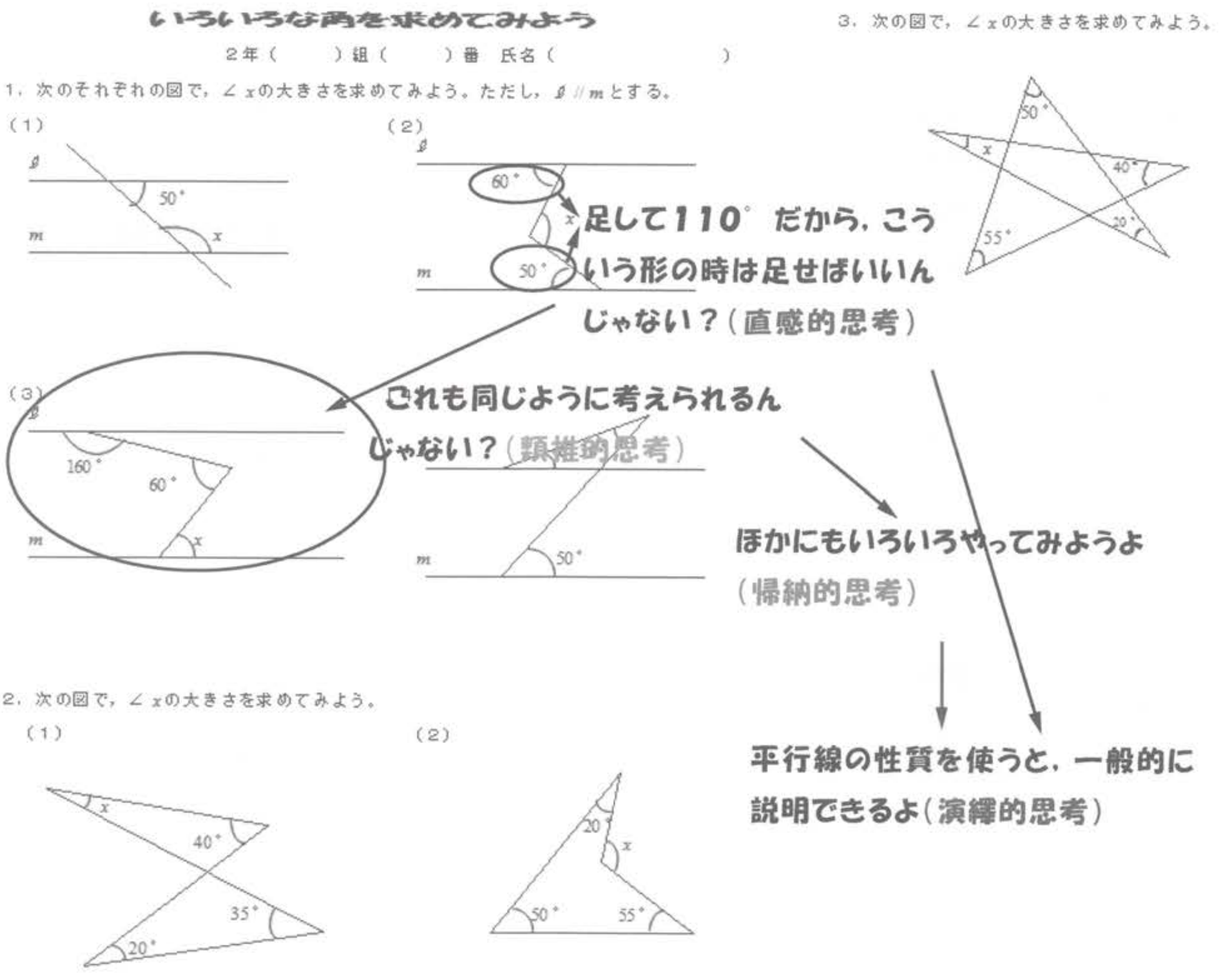
②上記の基本的な性質を使って，いろいろな角を求める問題演習を行う。（次ページ参照）

③問題演習を行う中で，「こんな定理をつくっておいたら便利だろう」という気づきを班で話し合い，それが一般的に成り立つわけを考える。

④見つけた定理とその説明を発表し，全体で共有する。

（3）実践のポイント

上記のように，既習の図形の性質を番号で表すことができるようにしておく。これで生徒が既習事項を根拠として使い，それを説明のなかに入れることへの抵抗感が少なくなったように思う。また，角度を求める複雑な問題に取り組む中で，次ページのように直感的，類推的，帰納的，演繹的な思考へと移行する手助けとなるのではないかと考えた。さらに，生徒が課題へ取り組むためのモチベーションをあげるため，「定理を見つけて自分なりにその定理に名前をつけてごらん」という課題の提示の仕方をした。凹四角形の外側の角を求める図形の性質は，教員がよく「ブーメラン形」といった名前をつけることが多いが，生徒からは「くさび形定理」「タワー形定理」「ナビの矢印形定理」「ドルフィン形定理」など，様々な名前が出てきた。生徒が楽しみながら課題に取り組んだことがうかがえる。



（4）説明し合う活動内容

4人の班で，お互いに自分の意見を説明し合い，それぞれの班が見つけた定理とそれが成り立つわけを全体で発表する活動を行った。

（5）評価とその生かし方

どんな説明がよいかということを，以下の2つの観点から生徒と共有し，その場で生徒にフィードバックした。

①既習事項を根拠としてどのように用いたかが明確になっていること

②定理が成り立つことの一般性を，帰納的または演繹的に説明できていること

その中でも，星形ｎ角形の角の和が 180° ×(n－4)であることを，以下のように全体で議論した。

生徒Ａ　ｎが偶数の場合は，n/2 角形を２つ重ねれば星形ｎ角形ができる。(直感的な思考)

星形六角形は，　三角形が２つで１８０° ＋１８０° ＝３６０° 　＝１８０° ×２

星形八角形は，　四角形が２つで３６０° ＋３６０° ＝７２０° 　＝１８０° ×４

星形十角形は，　五角形が２つで５４０° ＋５４０° ＝１０８０° ＝１８０° ×６

星形十二角形は，六角形が２つで７２０° ＋７２０° ＝１４４０° ＝１８０° ×８

２，４，６，８は，それぞれｎ角形のｎより４少ない。だから星形ｎ角形の角の和は 180° ×(n－4)じゃないかな？ (帰納的な思考)

生徒Ｂ　ｎが奇数の場合は？やっぱり 180° ×(n－4)かな？ (直感的・類推的な思考)

生徒Ｃ　実際に奇数の場合で７，９の場合もやってみたよ。

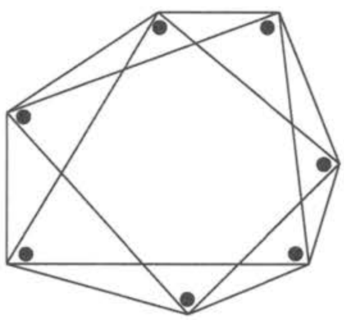
星形五角形が　１８０° ＝１８０° ×１

星形七角形が　５４０° ＝１８０° ×３

星形九角形が　９００° ＝１８０° ×５

ｎが奇数のときもやっぱり 180° ×(n－4)だ (帰納的・類推的な思考)

生徒Ｄ　次のように考えると，演繹的に説明できるよ。(演繹的な思考)

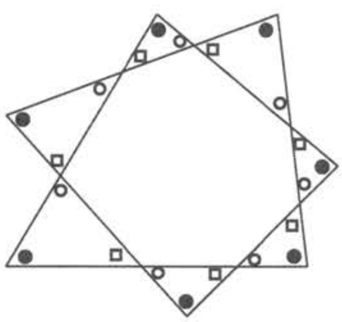


星形ｎ角形の外側にｎ角形ができる。
その内角の和から三角形ｎ個分を引けばいいのだけれど，引きすぎた分が内側のｎ角形の内角の和に等しいから，実際次のように計算すればいい。

180(n－2)－180n＋180(n－2)＝180n－720

＝180(n－4)

生徒Ｅ　こんなのはどう？ (演繹的な思考)



三角形ｎ個分から，余分なところ（○と□）を引けばいいのだけれど，○の和も□の和も，内側のｎ角形の外角の和じゃない？これは，ｎが増えても，ｎが偶数でも同じ図になって，結局外角の和２つ分をｎ個の三角形から引くことになるわ。

だから 180n－360×2＝180n－720

＝180(n－4)

これらの生徒の思考を表にまとめると，次のようになる。この表をつくることが目的ではないが，何が大切なことか，どの状態がよりよいことであるかを生徒とともに確認することによって，生徒が既習事項を使ってよりよく思考する力につなげることができたのではないかと考えている。

	十分満足	おおむね満足
直感的思考		生徒A 偶数の場合星形n角形の作り方を説明。
類推的思考		生徒B 偶数の場合から奇数の場合を類推。
帰納的思考	生徒A 具体的結果から一般的な式を導いている。	生徒C いろいろな場合で試している。
演繹的思考	生徒E 外角の和を根拠として使っていることと，どんな場合でもこの説明が使えることに言及している。	生徒D 内角の和を根拠として使っていることを説明できている。

8．第3学年における実践

（1）学習場面（課題）

個人追究し考えをまとめる活動として，単元ごとにレポート課題を下のように設定した。なお，今回の紀要では主に4章「関数　$y=ax^2$ 」のレポートについて紹介する。

1章「多項式」　…　$(x+y)^n$（nは任意）を展開し，気づくことをかく。
2章「平方根」　…　身のまわりにある「白銀比」「黄金比」を見つける。
3章「2次方程式」　…　複合問題を作成する。
4章「関数　$y=ax^2$ 」　…　$y=ax^2+bx+c$ のグラフをかく。
5章「相似な図形」　…　身のまわりにある相似な図形を見つける。
6章「三平方の定理」　…　身のまわりにあるモノの形の理由を数学的に説明する。
7章「円」　…　（6章と同じ）
8章「標本調査」　…　新聞から「全数調査」や「標本調査」の記事を探す。

（2）課題の提示方法

それぞれの単元において，単元テスト（定期テスト）が終わった頃にレポート課題の提示を行った。その際の生徒への告知方法は，教科通信を用いるか，教室掲示を用いるかのどちらかにしている。なお，4章のレポートでは，後者の方法で生徒への周知徹底を図った。

（3）発問と流れ

下のようにスモールステップ形式の課題を教室掲示した。

① タイトルをつける。
② 2次関数の式をつくる。（ $y=ax^2+bx+c$ において，a, b, c を自分で決める。）
③ ②の式をもとにして表をかく。（ x にいろいろな値を代入して，y の値を求める。）
④ ③の表をもとにしてグラフをかく。（②で求めた座標を，座標軸にプロットする。）
⑤ ②③④から気づいたことをかく。（なお，②③④は4回ずつ行って比較検討する。）

なお，2次関数 $y=ax^2+bx+c$ は発展課題として教科書にも載っている。

（4）説明し合う活動内容

レポートを作成することで，気づいたことを文章化する。それぞれのクラスで提出されたレポートをクラス全員で確認し，相互評価を行う。その際，電子黒板（含パワーポイント）か教室掲示でそれぞれのレポートの内容を確認した。なお，４章のレポートでは両方の方法で全体確認をした。まず，パワーポイントを用いて，レポートのタイトルだけを紹介することで，そのレポートの内容を想像させる。その後，それぞれのレポートを教室掲示することでレポートの内容を確認した。

レポートの内容を的確に表現しているタイトルの例

- 「もう原点は通らない」
- 「 $y=ax^2+bx+c$ のグラフ　～二次方程式と因数分解が友達!?～」
- 「三数史　～２次関羽　動く定点　止まる頂点を走らす～」

（5）評価とその生かし方

レポートは，基本的に「内容」「まとめ方」「提出期限」の３つの観点で評価する。ただし，４章のレポートでは「内容」「グラフの正確さ」「提出期限」の３つの観点で評価した。

特に「内容」について，４つの表とそのグラフから，グラフの形状を帰納的に考察できたかに重点をおいて評価した。なお，評価の良かったレポートは，どこが良かったのかを教室展示の際に紹介し，次回のレポート作成に活かせるようにしている。また，相互評価をし，友達からの評価が高かった生徒を教科通信に掲載した。

「内容」が，A評価となる生徒の気づき（帰納的に考察できている）

- 今回は $y=ax^2+bx+c$ の a, b, c の値を変えずに符号だけを変えて規則性を探ってみた。その結果，c の符号が同じ式どうしのグラフは x 軸に対して平行移動したものとなっていること，また b の符号が同じ式どうしは y 軸に対して平行移動したものとなっていることがわかった。
- （前略）c は $y=ax+b$ の b と同じような働きをすることがわかった。また $0>a$ のときグラフは上に開き，$0>a$ のときグラフは下に開くこともわかった。
- （前略）$y=ax^2+bx+c$ の a の値が等しいとき，グラフの形は等しいとわかった。

「内容」が，B評価となる生徒の気づき（帰納的な考察が十分ではない）

- 最初，$y=ax^2+bx+c$ の a, b, c の値を適当に決めていたが，因数分解や式の展開と関連づけることで，規則性が見えてきた。（後略）
- （前略）常に原点を通るわけではないし，y 軸について対称でもない。
- 二次関数のグラフは，必ず放物線になることがわかった。

（6）レポートに関するアンケート結果と感想

①アンケート結果

ア…思う　イ…やや思う　ウ…あまり思わない　エ…思わない

質問項目	ア	イ	ウ	エ
数学の知識や技能を「習得」できた。	37.6%	53.2%	7.8%	1.4%
数学の知識や技能を「活用」できた。	44.0%	43.3%	10.6%	2.1%
「まとめる力」がついた。	34.8%	53.9%	8.5%	2.8%
「説明する力」がついた。	24.1%	60.3%	13.5%	2.1%
「多面的に考える力」がついた。	38.3%	45.4%	12.8%	3.5%

②感想

・数学のレポートは授業とはまた少し違って普段の生活に数学を見出すものが多く，難しくもありましたが，より数学を身近に感じることができました。又，クラス内でのレポート評価や良いレポート紹介で他の人が書いたレポートを見ることができたので，そこから学ぶことができました。特に図示したりグラフを作るとわかりやすいということを身につけたと思います。

・（前略）数学的な目でもの（図形）を見るというおもしろさを学んだのは，数学のレポートのおかげだと思った。

・（前略）数学という教科の枠にとらわれず，数学的なことを考えることができた。（後略）

9．成果と課題

本校数学科では，2年間にわたり，言語活動を行った際の評価をどうするか，研究をすすめてきた。その中でも，「評価の指針」の表をつくったことが，次のような成果につながったのではないかと考えている。

①教師同士が基準について話をするようになった。（支援の方向について話し合うようになった。）

②生徒を評価（支援）しやすくなった。

③生徒の発言をその場で吟味できるようになった。（生徒の考え方を吟味する方向性がはっきりした。）

④生徒の話し合いが活発になった。その結果，特に話し合いの授業を設定しなくても，生徒が自然と話し合うようになった。

すなわち，生徒が思考し発言したことを，その場で数学的に議論する方向性がはっきりし，生徒も「数学的な根拠を明らかにして自分の考えを述べることである」ことの大切さやおもしろさを感じていたのではないかと思う。

最後に，２４年度は言語活動を通して数学的な思考力をつけることを目指し，指導と評価を行ってきた。数学的な手法を用いて問題を解決する力は以前に比べついたと思うが，その具体的，数値的な検証・分析等ができていない。その検証方法を学び，思考力の伸びについて検証し，さらなる授業改善につなげていくことが今後の課題である。