思考水準に応じた自己表現力・他者理解力の育成

松　原　敏　治
数学科　浜　口　国　彦
戸　水　吉　信

1．はじめに

(1) 昨年度の研究実践

昨年度は「発達段階に応じた数学における自己表現力の育成」をテーマに研究実践を進めた。数学的なコミュニケーション力を育てるには，まず，自分の考えを数学的に表現する力つまり数学における自己表現力の育成が必要不可欠であると考えた。しかしながら，生徒一人一人にはそれぞれの学習の到達度や発達段階があり，それらに応じて目標を設定したり指導したりする必要があった。金沢大学の大谷教授に指導を受け，生徒の発達段階を数学的な思考水準という視点に絞って考察し，それに応じた指導のあり方について研究を進めてきた。次に掲げたのは本校数学科で考えてみた各領域における思考水準である。これらの思考水準をもとに生徒の発達段階を考え，それに応じて表現力を伸ばす指導を考察してきた。

(2) 思考水準について

① ファン・ヒーレの幾何学における思考水準論より
(本校「図形」領域における思考水準も同じものを使用)

第0水準　図形は「全体として」認識され，その形によってだけ認識されるという特徴をもつ。

第1水準　この水準では，知覚される形の分析が行われ，その結果，それらの性質が明らかにされる。子どもは，図形の形に潜在する性質を認識し始める。

第2水準　この水準では，図形の諸性質間の論理的な関係や，図形間の論理的な関係づけがなされる。たくさんある性質の中で二三の特徴的性質が当該の図形を定義するものとして採用され，あとの性質は論理的な方法で確立される。図形は，定義に基づいて確立される一定の論理的な関連において現れる。

第3水準　この水準では，演繹法の意味が「大域的に」会得される。すなわち，理論全体を構成し，発展させる方法としての演繹法の意味が理解される。ここでは,「演繹の意味や，定理の逆，公理，必要・十分条件の認識に関連している。

第4水準　最も高いこの水準は，論理の本性についての認識である。ここでは，対象の具体的性質や対象間の関係の具体的な意味が捨象される。すなわち，理論をあらゆる具体的な解釈をぬきにして展開することができる。

② 本校数学科における「数と式」領域における思考水準

第0水準　具体的な物を使っての計算しかできない。(小学校低学年)

第1水準　具体的な物を使っての計算から,「数字」での機械的操作による計算ができる。
(小学校低学年～高学年)

第2水準　いろいろな法則を見つけ，それを具体的な事象に照らすなどして，一般的に成り立つことが説明できる。(中学校1学年～中学校2学年)

第3水準　いろいろな数の定義を理解し，定義から計算法則などの公式・定理を導き出し，新たな

公式・定理の証明ができる。また，必要に応じて数の場合分けをして，数学的な議論をすすめることができる。(中学校3年生～高校生)

第4水準 数や文字式の集合を環や体としてとらえることができ，定義・定理を集合そのものに適応することが出来る。(大学生)

③ 本校数学科における「関数」領域における思考水準

第0水準 変化と対応について感覚的に理解する（伴って変化する数量を漠然ととらえる）(小4まで)

第1水準 変化と対応について成り立つ諸性質（属性）を見出す（比例であれば「一方が○倍になるとそれに伴って他方も○倍になる」など)。一般的な関数でなく，比例や反比例といった特定に関数の性質を知る。

具体的には実験・実測・操作活動などの体験的な方法を通じて，数表やグラフにより関係をとらえたり，変化の様子を具体的な事象によって考察できる。(小5から中1まで)

第2水準 特定の関数について局所的に論理的な系統化がなされる。変化と対応について成り立つ諸性質（属性）の中で定義（特性）(中学校の場合は式）が優先され，それに基づき関数他の属性を演繹的に導く。また，関数という一般的な用語を使う（その概念自体を考察の対象としない）具体的には関数関係を理解し，式によって一般的に関数をとらたり，変化の様子を一般的に考察できる。(中1から中3)

第3水準 関数の概念が理解でき，一段高い視点から関数族を考察する。(中3から高3)

第4水準 抽象的な関数空間（Banach, Hilbert 空間など）を考察する。(高3から大学生)

(3) 本校数学科における自己表現力・他者理解力のとらえ方

数学的な表現力は各個人の思考を深める面（数学的な思考力）と他者に自分の考えを伝える手段（自己表現力）の両面がある。数学の学習では生徒の内部にある既習の知識をもとに新しい知識を身につけていく場面が多くある。その際，これまで学習してきた数学的な表現を用いて考えることになる。更に，これを発表したり他者に説明したりする場合にも数学的な表現を用いて行われる。全ての生徒がいつも自ら新しい知識を生み出す訳ではない。教師から与えられる助言，他の生徒が発表する意見，教科書などに記述された知識を自分なりに取り入れていく場合が多い。この場合，数学的な表現で示された教師や他の生徒や先人の考えを理解して自分の知識を高めていくことになる。これは数学的な表現を用いた他者理解力に他ならない。

中学校の段階では数学的な表現としては次のようなものが用いてられている。

数，数や文字の四則計算の表現，事象の数や文字による表現，関係や法則の文字式による表現，方程式，平面･空間図形の関係の表現，空間図形の表現（見取り図，展開図，投影図)，図形の証明や推論の表現，関数関係の表現（式・表・グラフ）などである。

2．異学年・異校種交流授業について

今年度の本校の研究副題は「異学年・異校種間交流授業を通した学び」である。異学年交流授業や異校種間交流授業の中では，上級生が下級生に分かりやすく説明したり発表する場面がある。下級生の理解度を把握しながら分かりやすく数学的な表現を用いてし説明しなければ下級生は理解することができない。学習内容を相手に分かりやすくかみ砕いて説明するには教科の学習内容の深い理解が必要になる。下級生

は上級生の進んだ表現方法や学習方法(学び方)や数学の進んだ知識を生徒の目線で学ぶことができる。しかしながら，一般的に数学では思考水準の違う生徒同士では，数学的な事柄に対するとらえ方が異なるので生徒同士のコミュニケーションは難しい面がある。昨年，実験的に行った中学１年生と中学３年生の交流授業でもそういう面が見られた。

さて，中学３年生は第３水準に移行する段階になっていると思われる。高校生の多くは第３水準に達している中で，高校１年生は第３水準に移行しつつあると思われる。そう考えると，中学３年生と高校１年生は第３水準を基準として思考水準が近い。そこで，中学３年生と高校１年生同士で話し合いを通じたコミュニケーションが可能ではないかと考えた。また，中高連携という面からも附属高校の協力を得て，中学３年生と高校１年生の異校種間交流授業を実践していくこととした。

少し水準的に上の高校１年生が中心（ミニ教師）になって学習を進めることで共に学習内容の理解を深める。中学３年生は普段気づかない考え方や学び方を学ぶことで思考水準の違いによる理解の差に気が付き，次の思考水準へ向かう足がかりとなることを期待する。中学３年生と高校１年生が共に学ぶことで自己表現力や他者理解力の向上が図られることを期待したい。

３．異校種間交流授業の指導内容と指導計画

(1)　指導内容

中学３年生と高校１年生との異校種間交流授業を考える際，既習事項が違うので課題学習のようなトピック的な内容や中学生の教科学習の発展的な内容を考えた。更に，高校１年生がまだ学習していない内容で中学生の既習事項で学ぶことができる単元も考えられる。不等式，相似比と面積比，積事象や和事象の確率，順列や組み合わせである。

(2)　本年度の異校種間交流授業の指導計画

① ６月12日（火）の校内研究授業
中学３年生と高校１年生（附属高校）との異校種間交流授業
担当　戸水（中学校）

② ６月29日（金）
中学３年生と高校１年生（附属高校）との異校種間交流授業
担当　附属高校

③ 10月４日（木）
中学３年生と高校１年生（附属高校）との異校種間交流授業
担当　戸水（中学校）

④ 11月２日（金）
中学３年生と高校１年生（附属高校）との異校種間交流授業
担当　附属高校

⑤ 11月16日（金）
本校研究発表会にて中学３年生と高校１年生（附属高校）との異校種間交流授業

⑥ 11月17日（土）
金沢大学教育学部附属高校研究発表会にて中学３年生と高校１年生との異校種間交流授業

⑦　２月中

中学３年生と高校１年生（附属高校）との異校種間交流授業

担当　戸水（中学校）

４．異学年・異校種間交流授業実践経過

(1)　異学年交流（中３と中１）　Ｈ18年５月　題目「面積２の正方形の１辺の長さ」

面積が２の正方形の１辺の長さについて，中１は小学校の知識をもとに，中３はこれまでの数学的な見方を生かしながら，お互いに考えて班別にその考えを深めあう授業。班は中３と中１がそれぞれ男女各１名の４名で構成した。最後には全体発表会を行って，面積２の正方形の１辺の長さについて，どのような数になるか共有しあう時間をもった。

思考水準の高い中３が中１に自分の考えをわかりやすく伝えることで，中１の思考水準の引き上げと，中３の自己表現力の育成を狙ったのだが，実際には中３が自分の考えを中１のレベルまで降りて説明することが出来ず，金沢大学の大谷教授から，思考水準の違うもの同士が同じ土俵で議論することは難しいとの指摘をうけた。

(2)　異校種交流（中３と高１）　Ｈ19年２月　題目「集合と論理」

命題の逆，裏，対偶について，その真偽と集合論を結びつけて学習をすすめた。中３の選択数学履修者と高１との交流授業で，班ごとに命題が真の場合にその対偶も必ず真になることや，その説明を集合論と結びつけて考え，最後に身の回りの事例を探して全体で発表する時間を持った。

班の構成は中学生５名＋高校生４名の１班９名構成。

課題の設定については，前回の大谷先生の指摘を受けて，身近な事例を考えさせることで，お互いが同じ思考のレベルで課題に取り組めるのではないかと考えた。また，前回の中３，中１ほどは思考水準に差異がないと思われる中３後期と高１の組み合わせで行うことで，中３生徒の思考水準の引き上げと，高１生徒の自己表現力の定着を狙った。

実際の授業では，「日本一高い山は富士山である。その対偶は富士山でない山は日本一高くない。これはどちらも真。」「あんこは甘い。甘くないものはあんこではない。これはどちらも真。また，あんこでないものは甘くない，は，命題の裏であり，真であるとは限らない。」などの意見が出て授業は盛り上がった。後の生徒の感想を見ても，中３にとっては有意義な時間になった様子で，高１にとっては既習事項であったことがかえって班活動で高校生が中学生に教えることができることにつながり，ねらい通り中３生徒の思考水準の引き上げと，高１生徒の自己表現力の定着につながったと思われる。

(3)　異学年交流（中３と中２）　Ｈ19年３月　題目「一刀両断」

上記(2)の授業の１週間後，中３と中２で行った課題学習。紙に二等辺三角形，台形，一般の四角形，といった図形がかかれており，紙を折り曲げて１本の直線でその形を切り抜く授業。操作活動を伴いながら考えることが出来る課題で，２年生は，習ったばかりの図形の合同を使って考えたり説明したりすることが出来る。中３生徒は前回と同じ選択数学履修生徒で，班は中２，中３ともに２～３名の合計５～６名構成。最後は班ごとに一刀両断の仕組みを既習事項を用いて説明，発表した。この課題も，説明に使う既習の知識に差異はなく，学年も近い集団で行うことにしたため，同じ思考のレベル

で課題に取り組むことが出来ると考えた。さらに，中3は1週間前の高校生との交流を生かして，2年生に教えながら学習を進めることが出来ると考えた。これらのことにより，中2の思考水準の引き上げと中3の自己表現力の育成を狙った。

しかし，実際の授業では，中2生徒の方が早く解答を発見したり，中3生徒は思うように説明が出来ず，中3生徒の自己表現力が高1生徒ほどは育っていないと感じた。また，説明に使う知識が，中2生徒は習ったばかりであるのに対し，中3生徒はどの知識を用いてよいか分からず，既習の知識がまだ頭の中で体系立っていないと感じた。

(4) 異校種交流（中3と高1） H19年6月 題目「九九表から性質を見つけ，証明しよう」

今年度に入ってから，中3のクラスと高1のクラスで行った交流授業。九九表からいろいろな数の性質を見つけ，多項式の計算を用いながらそれを証明していく授業。

詳しくは後述の今年度の授業実践①を参照。

(5) 異校種交流（中3と高1） H19年6月 題目「√の近似値」

上記(4)の授業の2週間後行った授業。いろいろなルートの近似値の見つけ方を，高校生に教わりながら考えていく授業。詳しくは後述の今年度の授業実践②を参照。

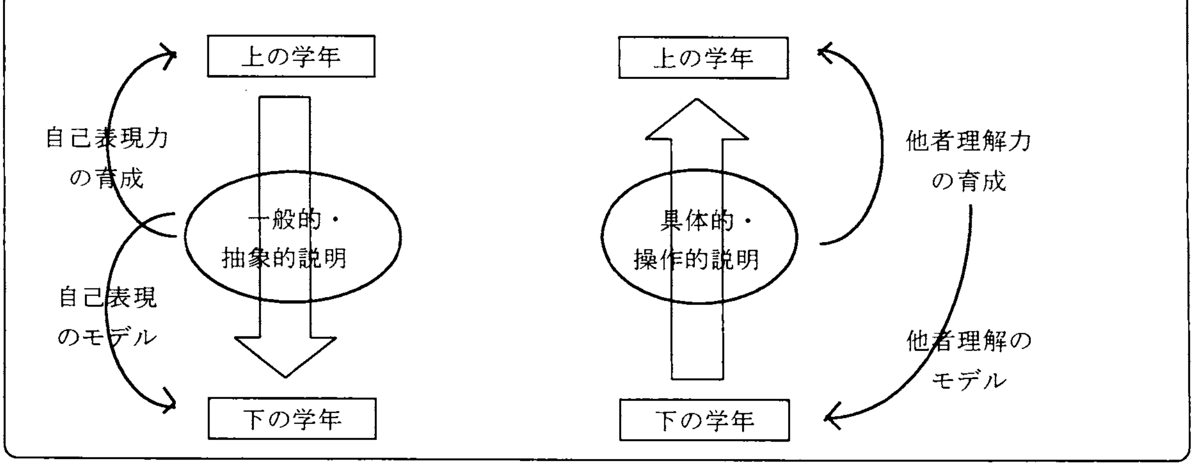
5．異校種間交流授業の実際

(1) 交流授業のねらい

前述のように，数学科が異学年や異校種間交流でねらうものは，数学的な自己表現力と数学的な他者理解力（数学的なコミュニケーション力）の育成である。下の学年は，上の学年がいろいろな説明をするのを聞いて，より一般的・抽象的に自分の考えを表現する方法を学ぶことができると考えた（自己表現のモデル）。これが下の学年の自己表現力の育成につながると考えている。そのためには，上の学年が分かりやすく自分の考えを下の学年中学生に伝える必要がある。それが上の学年の自己表現力の育成にもつながると考えている。

また，上の学年は，抽象的・一般的に考えるだけでなく，下の学年の例えば具体的な操作活動をともなった説明など，いろいろな説明を行っているのを見て，多様な考えを理解し，それを体系的にまとめていく力をつけて欲しいと考えた。それが上の学年の他者理解力の育成につながると考えている。そしてそれがまた，下の学年の他者理解のモデルになればと考えている。

交流授業のねらい



(2) 異校種間交流授業をすすめるにあたって

昨年度の初めに校内研究授業で中１と中３の交流授業を行った。ある程度抽象的表現力のついた中３と，まだ数学を学習して間もない中１で交流授業を行えば，学年や経験が明確に違うことから中３が表現力のモデルを示すことができると考えたのだが，あまり効果が上がらなかった。その後の授業整理会で金沢大学の大谷教授より「思考水準の違うものどうしが同じ土俵で数学的議論をすすめるのは難しい」との指摘をいただいたが，まさにその通りである。確かに本校数学科でこれまでにすすめてきた思考水準の定義にあてはめて考えてみると，中１が第１水準から第２水準への移行期であるのに対し，中３は第２水準から第３水準への移行期である。また，中１はまだ数学的な議論になれておらず，思考水準が近い中２と交流授業を行ったとしても，やはり効果はそれほど得られないと考えた。

そこで，本校数学科においては，昨年度より中３と高１との異校種間交流授業をすすめることにした。中２と中３ではなく，あえて異校種間としたのは，やはり思考水準の問題を考えたからである。中２が第２水準の入り口にいるのに対し，中３は第２水準から第３水準への移行期である。中２後半で図形の証明を学習し，少しは抽象的な議論をすすめることができるようにならないと，中３と交流をしてもさほど効果があがらないと考えた。一方高１は，第２水準を卒業して第３水準の入り口にいる段階であり，表現・処理や知識・理解の部分で学習内容に差はあっても，思考水準は中３に同程度であると考えられる。

また，教材の配列を考えても，例えば数と式では中３で多項式の積や２次方程式を扱うが，これは１次式しか扱わない中２と比べて格段の飛躍である。逆に高１では次数は上がるものの，多項式の積を扱う点や２次方程式の解の公式など，中３の学習内容からさほどの飛躍は感じられない。実際，多項式の積の仕組みを理解すれば，中３でも高次の多項式の積の計算はできると考えられる。さらに，関数においても，中１で原点を通る１次関数，中２で１次関数の一般形，中３で原点を通る２次関数，高１で２次関数の一般形と，中１と中２，中３と高１が教材配列においてセットになっているのである。

以上のことから，中３と高１の異校種間交流授業をすすめることにした。

6．今年度の授業実践①

(1) 実施時期　6月

中３は多項式の学習を行っている時期，高１は５月までに多項式の学習を終えている。

(2) 対象　中3と高1　それぞれ1クラス40名　計80名による交流授業

昨年度は選択数学履修者を対象に行ったが，数学が好きな生徒による交流だったので，そのときに感じた手応えが，交流によるものか，数学への興味によるものかがわからなかった。そこで今年度は必修の数学で交流授業を行うことにした。第１回は高校生に中学校に来てもらった。

(3) クラス構成と班構成

交流授業では，班学習と全体学習を取り入れて学習をすすめることにしている。班は中学生と高校生の男女混合班を基本とし，班学習で個人と個人の交流を深めることで，上記5(1)のねらいの達成を目指した。

昨年度の交流授業では，発表班があまりに多くなることを恐れ，１班９～10人の班を構成したが，やはり班の人数が多すぎて，班の中で十分な話し合いができなかった。そこで今回はその反省を生かし，１班６人～７人の班を構成した。また，班の数があまり多くなると，全体学習で全部の班の考え

を発表する時間が足りなくなり，十分な追究が出来ない。そこで，80名のクラスを40名ずつに分けて2教室で授業を行うことにより，全体発表で発表する班の数も6班になり，班の数も適数になると考えた。

(4) **題目 「九九表から性質を見つけ，証明しよう」**

高校生は多項式の学習を終えたばかりであり，また，中学生は多項式の展開公式を学習し終えたばかりである。そこで，中学生が多項式の計算の有用性を実感できるように，九九表からいろいろな性質を見つけ，それを多項式の計算を用いて証明する授業を行った。九九表の性質の証明には，文字を2つ使うアイディアが必要で，中3の必修数学にしては少々発展的な内容であるが，高校生がそれに気づき，中学生に教えることで，ねらいにある表現力・理解力の育成につながると考えた。また，多項式の計算は，中3と高1では学習内容に多少の差があり，見つけた性質によっては中3の計算の範囲を超えるものもあるが，多項式の展開の計算の仕組みを理解すれば，少々複雑な計算も高校生に教えてもらいながら理解できると考えた。

(5) **授業の流れ（指導案は【資料1】を参照）**

① アイスブレーキング

お互いの緊張をほぐす活動。今回は自己紹介もかねて名前神経衰弱を行った。

② 全体学習

九九表の見方と簡単な性質の発見を行った。

③ 個別学習

最初は個人で九九表から性質を見つけた。

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

例：(見つけた規則)

2 × 2の正方形で，右上と左下の数の積は右下と左上の数の積に等しい

(その理由)

左上の数を a と b の積とすると

$ab\times(a+1)(b+1)$と

$a(b+1)\times b(a+1)$が等しい

④ 班学習

その後班に分かれ，見つけた性質を発表しあい，その性質が成り立つことを証明した。中学生にとっては証明が難しいので，高校生に教えてもらいながら活動を行った。

⑤ 全体学習

各班で見つけた性質とその証明を発表してもらった。できるだけ中学生が発表できるように，高校生が助言するようにした。

(6) **考察**

中学生にとっては難しい内容で，楽しみながら活動をするというわけにはいかなかった。高校生が教えてくれればそれなりに中学生も理解できたのだろうが，高校生も多項式を学習し終えたばかりで，このような議論に慣れておらず，2つの文字を使って九九表の数を表現するというアイディアになかなか気づかない様子であった。そのため，教師の助言を必要とした班もあり，高校生が力を発揮する場面がそれほどなかった。それらの班の中学生の感想には「難しかった」「交流授業を行うこと

に意味を見いだせない」など，授業に関する否定的な意見があった。しかし，高校生が自らそのアイディアを発見した班はスムーズに話し合いが進み，その班の中学生の感想を見ると，「高校生ってすごい」「高校生のアイディアに感心した」「高校生に教えてもらって分かりやすかった」「またやりたい」など，肯定的な意見が多かった。全体学習で十分な時間がとれなかったことから，班活動が活動時間の多くを占めていたので，班によって生徒の交流授業に対する感じ方にかなりの温度差があり，課題設定に，難易度の面で問題点があるのではないかと感じた。

その後，7月の校内研修会で滝先生から，異年齢交流のポイントは上のものと下のものの力の差が歴然としていて，上のものが自己有用感を感じ，下のものがあこがれを抱くように設定しなければいけない，との指摘をいただき，今回の課題設定の問題点を痛感した。確かに2月に行った異校種間交流授業では，高1が論理の学習を終えていて，高校生にとってはそれが自分のものになっていた。中学生は初めて学習する内容で，しかも発達段階的には十分に理解できる内容だったので，高校生が中学生にすらすら教える姿にあこがれを抱き，高校生も中学生の「わかった！」「理解できた！」という反応に自己有用感を感じたのだと思われる。今回もそれが出来た班は，高校生は自己有用感を感じ取れただろうし，中学生もあこがれをいだき，「楽しかった」と思えたのではないだろうか。両者がそうして交流の「楽しさ」を感じ取ることが，交流授業で自己表現力・他者理解力を育成していく上で必要不可欠であると感じた。

7．今年度の授業実践②

(1) 実施時期　6月下旬

中3生は平方根の学習を終っている。高1生は式の計算を学習している段階である。

(2) 対象　中3と高1　それぞれ1クラス40名　計80名による交流授業

授業実践1と同じく，必修の数学で行った。高校のクラスは授業実践1とは違うクラスである。

第2回目の交流授業は中学生が高校へ出向き，高校の教室で行った。

(3) クラス構成と班構成

前回，班構成での授業がスムーズに行えたので，第2回も前回とほぼ同じ班編制とした。

すなわち，中学生と高校生の男女混合班を基本とし，1班の人数を6人～7人とした。

また80人のクラスを40人ずつに分けて，2教室で授業を行い，前回と同じく1教室の班の数を6班とした。今回は高校の先生が中心となって授業を進めた。

(4) 題目「近似値を求めてみよう」

中3生は平方根の学習を終えてから，それほど期間が経っていないので，平方根の近似値の計算についても，電卓で扱ったときのように，$\sqrt{10}$を3.1と3.2の間，3.16と3.17の間というように挟み込んでいく考え方をする生徒が多いと考えられる。

高1生は数学Ⅰで分母の有理化などの平方根の計算を学習しているが近似値の計算についてはほとんど触れられていないとのことである。そのため，中学生と同様の挟み込む考えをする生徒が多いと思われるが，開平法について少し触れられているので，開平することによって平方根の近似値を計算する生徒もいるのではないかということであった。

この授業のねらいを，平方根の近似値の計算を通じて，1つの教材に対していろいろな数学的な見方や考え方ができることを体験し，事象をさまざまな視点から数学的に考察しようとする態度を育てることとした。

さらに，平方根の近似値を求める計算に式の展開が利用できる意外性を味わわせることも中学生にとってのねらいとした。

(5) 授業の流れ（授業プリントは資料２を参照）

① アイスブレーキング

お互いの緊張をほぐすためカードで順番を決め，１人15秒で自己紹介をした。

② 個別学習

最初に$\sqrt{10}$の値を小数第２位まで求めるという課題を自由に考えさせた。ほとんどの生徒が挟み込みの方法で求めていた。

③ 班学習

次に，予め準備した６つの近似値の計算方法（ａ作図　ｂ相加平均　ｃ面積の分割　ｄ一次近似式　ｅ連分数展開　ｆ開平法）のうち１つを用いて$\sqrt{10}$の値を求めるという課題に取り組んだ。

これらの計算方法を用いる際には中学生が学習していない数学的内容が含まれるので，中学生が学習していない内容が出てきた時には高校生がそれを説明することが求められた。

④ 発表

予定では時間の最期に班ごとに求めた近似値とその求め方について発表することになっていたが，３の班学習に時間がかかったため発表はできなかった。

(6) 考察

今回の学習内容は高校生にとっても予想外に難しい内容であった。そのため，高校生自身が指定された解決方法の意味の把握に手間取り，中学生に説明するまでにいたらない班があったなど，実践１と同じく交流授業としては課題設定に問題があった面は否定できない。

その原因としては，実践１と同じく，高校１年の６月では高校生が計算技術や論理的な思考についてまだ慣れていないことが大きい。

課題２の追究方法によっては，中学生には班の追究で何が行われているかについて，入り口がかすかにわかった程度の生徒もいたと考えられる。

しかし，高校生が真剣に難しい問題に取り組んでいる姿に数学の奥深さを感じた生徒もいた。

ともすれば，中学生は問題の解き方を覚えるのが数学であるという間違った認識を持ちがちである。

このような生徒に対し，異校種間交流は，視野を広げ，数学そのものの面白さを伝える良い機会となりうる。

数学嫌いを作ってしまうという危険性もあるが，異校種間の交流授業は，中学校の数学をより高い目で見，発展的な問題を高校生の手を借りて考えるという貴重な体験となりうることがわかった。

８．異学年・異校種間交流授業の成果や課題

高校１年生との交流授業を数回実施した。夏休み前の高校１年生と中学３年生とは一般的な学力はかなり差がある。しかし，思考水準として見るとまだ，大きな差があるとは言えなかった。特に２次式以上一般的に考えることなどはそれほどの差は感じられなかった。これは夏休み前ということで高校の数学の内容をまだ，それほど学習していないので思考水準的な差が生じていないようである。このため，高校１年生がリーダーシップを発揮して学習活動が進んだり，中学生が驚くような解決方法や数学的な見方を披露したり，中学生に分かりやすく説明できる場面が少なかった。実施時期や高校２年生との交流も考えられ

る。また，同じ課題でも高校1年生と中学生の思考水準が違うので同じレベルの学習にならなくてもよいことを心がけるようにしなければならない。

中学3年生と高校1年生との交流授業のために学習課題は発展的な内容を考えた。このことで普段数学が苦手な生徒には少し課題が難しくなり，意欲的に活動できない面も見られた。逆に数学の好きな生徒や得意な生徒は普段と違った学習ができ意欲を持って活動できていた。課題によっては必修授業で実施した方がよいのか，興味関心が高い生徒が多い選択授業の効果的か，考えていく必要がある。

もう一つはもう少し学年を離して思考水準の違いが大きい方が課題追求場面で上級生がリーダー性を発揮しやすいように思われる。その場合でも「下級生にもよく分かるように説明してあげなさい」という条件を示して活動を進めるようにする必要がある。思考水準が違うとき，生徒同士で対等な議論はできないし上級生が下級生に配慮しないと話しは深まらない。下級生も上級生の進んだ考え方を学ぶことはできない。

今年度は中学3年生と高校1年生の異校種間交流授業を実践した。学年差が大きいほどよいとなると高校2年生との交流授業も考えられる。更に，中学生が上級生役になるには小学生との交流授業も考えられる。

数学科の異学年・異校種間交流授業の成果と課題を項目ごとにまとめてみた。

① 上のものと下のものの力の差が歴然としていると，高校生は自己有用感を感じ取れ中学生もあこがれをいだき，「楽しかった」と感じられる。

2月に行った異校種間交流授業では，高1が論理の学習を終えていた。あこがれを抱き，高校生も中学生の「わかった！」「理解できた！」という反応に自己有用感を感じたのだと思われる。高校生が真剣に難しい問題に取り組んでいる姿に数学の奥深さを感じた生徒もいた。

高校生が自らそのアイディアを発見した班はスムーズに話し合いが進み，その班の中学　生の感想を見ると，「高校生ってすごい」「高校生のアイディアに感心した」「高校生に教えてもらって分かりやすかった」「またやりたい」など，肯定的な意見が多かった。

② 数学的な考え方の広がりと深まり

中学生は問題の解き方を覚えるのが数学であるという間違った認識を持ちがちである。このような生徒に対し，異校種間交流は，視野を広げ，数学そのものの面白さを伝える良い機会となりうる。

異校種間の交流授業は，中学校の数学をより高い目で見，発展的な問題を高校生の手を借りて考えるという貴重な体験となりうることがわかった。

③ 学習課題に適切な難易度が必要

難しい過ぎると中学生に数学嫌いを作ってしまうという危険性もある。高校生にとっても難しい内容であると，高校生自身が指定された解決方法の意味の把握に手間取り，中学生に説明するまでにいたらない班が生まれて十分な学習活動が深まらない。

④ 教師の働きかけを吟味する。

「下級生にもよく分かるように説明してあげなさい」という条件を示して活動を進めるようにする必要がある。思考水準が違うとき，生徒同士で対等な議論はできない。上級生が下級生に配慮しないと話し合いは深まらないので下級生も上級生の進んだ考え方を学ぶことはできない。

⑤ 選択数学での実施も検討する。

中学3年生と高校1年生との交流授業のために学習課題は発展的な内容を考えた。このことで普段数学が苦手な生徒には少し課題が難しくなり，意欲的に活動できない面も見られた。逆に数学の好きな生

徒や得意な生徒は普段と違った学習ができ意欲を持って活動できていた。課題によっては必修授業で実施した方がよいのか，興味関心が高い生徒が多い選択授業の効果的か考えていく必要がある。

⑥　中学３年と高校１年交流の時期が大切

高校１年の６月では高校生が計算技術や論理的な思考についてまだ慣れていないことが大きい。高校生が力を発揮する場面があまりなっかった。高校生が力を発揮できない班では，中学生の感想には「難しかった」「交流授業を行うことに意味を見いだせない」など，授業に関する否定的な意見があった。学年差が大きいほどよいとなると高校２年生との交流授業も考えられる。

⑦　中学生が上級生役になる場面の必要

中学生が上級生役になるには小学生との交流授業も考えられる。小学校との調整や学習課題の開発などが今後の検討課題である。

【資料１】 実践①の指導案　ワークシート

３年２組（附属中学校）　１年Ｃ組（附属高校）　数学科　学習指導案

平成１９年６月１２日（火）　第５限
指導者　３－２教室　Ｔ１：戸水　吉信（附属中学校）
　　　　　　　　　　Ｔ２：塩屋　千学（附属高校）
　　　　３－１教室　Ｔ１：松原　敏治（附属中学校）
　　　　　　　　　　Ｔ２：菊野慎太郎（金沢大学）

１．単元名　　中学校３年「多項式」　高校１年「数学α：数と式」

２．目　標
・文字を用いた簡単な多項式について，式の展開や因数分解ができる。（中３）
・目的に応じて式を変形することができ，それを用いることができる。（中３）
・展開や因数分解の公式を理解し，それらを利用して，展開や因数分解ができる。（高１）
・絶対値記号の意味を理解し，場合分けして絶対値記号を用いずに表すことができる。（高１）

３．評価の観点及び規準（本時に関係ある部分を，評価規準表から抜粋。詳しくは別紙を参照。）

①数学的への関心・意欲・態度
　式の展開や因数分解を利用して問題を解決しようとする。
②数学的な見方や考え方
　具体的な場面で式を目的に合うように変形し，数量の関係などを考察することができる。

４．指導にあたって
【指導観】
　数学科では，「他者理解力と自己表現力の育成～思考水準に応じた指導～」を今年度の研究主題として研究をすすめている。昨年度は「自己表現力」の育成を中心に研究をすすめたが，今年度は，「他者理解力」の育成も視野に入れて研究をすすめることにした。先の校内研修会において金沢大学の大谷先生より，数学の学習においては，数学的に議論をすすめていくことが必要不可欠であるとの指摘を頂いたが，そういった活動を円滑にすすめていくには，まさに個々の，または集団としての自己表現力と他者理解力が必要不可欠である。
　そのためには，**グループ学習やレポートの評価活動などを多く取り入れて，個と個が数学的に議論する機会を増やすとともに，全体学習において「より分かりやすい表現」を確認し合うことで，全体的な自己表現力の向上を目指したい。**また，昨年度，高校生との交流授業を行った際，生徒から「高校生のグループ学習の進め方が分かりやすくとても参考になった」という感想が多々聞かれた。これは高校生が中学生の理解の程度を把握し，自分たちの考えを分かりやすく伝えたためであると考えられる。そこで今年度も，**高校生のグループ学習の進め方を他者理解のモデリングとして，中学生が他者理解力をつけていくことができるのではないかと考え，高校生との交流授業を行っていくこととした。**昨年度は１グループ８～１０人という多人数だったため，うまく話し合いが進まない班があったことも反省として，今年度は１班６人～７人の班編成で授業に臨みたい。
【教材観】
　中学校３年生，高校１年生ではともに多項式の積について学習する。中学校３年生は$(a+b)^2$などの多項式×多項式の計算で，高校１年生は$(a+b)^3$などの多項式×多項式×多項式など，積一般についての学習となる。複雑さや難易度に差はあるが，中学校３年生にとっては，一旦多項式の積の計算方法を理解すれば，高校１年生の学習内容を理解するのは比較的容易である。そのため「多項式」の単元は，中学校３年生と高校１年生の交流学習を行うには適切な単元であるといえる。（中学校２年生では，多項式の和と差の学習にとどまることを思えば，「多項式」の単元は，中学校２年生と３年生の交流授業を行うよりも中学校３年生と高校１年生の交流授業の方がはるかに行いやすいのである。）
　本時では，**多項式の計算を利用して数学的な事象を考察し，お互いの考えを発表し合う中で，共に学ぶことができる授業を目指した。**具体的には「九九表」を教材として用い，その中から様々な規則を見つけ，それを多項式の計算を用いて考察する授業を試みることにした。これは，見つけた規則によっては３次，４次の計算が必要で，中学校３年生にとっては少し発展的な計算になるが，高校１年生とともに学習することで，理解することが可能であると考えた。また，高校１年生にとっても，難易度的に丁度よい教材であると考えた。また，**規則を見つけることに関しては，お互いの思考のレベルに差はないと考えている。高校生も中学生と議論をすすめる中で，新たな発見があるかもしれないのではないだろうか。**
【生徒観】
　中学校３年生と高校１年生の思考水準は，ともに第２水準に到達し，第３水準へ移行する時期にあたり，思考水準が似ている。そのため，数学的に同じ土俵で議論することが比較的容易であると考えている。しかし，**第３水準的な議論にはやはり高校１年生が慣れていると思われるため，自己表現力よりも他者理解力に差があると考えられる。その差がうまく働いて中学校３年生の他者理解力を引き上げる結果につながれば，と考えている。**

※本校数学科で考えている「数と式」領域の思考水準（作業仮説）
第１水準　具体的な物を使っての計算から，「数字」での機械的操作による計算ができる。
第２水準　いろいろな法則を見つけ，それを具体的な事象に照らすなどして，一般的に成り立つことが説明できる。
第３水準　いろいろな数の定義を理解し，定義から計算法則などの公式・定理を導き出し，新たな公式・定理の証明ができる。また，必要に応じて数の場合分けをして，数学的な議論をすすめることができる。

5．指導計画および評価計画

	評価計画
中学校３学年「多項式」（総時数１５時間）	
第１次　多項式の計算（６時間）	①②③④
第２次　因数分解（５時間）	①②③④
第３次　式の計算の利用（４時間）	①②③④
第１時　カレンダーからいろいろな規則を見つけ，説明しよう	①②
第２時　九九表からいろいろな規則を見つけ，説明しよう【本時】	①②
第３時　展開や因数分解を利用していろいろな数の計算をしよう	③
第４時　展開や因数分解を利用して数や図形の性質を見つけよう	②　④
高等学校１学年	
第１次　整式の加法・減法および乗法（展開公式）【本時】	①②③④
第２次　整式の因数分解	①②③④
第３次　約数と倍数，分数式の計算	①②③④
第４次　絶対値，平方根の計算	①②③④

6．本時の学習（中学校３学年　第３次中第２時　高等学校１学年　第１次中）

（１）題材名　「九九表から規則を見つけよう」

（２）ねらい

・目的に応じて式を変形することができ，それを用いることができる。（中３）

・展開や因数分解の公式を理解し，それらを利用することができる。（高１）

（３）評価の観点および規準（別紙の評価規準表を参照）

①数学的への関心・意欲・態度

式の展開や因数分解を利用して問題を解決しようとする。

②数学的な見方や考え方

具体的な場面で式を目的に合うように変形し，数量の関係などを考察することができる。

（4）「他者とかかわる」「共に学ぶ」や「他者理解力」「自己表現力」育成に関する学習活動について

高校生と関わり合いながら他者理解のモデルに触れ，他者理解力を伸ばし，全体発表会で，分かりやすい表現を確認し合い，自己表現力を伸ばす活動。

（５）本時の展開

時間 学習形態	学習活動	予想される生徒の反応（☆）および 指導上の留意点（※）・評価（◆）・支援（◎）
３分	・アイス・ブレーキング 自己紹介を兼ねて「名前神経衰弱」をする	

<課題>

九九表から規則を見つけ，なぜそうなるのかを発表しよう。

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

例：（見つけた規則）

２×２の正方形で，右上と左下の数の積は右下と左上の数の積に等しい

（その理由）

左上の数を a と b の積とすると

$ab \times (a+1)(b+1)$ と

$a(b+1) \times b(a+1)$ が等しい

時間 学習形態	学習活動	予想される生徒の反応（☆）および 指導上の留意点（※）・評価（◆）・支援（◎）
全体学習 ２分 個別学習 10 分 班活動 20 分	・本日の課題の説明 簡単な例を挙げながら，本日の課題について説明する ・最初は個別に考える。 ・わからなければ相談する。 ・自分が見つけた性質を班で発表する。 順に発表する。他の生徒はそれをしっかりと聞く。 ・班の中で１つ全体発表で発表する。 発表者はできるだけ中学生。 **高校生は中学生がうまく発表できるように助言する。** **（他者理解力のモデリング）**	※２×２の正方形で囲まれた数について，何か気づくことはないかきく。 ☆和は？積は？積の差は？ ※例は最後まで検証しない。個別の追求へとうつらせる。 ◆①式の展開や因数分解を利用して問題を解決しようとする。<机間支援> ◎まずはいろいろな例を考えるように支援する。計算機の利用も促す。 ◆②具体的な場面で式を目的に合うように変形し，数量の関係などを考察することができる。<机間支援，レポート用紙> **◎文字のおき方について，九九表だから，a と b の２文字を使うことを助言する。** ※できるだけ多様な性質が出るように，机間支援で規則の種類の調整をする。

班ごとに，見つけた規則を発表しよう。

時間 学習形態	学習活動	予想される生徒の反応（☆）および 指導上の留意点（※）・評価（◆）・支援（◎）
全体活動 15 分	・各班の発表を聞く。 ・それぞれの発表について意見交換をする	**※発表の中でわかりやすい表現，いい表現をとりあげ，全体で共有する。（自己表現力のモデリング）**

準備するもの　ワークシート，電卓（班に１台），マジック，発表用用紙，マグネット

班構成　中学校３年３人～４人＋高校１年３人～４人　計６人～７人班

全部で６班×２クラス　男女混合

中学校３学年　単元評価規準表　**太字は本時の関連項目です**

（単元　多項式）総時数１５時限（５月～６月）

	指導計画および予定時数	主な学習活動または学習項目	数学への関心・意欲・態度	数学的な見方や考え方	数学的な表現・処理	数量，図形などについての知識・理解
指導計画・評価規準	①多項式の計算（６時限）	・多項式と単項式の乗除の仕方を考えよう。 ・多項式と多項式の乗法の仕方を考え，公式をつくろう。	・多項式と単項式の乗除に関心をもち，計算をしようとする。 ・展開に興味を持ち，多項式の積を１つの多項式で表そうとしたり，公式を用いてその計算をしようとする。	・数の計算と同じように見て計算の仕方を考察できる。 ・式を１つの文字に置き換えたり，交換，結合，分配法則などを用いて既知の計算に帰着させ，展開の仕方を考察できる。	・多項式と単項式の乗除の計算ができる。 ・多項式の積で表された式の展開ができる。	・多項式と単項式の乗除の計算の仕方を理解している。 ・式を１つの文字に置き換えたり，交換，結合，分配法則などを用いて式の展開の意味を理解している。
	②因数分解（５時限）	・多項式の因数分解の仕方を考え，公式をつくろう。	・多項式の因数分解に興味を持ち，公式を用いたりして，その計算をしようとする。	・式を１つの文字に置き換えたり，交換，結合，分配法則などを用いて既知の計算に帰着させ，因数分解の仕方を考察できる。	・多項式の因数分解ができたり，因数分解された式をよみとることができる。	・式を１つの文字に置き換えたり，交換，結合，分配法則などを用いて式の因数分解の意味を理解している。
	③式の計算の利用（４時限）	**・いろいろな問題を，文字式であらわしたり，それを計算することで解決しよう。**	**・式の展開や因数分解を利用して問題を解決しようとする。**	**・具体的な場面で式を目的に合うように変形し，数量の関係などを考察することができる。**	・具体的な場面で数量やその関係を文字式で表したり，目的に合うように変形したり，よみとったりすることができる。	・文字式に表現することにより，形式的に処理することができることを理解している。

評価方法とＡＢＣの基準

観点	数学への関心・意欲・態度	数学的な見方や考え方	数学的な表現・処理	数量，図形などについての知識・理解
評価規準	数学的な事象に関心をもつとともに，数学的活動の楽しさ，数学的な見方や考え方のよさを知り，それらを事象の考察に進んで活用しようとする。	数学的活動を通して，数学的な見方や考え方を身に付け，事象を数学的にとらえ，論理的に考えるとともに，思考の過程を振り返り考えを深める。	事象を数量，図形などで数学的に表現し処理する仕方や推論の方法を身に付けている。	数量，図形などに関する基礎的な概念や原理・法則などについて理解し，知識を身に付けている。
評価の方法と基準	①ノート，レポート点検 より深い追求が見られればＡ 提出して書いてあればＢ 提出がなければＣ 個人面接で提出を促す ②授業中の観察 より深い追求をしていればＡ 意欲が見られなければＣ 机間巡視で課題への取り組みを促す	①単元テスト（分野によって） 発展的な問題が解ければＡ 基本的な問題が解ければＢ 基本的な問題が解けなければＣ 再テストをしたり・課題を課したりする ③ノート，レポート点検 優れた考え方が見られればＡ ④テスト形式レポート 深い洞察が見られればＡ ⑤授業中の観察 優れた考え方を発表したらＡ	①単元テスト 概念的・抽象的な問題が解ければＡ 基本的な問題が解ければＢ 基本的な問題が解けなければＣ 再テストをしたり・課題を課したりする	①単元テスト 概念的・抽象的な問題が解ければＡ 基本的な問題が解ければＢ 基本的な問題が解けなければＣ 再テストをしたり・課題を課したりする

高校１学年　単元指導計画　**太字は本時の関連項目です**

（単元　数と式）週４単位（４月～５月）
- **整式の加法・減法および乗法（展開公式）**
- 整式の因数分解
- 約数と倍数，分数式の計算
- 絶対値，平方根の計算

評価方法とＡＢＣの基準

観点	数学への関心・意欲・態度	数学的な見方や考え方	数学的な表現・処理	数量，図形などについての知識・理解
評価規準	数学的活動を通して，数学の論理や体系に関心をもつとともに，数学的な見方や考え方のよさを認識し，それらを事象の考察に積極的に活用しようとする。	数学的活動を通して，数学的な見方や考え方を身に付け，事象を数学的にとらえ，論理的に考えるとともに思考の過程を振り返り多面的・発展的に考える。	事象を数学的に考察し，表現し処理する仕方や推論の方法を身に付け，よりよく問題を解決する。	数学における基本的な概念，原理・法則，用語・記号などを理解し，知識を身に付けている。
評価の方法と基準	①授業中の学習態度 ②課題への取り組み状況　など	①レポートの内容 ②課題の内容　など	①テスト など	①テスト ②課題の出来　など
	Ａ＋　十分満足できると判断されるもののうち，特に程度の高いもの Ａ　十分満足できると判断されるもの Ｂ　おおむね満足できると判断されるもの Ｃ　努力を要すると判断されるもの			

九九表から規則を見つけよう

年　組　番　氏名（　　　　　　　　）

下の図のように，２数のかけ算の結果を表にしたものを「九九表」といいます。

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

（見つけた規則）

（そうなることの説明）

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

（見つけた規則）

（そうなることの説明）

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

（見つけた規則）

（そうなることの説明）

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

（見つけた規則）

（そうなることの説明）

【資料２】 実践②のワークシート

近似値を求めてみよう

実数には，分数で表される有理数（rational number）と分数で表されない無理数（irrational number）がある。

無理数は無数にあるが，その中には，代数的数※1 $\sqrt{2}$，$\sqrt{3}$ などと超越数※2 π などがある。これらの値は，およそどれくらいか，その値をどのように計算することができるかについて考えてみよう。

【課題１】近似値を求めてみよう

問１　次のおよその値は知っていますか。

$\sqrt{2}=1.41421356237309504880168872420 97\cdots$

$\sqrt{3}=$

$\sqrt{5}=$

$\sqrt{6}=$

$\sqrt{7}=$

$\pi=3.14159265358979323846264338327 95\cdots$

問２　$\sqrt{10}$ の値を，小数第２位まで求めなさい。（どのような方法が考えられるだろうか。）

※1 有理数を係数とする代数方程式を満たす数。

※2 代数的数でない数。

【課題２】近似値を求めてみよう

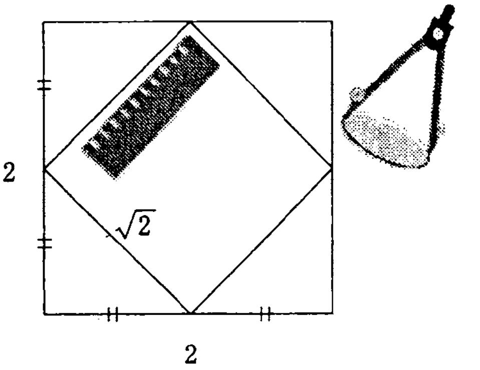
例として６つの近似値の計算方法を挙げてみました。これらの方法で $\sqrt{2}$ の近似値を求めると…

例①　作図してみよう

$\sqrt{2}$ の長さを作図すると右図のようになる。

実際に作図して $\sqrt{2}$ の長さを測る。

一つだけ書いて計っても誤差が出てくる。より正確な値を出すにはどうしたらよいだろうか。



例②　平均をとってみよう

$\sqrt{2}$ の近似値として１をとる。この１と，２を１で割ったもの（=2）の平均を計算する。すなわち

$$\frac{1}{2}\left(1+\frac{2}{1}\right)=\frac{3}{2}\quad(=1.5)$$

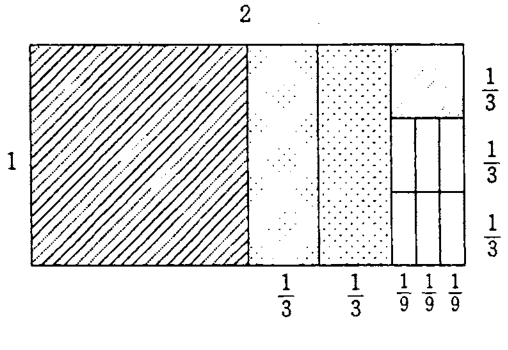
今度はこの $\frac{3}{2}$ を近似値として，$\frac{3}{2}$ と，２を $\frac{3}{2}$ で割ったものの平均を計算する。すなわち，

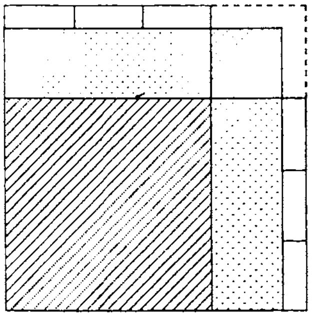
$$\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}+\frac{2}{\frac{3}{2}}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}+\frac{4}{3}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{17}{6}=\frac{17}{12}=(\qquad\qquad\qquad)\text{ となる。}$$

同様にして，$\frac{17}{12}$ と，２を $\frac{17}{12}$ で割ったものの平均を計算し，小数にしてみよう。

例③　面積を分割してみよう

$\sqrt{2}$ が分数（有理数）で表せないことは，古代ギリシアのピタゴラス学派により発見されたが，その近似値を図形を用いて求めた人がいる。面積が２の長方形を，正方形に作り変えればよい。なぜなら面積が２の正方形の一辺の長さは（　　　）ですね。ただし，ぴったり正方形にはならないので，近似値になります。





これより $\sqrt{2}\fallingdotseq 1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}=\frac{13}{9}$　　（文献では $\sqrt{2}\fallingdotseq 1+\frac{1}{3}+\frac{1}{12}\left(1-\frac{1}{34}\right)$ ということが述べられている。）

例④　一次式で近似しよう

紀元前 2200 ころバビロニアの数学の記録では,

平方根の近似値として　$\sqrt{1+x} \fallingdotseq 1+\frac{1}{2}x$　が用いられている。(ただし, x が十分 0 に近いとき)

(文献では, もっと一般的な式で与えられている。)

この式によると, $\sqrt{1+\frac{1}{49}} \fallingdotseq 1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{49}$　である。(両辺を 2 乗して, ほとんど等しいことを確かめよう)

従って, $\sqrt{1+\frac{1}{49}}=\sqrt{\frac{50}{49}}=\frac{5\sqrt{2}}{7}$　であるから, $\frac{5\sqrt{2}}{7} \fallingdotseq 1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{49}=\frac{99}{98}$ より

$\sqrt{2} \fallingdotseq \frac{7}{5}\cdot\frac{99}{98}=\frac{99}{70}=$ (　　　　　　　　) となる。

例⑤　繁(はん)分数で表してみよう

$\sqrt{2}$ を整数部分と小数部分に分けると　$\sqrt{2}=1+(\sqrt{2}-1)$

となる。これは　$\sqrt{2}=1+\frac{1}{1+\sqrt{2}}$　となるから, (この変形は高校生は分かるよね。)

$$\sqrt{2}=1+\cfrac{1}{1+\left(1+\cfrac{1}{1+\sqrt{2}}\right)}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\sqrt{2}}}$$

ここで最後の $\sqrt{2}$ を $\sqrt{2} \fallingdotseq 1$ として

$$\sqrt{2} \fallingdotseq 1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2}}=1+\cfrac{1}{\cfrac{5}{2}}=1+\frac{2}{5}=\frac{7}{5}=1.4$$

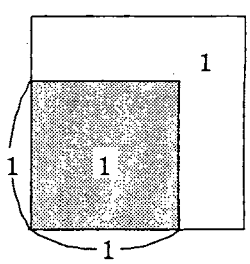
さらに分数をもう一段進めると

$$\sqrt{2}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\sqrt{2}}}} \fallingdotseq 1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2}}}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{2}{5}}=1+\frac{5}{12}=\frac{17}{12}=\ (\qquad\qquad)$$

となる。

例⑥　正方形で取り尽くしてみよう

面積が 2 である正方形の一辺の長さが (　　　) であるから, その一辺の長さを求めてみよう。



整数の範囲で辺の長さを考えるとき, その正方形の面積が 2 を超えない辺の長さは 1 である。この正方形を取り除くと, 残りの面積は 1 になる。

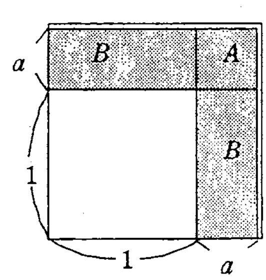
次に, 小数第 1 位までの範囲で辺の長さを考えるとき, 残りの面積 1 を超えないように追加して正方形を取り除く。すなわち,

1 辺の長さ a の正方形 A と 2 辺の長さ 1 と a の長方形 B を 2 個の和 $(1+1+a)\times a$ が面積 1 を超えないような a を見つけると,

$a=0.4$

である。この面積を除くと, 残りの面積は 0.04 である。

$$\begin{array}{r} 2.\square \\ \times\ 0.\square \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2.4 \\ \times\ 0.4 \\ \hline 0.96 \end{array}$$



次に, 小数第 2 位までの範囲で, 正方形を考えるとき,

残りの面積 0.04 を超えないように考える。すなわち,

1 辺の長さ b の正方形と 2 辺の長さ 1.4 と b の長方形 2 個の和 $(1.4+1.4+b)\times b$ が面積 0.04 を超えないような b を見つけると,

$b=0.01$

$$\begin{array}{r} 2.8\square \\ \times\ 0.0\square \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2.81 \\ \times\ 0.01 \\ \hline 0.0281 \end{array}$$

である。これを繰り返すと, 順に 0.004, 0.0002, … が見つかる。