数学科研究主題　「筋道を立てて説明する力の育成」

松原　敏治
数学科　浜口　国彦
戸水　吉信
三浦　幸生

1　「言語に関する能力」および「説明」について

（1）現状の問題点

数学科の目標は，新学習指導要領にもあるように，数学的活動を通して，数量や図形などに関する基礎的な概念や原理・法則についての理解を深め，数学的な表現や処理の仕方を習得し，事象を数理的に考察し表現する能力を高めるとともに，数学的活動の楽しさや数学のよさを実感し，それらを活用して考えたり判断したりしようとする態度を育てることである。

ここでは，言語活動に関することは，「事象を数理的に考察し表現する能力を高める」ことや，第１学年の数学的活動の「数学的な表現を用いて，自分なりに説明し伝え合う活動」，および第２，３学年の「数学的な表現を用いて，根拠を明らかにし筋道を立てて説明し伝え合う活動」として取り上げられている。

しかし，例えば第１学年の「数学的な表現を用いて，自分なりに説明し伝え合う活動」といっても，

（－２）×（－３）＝＋６　であることを説明しなさい

という問題に対し，

－が２つで＋，絶対値の積で６

という説明は，数学的な説明といえるだろうか。

確かにこれは数学的な表現を用いて自分なりに説明していることになる。本校の生徒も，このような説明を行う生徒が多い。しかしこれは「法則」の説明であって，「理由」の説明ではない。生徒にも，「法則」の説明と「理由」の説明を意識して，上記のような問題の場合には，きちんと「理由」を説明しなさい，という指導を行っているが，なかなか定着しない。もちろん法則を説明する力も必要ではあるが，真につけさせたい力は，

１分間に２リットルずつ水の量が減っている場合，３分前は６リットル多かった

２円の借金を３回返したら６円の得と同じ

などの「理由」を説明できる力である。

また，最終的にはその考えを一般化し，

負の数で表される量が２つ掛け合わさるとプラスになる

ことを説明できる力をつけさせたい。

このように，特別な事例にあてはめて演繹的に説明を考え，それがまた一般的に成り立つことを帰納的に考えていくようなことが本校生徒は苦手であると考え，「演繹的な説明」や「帰納的な説明」を含む力として「筋道を立てて説明する力の育成」を研究テーマとすることにした。

（２）テーマ設定にあたって

①新指導要領との関係

新指導要領における数学科の目標にも「事象を数理的に考察し表現する能力を高める」ことがあげられており，それは数学的な表現を用いながら，根拠を明らかにし筋道を立てて説明し伝え合う活動を通して育成していくものと位置づけられている。

「伝え合う活動」とは，言うまでもなく，問題解決の過程の説明やなぜそう考えたのかなどについて，数学のことばを正しく理解して，適切な表現でそれを使って説明することである。他者に何かを伝えるときには「よく分かりやすく丁寧に説明すること」が大切であるが，前述の通り，例えば計算法則をそのまま説明するだけでは不十分である。「事象を数理的に考察し表現する能力」を伸ばしていくには，数学的に根拠を明らかにし，「なぜそうなるのか」を，筋道を立てて説明することが必要である。

②「伝え合う活動」の必要性

例えばある事象が一般的に成り立つことを説明するとき，生徒の内面では，これまでの数学的な表現で示された概念や原理，法則，方法，そして推論を用いて考えていることになる。すなわち，数学的な根拠を明らかにしながら思考していることになる。そしてたとえ１人で考えていたとしても，他の誰かに説明することを想定して，説明を考えたりノートにかいたりしているはずである。すなわち，生徒は，自己の中で明らかにされた数学的な根拠を，筋道を立てて他者に分かりやすく説明する活動を行っていることになる。

もちろん１人で考えていてもある程度の力はつくかもしれないが，さらにいろいろな人の考えを聞いたり，自分の考えを発表したり，それに対する意見を聞いたりする中で，考えていたことが吟味されたり修正されたり深化されたりすることは言うまでもないだろう。まさにこれら一連の活動で，筋道を立てて説明する力が育成されていくと考えられるのではないだろうか。そこで本校数学科では，伝え合う活動の段階を以下のように分類し，その必要性と効果を検証していくことにした。

ア　他者を想定し自己内部で説明する

これは，自己追求をしたり，ノートやレポートへ自分の考えをまとめることを含むものとする。他者を想定した分かりやすい説明を考えるといった，他者に伝える活動の第１歩である。

イ　班員やクラス全体に自分の考えを発表する

アで考えたことを実際に言葉などで発表することができる力である。実際に言葉で他人に発表すると，またそれが自分の考えを整理したり，自分の考えを見直すことにつながるものである。伝える活動が実際に行われ始める段階である。

ウ　他者の考えを聞いて自分の考えに取り入れる

他者の考えを聞いて，自分の考えと照らし合わせる力が必要になる。伝えるだけでなく，「合う」力の第1歩である。教師の考えを聞いて自分の考えに取り入れることも含むものとする。

エ　他者の考えに対し自分の意見を言う

イで考えたことを実際に発表することができる力である。伝え合う活動が盛んに行われ始める段階である。

オ　他者の評価を聞いて自己の説明を考え直す

発表に対する意見や評価を聞いてさらに自分の考えに修正を加えることができる力である。伝え合う活動が深化していく段階である。

カ　数学的な考え方を共有する

ウ，エ，オの活動を繰り返す中で，数学的な考え方を共有していく力である。クラス全体での議論が意味をなしていく段階である。クラスがこの段階に達していくことが，伝え合う活動の目標であり，クラスとして，個人として筋道をたてて説明する力がついていくことにつながっていくと考えられる。

伝え合う活動の段階	伝え合う活動の種類	活動の対象
ア　他者を想定し自己内部で説明する	他者に**伝える**活動の始まり	自　己 ↓ 他　者
イ　班員やクラス全体に自分の考えを発表する		
ウ　他者の考えを聞いて自分の考えに取り入れる	**伝え合う**活動の始まり	自　己 ↓ 他　者
エ　他者の考えに対し自分の意見を言う		
オ　他者の評価を聞いて自己の説明を考え直す	伝え合う活動の**深化**	自　己 ↓ 他者(クラス)
カ　数学的な考え方を共有する		

ア～カに関しては，活動の内容によって順序が入れ替わることもあることが考えられる。

(3)「説明」に関する定義

①「筋道を立てて説明する」ことについて

「筋道を立てて説明する」とは，前述されたものを含むが，発達段階に応じて，「直感的，感覚的に説明する」「演繹的な考え方で説明する」だけではなく，「帰納的な考え方を用いて説明する」「類推的な考え方を用いて説明する」といったことが考えられる。また，帰納的や類推的に考えたことや発見したことを演繹的に正しいかどうかを確かめ説明していくことは，数学的な思考力を高めることにもなる。

②説明に用いる「言語」について

数学では，数，式，図，表，グラフなどの数学的な表現を用いて考え，数，式，図，表，グラフなどを利用して説明すると分かりやすく説得力が生まれる。数学科においては，言葉だけでなく，このような数学的表現を，説明するための「言語」として用いることにする。

③課題の設定と授業形態

前述の伝え合う活動を行うために，そのような学習課題，および学習形態を考える必要がある。生徒が論理的に考えたことを他者に説明したり伝えたいと思う意欲が湧くような学習課題の設定が大切である。

また，学習形態としては，

「学習課題の設定→個人追究→発表→意見交換→学習結果のまとめ」

「学習課題の設定→個人追究→班活動→班の発表→学習結果のまとめ」

等が考えられる。どちらにせよ，何を話し合わせ，何を説明するのか，その内容と教師の声かけが重要となる。例えば，

バスケットボールのチームで，次のＡチームの平均身長とＢチームの平均身長はどちらが高いか。	
Ａチーム	161 cm，157 cm，167 cm，155 cm，165 cm
Ｂチーム	172 cm，150 cm，166 cm，160 cm，157 cm

という課題のように，答えは明確に出るが，その方法が何通りも考えられる，といった課題設定が大切である。班活動を取り入れてもよいが，何を話し合わせるか，教師がきちんと示す必要がある。「計算のしやすさ」を話し合いましょう，という曖昧な方針ではなく，「何を基準としたか」ということを話し合わせる方が，話し合いがより数学的に意味を持つことになるし，それが数学的な説明であることを生徒と共有していきたい。Ａチームを基準として，Ｂチームを基準として，それぞれ１人目から差を求める，１６０cmを基準として，それぞれのチームの最も身長の低い選手を基準として，普通に平均を求める，等々。最後に計算のしやすさを聞いてみるのもよいが，授業でおさえたいのは，正負の数の考え方をいかに取り入れたか，ということであろう。

（４）授業計画にあたって

筋道を立てて説明する授業の構築は，やりやすい単元とそうでない単元がある。できるだけ系統的にそういった活動を取り入れていきたいが，前述の通り，課題の設定に工夫が必要である。比較的図形領域では取り組みやすいと考えられるが，他の領域でも既習の事項を使って説明する活動を取り入れていきたい。

また，説明の仕方（順序）にも様々なパターンがある。説明を加えながら最後に結論を言う順序もあれば，最初に結論を述べてから徐々に説明を加えていく順序もある。また，伝え合う活動のどの部分までを意識して活動させるかも視野に入れなければならない。すでに先行研究として，数学科におけるレポート課題の可能性を模索してきたが，これは伝え合う活動のアの部分にとどまっている。今後は３学年を通した授業計画を考えていきたい。

2　説明を意図した授業の実践

(1) 数式分野における具体的活動例

①「筋道を立てて説明する」活動内容　（1年　比例式の応用）

事象から性質を推測し，その性質が成り立つ理由を数式をたてて根拠を明らかにしながら帰納的に説明する活動。

②「伝え合う活動」の場面

ア　気づいたことや自己追求の内容をことばで述べる

イ　自分の考えを発表する

ウ　他の人の発表に対して質問したり意見を言ったりする

エ　他の人の発表から分かることや関連した別の方法をさらに追求する

③説明の表現方法

数，式，図，ことば

④実際の授業展開と生徒の活動内容

課題　A君とB君はそれぞれ、ケーキを作るために小麦粉と砂糖を混ぜている。 A君は小麦粉と砂糖を重さの比が7：5になるように混ぜた。(Aセット) B君は小麦粉と砂糖を重さの比が2：1になるように混ぜた。(Bセット) AセットとBセットでは、どちらが砂糖の重さの割合が高いか。

ア　気づいたことや自己追求の内容をことばで述べる

・2つの比で共通の数がない

・どれかの項をそろえられないか

・構成比を考えるとよいのでないか

・図で考えるとよいのでないか

・重さをきめるとよいのでないか

イ　自分の考えを発表する

・A君の比とB君の比の左を14と考えてそろえると

A君　14：10　B君　14：7　になる。

10の方が7より大きいので　A君のケーキの砂糖の方が割合が高い。

・全体の重さをどちらも12にする。

A君　7：5　B君　8：4　になる。

5の方が4より大きいので　A君のケーキの砂糖の方が割合が高い。

ウ　他の人の発表に対して質問したり意見を言ったりする

発表の意味を問う質問が出た。また、発表しなかった生徒で同じ考えを持っていた生徒からも意見が出た。

１つ目の意見について

・小麦粉の重さをそろえた。小麦粉の重さは同じなのに，砂糖の重さはＡ君の方が多いから，
　Ａ君のケーキの砂糖の方が割合が高いといえる。

・小麦粉を１としたときの割合を考える。
　小麦粉に対する砂糖の割合は　Ａ君　5 / 7　　Ｂ君　1 / 2
　これでは比べることができないので通分する。
　　Ａ君　10 / 14　　Ｂ君　7 / 14
　小麦粉 14 に対して砂糖 10 の Ａ君と，砂糖 7 の Ｂ君では，割合が高いのはＡ君

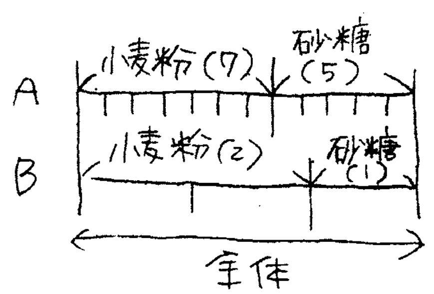
・Ａ君は砂糖の重さが小麦粉の半分より多い。Ｂ君は砂糖の重さが小麦粉の半分。
　だから，Ａ君の方が砂糖の重さの割合が高い。

２つ目の意見について

・全体を１としたときの砂糖の重さを考えている。

・Ａ君は全体と比べた砂糖の重さは 5 / 12
　Ｂ君は全体と比べた砂糖の重さは 1 / 3　通分すると 4 /12
　　5 / 12 と 4 / 12 では 5 / 12 の方が大きいので Ａ君のケーキの砂糖の方が割合が高い。

エ　他の人の発表から分かることや関連した別の方法をさらに追求する



全体を120とする
120÷12=10　10×5=50
120÷3=40　40×1=40
よってAです

⑤考察

構成比は中学校で初めて学習することから，小麦粉の重さをそろえて考える生徒が多かった。

生徒の説明の中で「そろえる」ということばが自然発生的に共有され，キーワードとなった。

「そろえる」ということばは日常使われていることばなので，他の生徒にも無理なく受け入れられたと思われる。生徒が使っていることばから出てきたキーワードによって，他の生徒の思考も促進されたと考えられる。

ただ，１年生なので，説明の仕方がまだ断片的で，教師が説明を加える必要がある場面が多くあった。

しかし，教師があまり先回りして手助けをするのではなく，辛抱強く待って，生徒が自分の考えをことばにしようとする努力を大事にしなければならないと思われる。

（2）図形分野における具体的活動例

①「筋道を立てて説明する」活動内容

図形の性質を論理的に調べて，根拠を明らかにして筋道を立てて他者に伝わるように分かりやすく説明する，直感的，類推的な考え方を用いて帰納的に説明する活動。具体的には，大小２つの正方形を並べた図から図形の性質を見いだし，三角形の合同を使ってそれを証明し，その証明から新たに分かることを考え説明する。

②「伝え合う活動」の場面

ア　自己追求の内容をワークシートにかく

イ　自分の考えを電子黒板で発表する

エ　他の人の発表に対し意見をいう

ウ　電子黒板に映し出された他の生徒のワークシートから分かることをさらに追求する

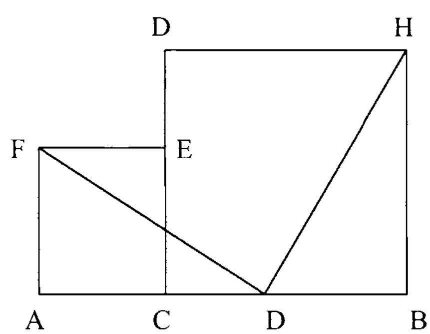
③説明の表現方法

数，式，図，証明に関する表現（ことば）

④実際の授業展開と生徒の活動内容

＜課題１＞

適当な長さの線分ＡＢをかき，２点Ａ，Ｂから等しい距離にある２点Ｃ，Ｄをとり，ＡＣ，ＢＣを１辺とする正方形ＡＣＥＦ，ＢＣＧＨをつくる。ＦとＤ，ＨとＤを結ぶとき，何か分かることはないか。



ア　自己追求の内容をワークシートにかく

・ＦＤ＝ＤＨではないか

・ＦＤ＝ＤＨである証明を考える

・証明の中で特にＡＤ＝ＢＨであることが説明しにくい

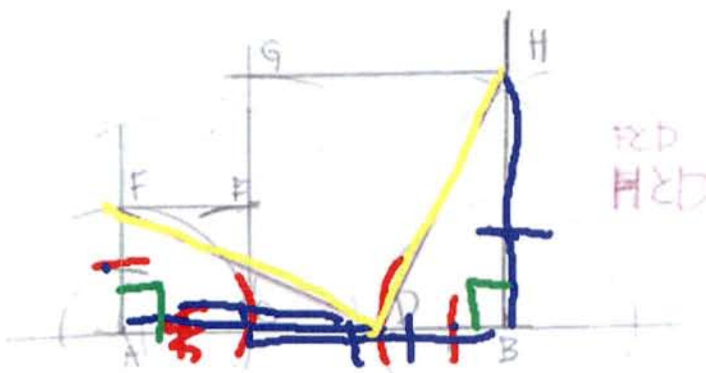
・どのような表現をすればＡＤ＝ＢＨであることが分かりやすく説明できるかを考える

生徒が個人追求をしている様子と，生徒のワークシートをスキャナーで取り込み↑電子黒板に投影する準備をする授業者の様子

イ　自分の考えを電子黒板で発表する

←電子黒板に図を書き込み説明する生徒
↓書き込み後の電子黒板の画面

電子黒板は，生徒のノートを大画面にそのまま投影できるだけでなく，その場で書き込みをしながら説明することができる利点がある。
本授業はそれを利用した。



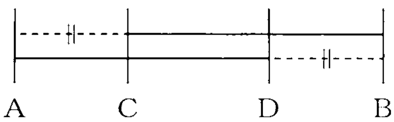
☆この図から分かるいろいろな性質を見つけよう

AC＝BDの線分をひいた。
□ACEFは正方形だから、
AC＝FAよって、
BD＝FA ―①
BHとADは、
AC＝BD
AC＋CD＝BD＋CD.（CB＝HB 正方形より）
よってAD＝HB ②
正方形の内角は90°よって、
∠HBD＝∠FAD＝90°―③
①～③より二辺とその間の角が等しいよって、
△FAD≡△DBHといえる。合同な三角
だから FD＝HD

エ　他の人の発表に対し意見をいう

説明の中でどの表現が分かりやすい説明につながっているか意見交換した。

・ＡＤ＝ＢＨの説明が図を使っていて分かりやすい。

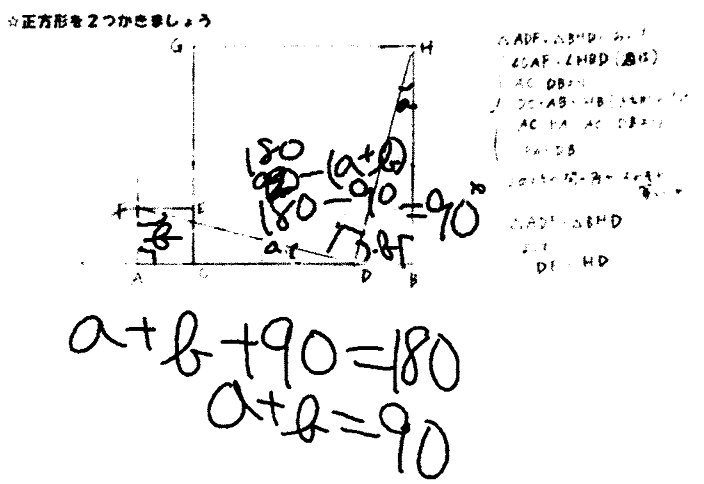


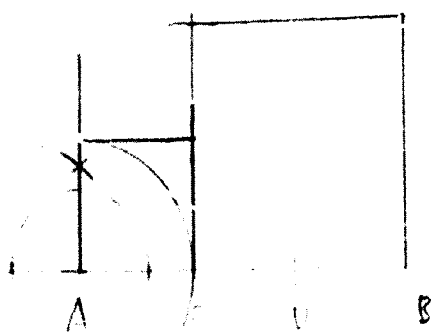
・この図だと，①ＡＣ＝ＤＢで②ＣＤが共通で③等しい部分と共通部分の和だからＡＤ＝ＢＣになり，④ＣＢ＝ＢＨだから⑤ＡＤ＝ＢＨ　であることが順を追って説明しやすい

・色分けをして式と図をつなげているのも良い

ウ　電子黒板に映し出された他の生徒のワークシートから分かることをさらに追求する

さらに本日の学習から分かることがないか考えた。例えば△ＦＤＨが直角二等辺三角形になることなど。本日の学習の成果を生かして，分かりやすい説明を考えた。また，電子黒板の特性を活かし，複数の生徒のワークシート上の作図を投影し，直角二等辺三角形の普遍性を確認した。





←↑別の生徒の作図。このほかにも色々と生徒の作図を投影した。

ＦＤ＝ＤＨであることは，先の合同の証明からすぐに分かるが，上記の生徒は a や b の文字を使って∠ＦＤＨ＝９０°であることを説明している。この説明のわかりやすさも確認することができた。

⑤考察

証明の授業はまさに「筋道を立てて説明する」活動である。しかし証明に苦手意識を持つ生徒も少なくない。近年，第２学年の授業時数の減少により，やや複雑な証明になると全くお手上げになる生徒が増えてきたように感じる。本授業で扱った題材も，線分の長さや角の大きさが等しいことを，他の線分や角との計算を行った上で説明しなければならない複雑さを抱えている。しかし，それをいかに分かりやすく説明するか，クラス全体で確認できたように思う。図や文字を使いながら分かりやすく説明する力をつけることによって，複雑な証明の問題も，筋道を立てて説明できる見通しを持つことができるのではないだろうか。

（3）関数分野における具体的な活動例

①「筋道を立てて説明する」活動内容

1次関数の導入として　1辺1ｃｍの正方形を階段状に規則正しく1段，2段，3段…と並べるとき，段数が増加するときともなって変化する量を見出す。その中から比例する量と比例しない量にわけてその理由を，図，式，表，グラフを利用して帰納的に説明する。この活動を通して関数関係や1次関数の意味について理解する。

②「伝え合う活動」の場面

本時授業を「学習課題の設定→個人追究→班活動での発表→班ごとの発表→学習結果のまとめ」のような流れで構成し伝え合う活動の場面を次のようにした。

ア　課題について自己追究し考えたことをノートまとめる。

イ　班で各自の考えを順に発表する。

ウ　班の発表内容をまとめ代表者がクラスで全体にホワイトボードを用いて発表する。

エ　各班の発表について意見や質問を出し合う。

③説明の表現方法

言葉，図，表，グラフ，式を用いた表現

④実際の授業展開と生徒の活動内容

次のような3時間の授業計画を立てた。

1時間目　段数の増加にともなって変化する量を見つけ，その中で比例になる量を見つける。

2時間目　段数と比例しない量についてその理由を考える。(本時)

3時間目　1次関数の意味（段数と辺の数や頂点の数から）理解する。

課題の提示

課題1

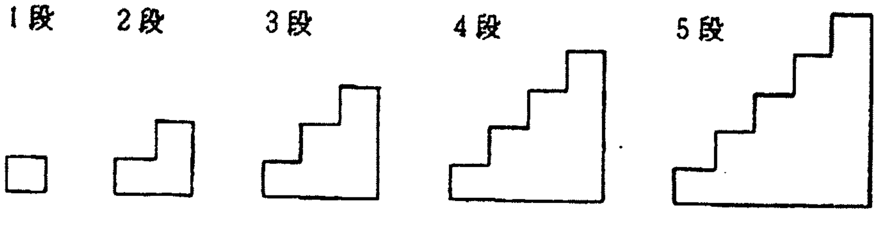
次のように1辺1ｃｍの正方形を階段状に規則正しく1段，2段，3段…と並べるとき，段数が増加するときともなって変化する量を見つけてください。

課題2

段数と比例する数量はどれですか。また，比例する理由を考えて説明してください。

課題3

段数と比例しない数量はどれですか。また，比例しない理由を考えて説明してください。



エ　1時間目（課題1と課題2）の学習の様子

まず，この課題で段数の増加にともなって変化する量を見つける活動を行った。周囲の長さ，高さ，幅，頂点の数，辺の数，面積，正方形の枚数，直角の数，内角の和などの中で段数と比例する

量がどれかを表，式，グラフ等を用いて生徒は考えた。その中で周囲の長さ，高さ，幅，内角の和が比例することが見出された。

段数と高さではｘ段のとき，高さをｙｃｍとすると表は次のようになり式はｙ＝ｘが成り立つので比例と言える。高さを段数は同じことから式の意味も簡単に把握できた。

x	1	2	3	4	5
y	1	2	3	4	5

また，段数と高さではｘ段のとき周囲の長さをｙｃｍとすと表は次のようになり式はｙ＝４ｘとなる。

x	1	2	3	4	5
y	4	8	12	16	20

この場合はｙ＝４ｘの比例定数は多くの生徒は表からｘの４倍がｙになっている読み取って式にしていた。比例定数の４の図形的な意味まで把握している生徒は少なっかたが，図形的な意味に気づいている生徒もいた。

内角の和では表は下記の通りで式はｙ＝360 ｘになる。

x	1	2	3	4	5
y	360	720	1080	1440	1800

これは多角形の定義や内角の意味を十分に学習していない段階なので生徒の自然な見方を尊重して学習を進めた。これも式は表から読み取って立式していた。

個人追究でこれらの比例する量を見つけた後に班活動を通して，他の生徒に発表説明する場面をつくった。その後班の代表者が全体発表を行った。

比例になる説明としては

表を作り「ｘが２倍，３倍…になるとｙも２倍，３倍…になるので比例している。」「ｙ÷ｘの値が一定なので比例している。」「ｘのａ倍がｙになるので比例している。」「ｙ＝ax の式が成り立つので比例している。」「ｘが１ずつ増えるとｙはａずつ増えるので比例している。」「グラフをかくと原点を通る直線になるから比例している。」などの意見が出された。

しかし，「ｘが１ずつ増えるとｙはａずつ増えるので比例している。」だけでは比例とは断言できない。一般的な１次関数になっていることもある。ただ，この導入段階ではまだ，比例と１次関数の関係を学習していないので他の生徒から異論はでなかった。今後の１次関数の学習で理解されていけばよい。また，「グラフをかくと原点を通る直線になるから比例している。」は関数の連続性から実際は直線はかけない。点を結ぶと直線になるという見方をしていた。しかし，各数量が段数と比例関係にあることを１年で学習した「表，式，グラフ」を用いて筋道を立てて説明できていたように思う。

オ　２時間目の課題３の学習の様子

比例しないと考えた頂点の数，辺の数，面積，正方形の枚数，直角の数について考察する授業を設定した。これも１時間目と同様に個人追究で自分で選んだ数量について比例しない理由を考え，それを班活動で各自が発表し合い，その後班の代表者が全体発表を行った。

段数と頂点の数，辺の数はｘ段のときｙ個（ｙ本）とすると両方とも表は次のようになり式はｙ＝２ｘ＋２となる。係数の図形的な意味をとらえる生徒もいた。

x	1	2	3	4	5
y	4	6	8	10	12

表から「ｘが２倍３倍…でもｙは２倍３倍…にならない。」「式はｙ＝２ｘ＋２で比例の式でない。」「グラフをかくと直線だが，原点は通らない。」など表・式・グラフを用いて前時との対比で説明していた。

段数と面積，正方形の枚数ではｘ段のときｙｃm^2（ｙ個）とすると両方ともに表は次のようになり式はｙ＝0.5ｘ（ｘ＋１）となる。

x	1	2	3	4	5
y	1	3	6	10	15

表から「ｘが２倍３倍…でもｙは２倍３倍…にならない。」「グラフをかくと直線にならない。」式については，ほとんどの生徒は立式出来ていなかったが発表の中で「ｙ＝0.5ｘ（ｘ＋１）となりで比例の式でない。２次式になる」との説明も出された。

⑥まとめ

比較的分かりやすい具体的な題材だったので生徒は１年生の比例の学習を思い出しながら学習を進めていた。比例する量と比例しない量の理由を考える場面でも各生徒は，表・式・グラスなどの中で自分で説明しやすいものを選んで考えていたようである。班での説明も自分の用いた表・式・グラフでの比例の特徴を用いて具体的に説明した。当てはまっていないとこれまでの学習事項を用いて説明できていた。この説明を通して比例しない関数が存在していること気づき，１次関数や２次関数へのつながりを予感できたと思う。

比例しない例ではｙ＝２ｘ＋２ではｙ＝２ｘという比例する部分と２という定数部分の和で式が成り立っていることそれが図形的な意味に対応していることも学習できた。

また，グラフをかくと多くの生徒はｘ＝０から直線としてかく。しかし，発表を通じた説明や質疑でｘ＝０ときｙ＝２だが，この事例では図形的には存在しないことから変域は１≦ｘであることや自然数のみの変域であることが確認できた。図，表，グラフを用いた説明を通じて学習内容を深め関数に対する理解を高めることが出来たように思う。

（4）資料の活用分野における具体的活動例

①「筋道を立てて説明する」活動内容

目的に応じて資料を収集し，表やグラフに整理し，資料の傾向を読み取ってその結果を表やグラフを用いて筋道を立てて説明する，帰納的な考え方を用いて説明する活動。具体的には，ジャガイモ５個入りの袋の内容量のちらばりを度数分布表やヒストグラムに表し，内容量の表示の仕方を考え，その理由とともに説明する。

②「伝え合う活動」の場面

ア　自己追求の内容をノートにかく

イ　自分の考えを発表する

ウ　他者の考えを聞いて，代表値について考える

オ　それぞれの意見の根拠について確認をする

③説明の表現方法

数，式，表，グラフ，（代表値に関係する）ことば

④実際の授業展開と生徒の活動内容

あるスーパーでは，ジャガイモを，５個入りの袋で販売している。このジャガイモの内容量を重さで表示することになったため，その中から５０袋を選んで重さを計ったところ，次のようになった。

710	760	755	741	767	723	741	756	743	752
763	736	758	719	686	754	720	747	769	717
779	752	757	720	752	708	739	780	698	763
747	729	713	736	726	737	758	740	722	721
767	733	732	745	734	785	760	719	721	765

ジャガイモの内容量を全部計って個別に表示するのには手間がかかること，５個入りのジャガイモはすべて同じ値段にしたいことなどから，これらの袋の内容量を１つの値で表示することにした。あなたなら，何ｇ入りと表示しますか。その理由を含め答えなさい。

ア　自己追求の内容をノートにかく

・値がバラバラだから分かりにくい

・平均を求めたいけど面倒くさい

・度数分布表やヒストグラムにまとめてみると分かりやすくなるかな（次ページ）

・平均よりもいい値はないか

・一番個数が多い階級の階級値と平均は同じかな

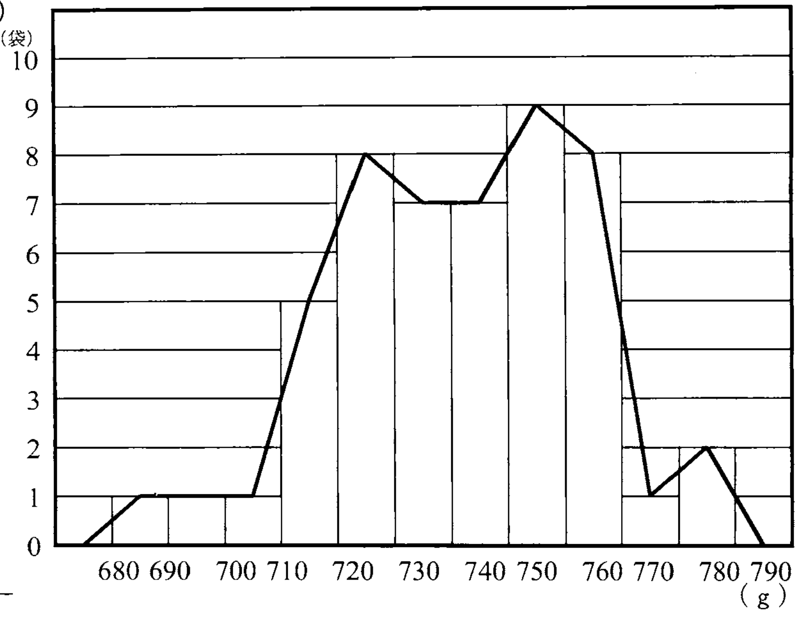
・いろんな値が考えられるが，それぞれのいいところはどこか

・店長になったつもりで，その値にした理由も含めて考える

・店長の立場，消費者の立場，いろいろ考えられるなあ

・複数の値を考えてみよう

階　級（g）	度数（袋）
以上　未満 680　～　690	1
690　～　700	1
700　～　710	1
710　～　720	5
720　～　730	8
730　～　740	7
740　～　750	7
750　～　760	9
760　～　770	8
770　～　780	1
780　～　790	2
計	５０



イ　自分の考えを発表する

・生徒Ａ：８００ｇ

理由：一番大きい値が７８５，それを切り上げて８００した。たくさん入っているように見えるので，お得感があってたくさん売れるのではないか。

・生徒Ｂ：６８０ｇ

表示より少なかったという消費者からのクレームを避けるため，最小の値を考えた。最小値６８６の一の位を切り捨ててきりのよい数字にした。

・生徒Ｃ：７４１ｇ

平均を求めると７４１．１なったので。

・生徒Ｄ：７３５ｇ

最大値７８５と最小値６８６のちょうど間くらいだから（範囲の真ん中）。

・生徒Ｅ：７４０ｇ

分布を見て，５０個の真ん中の値がちょうど７４０くらいである（メジアン）。

・生徒Ｆ：７５５ｇ

お客さんが買っていく可能性の一番高いのが７５０～７６０の範囲のジャガイモである。その範囲の真ん中の値（モード）。

・生徒Ｇ：７００ｇ

消費者からのクレームは避けたいが，７００未満のジャガイモは２袋しかない。その２袋は目をつぶった。また，７００は，きりのよい数字だから。

ウ　他者の考えを聞いて，代表値について考える

それぞれの意見の根拠となっている「代表値」を確認した。生徒Ａは最大値，生徒Ｂは最小値，生徒Ｃは平均値，生徒Ｄは範囲，生徒Ｅは中央値，生徒Ｆは最頻値，生徒Ｇは最小値の切り上げである。実際は，範囲，中央値（メジアン）や最頻値（モード）の用語を確認せずにこの授業を行ったが，かえってこういった意見交換の中で，下記のように自然に数学的表現の必要性が確認できた。

Ｓ１：Ａさんは最大値，Ｂさんは最小値，Ｃさんは平均を使っているが，Ｄさんはそれをどう説明したらいいのかしら。

Ｓ２：最小値と最大値の真ん中をとっているから，「中央値」とかどうでしょうか。

Ｔ：中央値はもう少し違った意味があります。

Ｓ３：Ｅさんのやつが中央値ですね。

Ｔ：その通りです。５０個の値を大きさの順に並べたときの真ん中の値です。実際には小さい方から２５番目と２６番目がともに７４１なので，実際の中央値は７４１です。中央の２個の値が違ったらその平均をとります。資料が奇数個の場合は真ん中の値は１つだけになりますが。

Ｓ２：じゃあ，Ｄさんのはどうなるのかな。

Ｔ：この場合は最大値と最小値の間，という意味で・・・(手振りをつける)

Ｓ４：分かった，「範囲」だ！

Ｔ：その通りです。７３５は範囲の真ん中の値です。正確には７３５．５ですがね。

Ｓ５：Ｆさんのは何て言ったらいいのかな？

Ｓ６：最多値とか。

Ｔ：惜しいですね。実際には最頻値といいます。

Ｓ７：いろいろな言葉があっておもしろい！

Ｔ：これらのもの（範囲を除いたもの）を，代表値といいます。

Ｓ８：ジャガイモの内容量をいろいろな値で代表することができるというわけですね。

オ　それぞれの意見の根拠について確認をする

それぞれの代表値の良いところや数学的な根拠以外の根拠を確認した。

Ａさん：割安感を出してたくさん売りたいという店側の立場で考えた。

Ｂさん：消費者側の立場で考え，クレームを回避した。　　　　　　など

中でもＧさんの考え方には他の生徒は感心していた。実際，野菜の重さの表示は３％の「誤差」まで認められているので，６８６の袋も誤差の範囲内である（７００の３％は２１）ことを伝えると，生徒はさらに驚いていた。このコメントが，「誤差」の学習にもつながっていく。

⑥考察

この授業は，「最大値」などの数学的用語を根拠に用いるだけでなく，さらに「割安感」などの根拠を求めている。いかに分かりやすく自分の考えを説明できるか，また，説明の中での数学的表現と，そこからさらに発展させた日常的表現とをきちんと使い分けできることが必要であると考え，授業ではそれぞれの確認を別にして行った。代表値を使うことは，数学的表現をそのまま根拠としたことになるが，代表値を利用してさらに日常的な経験を根拠として使うこともできる。それが数学を利用していく態度につながれば，と思う。

また，生徒が中央値や最頻値の言葉を必要に迫られて学習する，といった理想的な流れで授業を行うことができたと考える。根拠に数学的用語を用いていく姿勢の定着に役立つのではないだろうか。

＜生徒のノートより＞

700g
・もし、750gに設定して720gしか入っていないと悲しいから
・700gに設定すると750g入っていたらお得だと思えるし、700gより下の680gや690gの袋をとる確率は少ないから

680g ⟶ 代表値
理由…計った50袋の中で一番軽いものを表示することで、「表示より軽い」という内容のクレームを防ぐ

だいたい平均が740であるから、
740g

760g…このグラフを見る限り、760g前後のジャガイモを買う確率が一番高いと考えられる。よって760gと表示する。

735g
範囲のまん中だから。

800g
同じ値段なら、重く表示したほうがお得だから

＜発展課題…期末テストに出した問題＞

次は，ある料亭で，１人分の「マグロづくし」料理に使うマグロの仕入れ値を，２ヶ月（60 日）にわたって記録したものである。

4305	4594	4433	4401	4058	3253	4531	4170	3789	4048	4251	3818	3986	3021	4588
4142	3437	3522	4580	3807	3640	5274	4446	4332	3974	3915	4653	3688	4272	3307
4482	3541	3483	4061	4132	4004	4401	3939	4517	4615	3615	4039	4192	4043	3834
4033	3555	4237	4261	3594	4014	4190	4639	3796	4224	3782	4558	3898	4105	3809

（1）度数分布表とヒストグラムを作りなさい　（2）モードとメジアンを求めなさい。

（3）料理は仕入れ値の倍の値段で出すのがこの料亭の基本です。毎日の料理の値段を同じにするとしたら，あなたはこの「マグロづくし」１人分の値段をいくらにしますか。理由も含めて答えなさい。他の食材の分は考えなくてよい。

面白い解答例：

①９０００円　理由：モードは４１００円であるが，２番目に値の多い階級値は４５００円である。４１００円あたりで値段を決めると，仕入れ値が４５００円あたりのときに利益が減少する。料亭は高いのは承知で来ると思うので，４５００円の倍で９０００円にした。

②６０４２円　理由：最小値である３０２１円を２倍にした。その方が客は嬉しく店の評判はよくなり，最大値である５２７４円のときも店にもうけはある。

9000 円　理由 マグロの仕入れ値が4000円〜4200円のところが最も多いけど、2番目に多いのは4400円〜4600円 4000円〜4200円のところの2倍で値段を決めてしまうと、2番目に多くなるところのときに利益が減ってしまう。なので、4600円に揃えて値段が9200円。高すぎる気がするが、料亭に来るときは

6042 円　理由 最小値である3021円を倍にしました。その方が客は嬉しく評判は良くなるし、最大値である5274円で仕入れても店にもうけはある。

3　成果や今後の課題

数学科においては，説明する活動，伝え合う活動の必要性をどう解釈し，どう検証していくかが難しい。ともすれば，計算ができて答えが出せればよい，他者へ説明できなくても証明がかければよい，といった認識に，生徒も教師も陥りがちである。しかし，学校教育法にもあるように，「生涯にわたり学習する基盤が培われるように，基礎的な知識及び技能を習得させるとともに，これらを活用して課題を解決するために必要な思考力，判断力，表現力その他の能力をはぐくみ，主体的に学習に取り組む態度を養うことに，特に意を用いなければならない。」ためには，当然，単に問題が解ければよいわけではなく，それをいかにその後に活かしていくかが重要になる。本校では，説明する活動を本格的に行いはじめて日が浅いが，他者の意見を聞いて，数学的な考え方のすばらしさを意見交換したり共有したりする中で，生徒が数学のおもしろさに気づき，さらに数学の学習を深めていきたいという雰囲気ができつつある。事実，生徒のアンケート結果によれば，数学に対する楽しさを感じている割合が，前の年度より１０％上昇している。
（７０％→８０％）。説明する活動の，１つの成果であるといえよう。

今後の課題としては，前述の雰囲気を大切にし，さらに説明する活動の深化を図りたい。生徒が数学に興味を持つ瞬間で，アンケート結果で最も多かったのは，他の生徒のすばらしい，自分にはなかったような数学的説明を聞いた瞬間である。そのためには，数学的な活動をし，班で話し合い，全体で発表しました，という活動に付け加え，その後，発表された考え方をさらに深化していく活動が重要になってくる。考え方を深め合う授業形態を工夫し，継続的に実践していきたい。