生徒の発達段階を見据えた指導のあり方について
－数学的な思考水準の探究と問題解決力の育成－

松原　敏治
数学科　戸水　吉信
浜口　国彦

Ⅰ．思考水準の探究と問題解決力について

1．テーマ設定にあたって

本校数学科では，昨年度から学校研究の一環として「生徒の発達段階を見据えた指導のあり方について」というテーマを設定した。ファン・ヒーレの幾何学における思考水準論によると，思考には第０水準から第４水準まである。その思考水準の範囲で数学的な思考をする。思考水準が上がるにつれて数学的な思考も高まっていく。そこで，生徒の発達段階を，特に数学的な思考水準に絞って考察し，それに応じた指導のあり方について研究を進めた。

今年度は問題解決力という学校研究テーマを受けて，問題解決力の中で中心的な要素である思考力の育成を思考水準の発達という面から考えていくこととした。思考水準が上がるにつれて数学的な思考も高まっていくということから，「思考力の向上」＝「思考水準の発達」ととらえていきたい。さらに，問題解決的な授業を行うことで生徒の思考水準の発達を促していきたい。これは問題解決的な授業を行うことで生徒の思考場面や知識の統合・再構成場面が設定され思考力の向上につながると考えたからである。

問題解決というと様々学説があるが，本校では問題解決の流れの中で次の３つの点に注目した。「問題の把握・形成」「知識の統合・再構成」「表現（論理的組織化）」である。

問題解決の思考の流れ

問題の把握・形成	知識の統合・再構成	表現（論理的組織化）	⇒

問題解決力の中心的な力＝思考力

思考力の高まり	＝	思考水準の発達	〜〜	問題解決力の向上へ

2．研究の方針

また，研究の要点として次の３点を考えた。

①問題解決的な授業を通して育成する。
②思考水準を高めるための方策（思考水準に適した課題，発問）を追求する。
③生徒の思考水準の調査（図形，数，数量関係）をする。

3．思考水準ついて（ファン・ヒーレ　数学研究室大谷先生の指導による）

金沢大学教育学部・大谷実先生から，ファン・ヒーレの幾何学における思考水準論を教えていただいた。ファン・ヒーレの幾何学における思考水準論では，生徒が幾何を理解していく段階として，それぞれの思考力に段階があるのではないか，と述べられており，ファン・ヒーレはその段階を次のように定義している。

第0水準　図形は「全体として」認識され，その形によってだけ認識されるという特徴をもつ。

第1水準　この水準では，知覚される形の分析が行われ，その結果，それらの性質が明らかにされる。子どもは，図形の形に潜在する性質を認識し始める。

第2水準　この水準では，図形の諸性質間の論理的な関係や，図形間の論理的な関係づけがなされる。たくさんある性質の中で二三の特徴的性質が当該の図形を定義するものとして採用され，あとの性質は論理的な方法で確立される。図形は，定義に基づいて確立される一定の論理的な関連において現れる。

第3水準　この水準では，演繹法の意味が「大域的に」会得される。すなわち，理論全体を構成し，発展させる方法としての演繹法の意味が理解される。ここでは，「演繹の意味や，定理の逆，公理，必要・十分条件の認識に関連している。

第4水準　最も高いこの水準は，論理の本性についての認識である。ここでは，対象の具体的性質や対象間の関係の具体的な意味が捨象される。すなわち，理論をあらゆる具体的な解釈をぬきにして展開することができる。

こうした理論に出会って，我々も生徒1人1人にそれぞれの発達段階があり，それに応じた課題を与えることが必要ではないか，と考えるようになった。そこで昨年度から生徒の発達段階を，特に数学的な思考水準に絞って考察し，それに応じた指導のあり方について研究をすすめた。

4．思考水準と作業仮説

本校数学科で中学校3年間の生徒の様子を話し合い，生徒の発達段階の作業仮説としてまとめた。

(1)　数と式

①　中学校1学年

・法則を見つけることに興味を示す。

・法則を説明することも得意。

・なぜそうなるのか？ということを考えることに対しては興味薄（そういう力もついておらず，苦手であると考えられる）

・具体的な事象と関連づけての説明は苦手。教師が例示すると，「分かりやすい」という反応を見せる。（具体の世界と抽象の世界のリンク付けが自分ではできない）

②　中学校2年生

・法則を見つけると，なぜそうなるのか，ということを考える。
（個人差あり。中3くらいの場合もある）

・文字式を使って考えはじめる学年である。

・具体的な事象と結びつけた説明もできるようになる。

③　中学校3年生

・より数学的なすっきりとした法則にまとめようとする。

・法則の一般化をすすめようとする。（個人差あり。高校生くらいからの場合もある）

・操作的活動にはだんだんと取り組まなくなる。（操作の結果が予想できるからとも考えられる）

以上のことをもとに，「数と式」領域における思考水準を以下のように考察してみた。

第０水準　具体的な物を使っての計算しかできない。(小学校低学年)

第１水準　具体的な物を使っての計算から，「数字」での機械的操作による計算ができる。(小学校低学年～高学年)

第２水準　いろいろな法則を見つけ，それを具体的な事象に照らすなどして，一般的に成り立つことが説明できる。(中学校１学年～中学校２学年)

＜例＞　$(-5)+(+3)=(-2)$

などの計算法則を一般化し，それがいつでも成り立つことを説明することが出来る。

第３水準　いろいろな数の定義を理解し，定義から計算法則などの公式･定理を導き出し，新たな公式･定理の証明ができる。また，必要に応じて数の場合分けをして，数学的な議論をすすめることができる。(中学校３年生～高校生)

＜例＞

$\sqrt{a}$ ＝面積ａの正方形の一辺の長さ・・・・定義１

＝２乗してａになる正の数・・・・・・定義２（定義１と同値）

などを根号のついた数の定義としてとらえ，

定理１　$a<b$　ならば　$\sqrt{a}<\sqrt{b}$　であることや

定理２　$\sqrt{a}\times\sqrt{b}=\sqrt{ab}$　であることを，定義を使って説明することができる。

定理１は定義１を，定理２は定義２を使う方が証明しやすい，などの理解も含む。

第４水準　数や文字式の集合を環や体としてとらえることができ，定義・定理を集合そのものに適応することが出来る。(大学生)

⑵　専門の先生に見ていただく

大谷実先生に，以上の思考水準の定義を見ていただいた。すると，代数の分野における思考水準を研究している方の定義を以下のように教えていただいた。

第０水準　数が，それを特徴付ける具体物の集合から分離されておらず，また演算が直接具体物の対象に対して行われる。

第１水準　数が，それを特徴付ける具体物から分離される。一定の記数法（十進法）で記述された数を利用し，演算の諸性質が帰納的に確立される。

第２水準　数字によって表される具体的な数から，文字の一定の解釈の際だけに具体的な数を表す抽象的な文字式への移行がなされる。この水準で，局所的な論理的整理が行われる。

第３水準　代数全体を，与えられた具体的な解釈で演繹的に構成する可能性が明らかにされる。ここでは，計算の対象である文字が，ある与えられた集合に属する数をあらわすものや変数として用いられ，演算は普通の意味を持つ。

第４水準　計算対象としての具体的な性質や演算の具体的意味が捨象され，あらゆる解釈をぬきにして抽象的演繹的体系としての代数学が構成される。いろいろな代数の可能性がとらえれる。

このことからも，前述の思考水準の定義は，おおむね的を得ているように思われる，と大谷先生か

らご指摘をいただいた。そこで本校数学科では,「数と式」領域における思考水準を上記（2）のように定義し，それを作業仮説として研究をすすめることにした。

(3) 「数量関係」

関数の領域について中学生の関数に関する発達段階の作業仮説も検討してみた。

① 中学校1年生

・離散量と連続量の違いを十分に把握できない。
・具体的な事象の中から対応関係を見つけることに興味をもつ。
・表やグラフから２つの変数の数量関係やその特徴を読み取ろうとする。
・変域を負の数まで拡張して事象をとらえられる。
・まだ十分に式のみで関数関係をとらえられない。

② 中学校2年生

・離散量と連続量の違いを把握できる。
・対応関係としての関数の定義について理解できる。
・２つの変数の数量関係を式で表そうとする。
・一次の関数関係を把握できる。
・変化の割合を具体的事象から考察できる。

③ 中学校3年生

・式で関数関係をとらえようとする。
・一般的な数の対応関係から関数を考察できる。
・変化の割合を一般的に考察できる。
・２次の関数関係を理解できる。

この作業仮説をもとに金沢大学の大谷先生からご指導頂き,「関数」領域における思考水準を次のように考えた。

第0水準 変化と対応について感覚的に理解する（伴って変化する数量を漠然ととらえる）（小４まで）

第1水準 変化と対応について成り立つ諸性質（属性）を見出す（比例であれば「一方が○倍になるとそれに伴って他方も○倍になる」など)。一般的な関数でなく，比例や反比例といった特定に関数の性質を知る。
具体的には実験・実測・操作活動などの体験的な方法を通じて，数表やグラフにより関係をとらえたり，変化の様子を具体的な事象によって考察できる。(小５から中１まで)

第2水準 特定の関数について局所的に論理的な系統化がなされる。変化と対応について成り立つ諸性質（属性）の中で定義（特性）（中学校の場合は式）が優先され，それに基づき関数他の属性を演繹的に導く。また，関数という一般的な用語を使う（その概念自体を考察の対象としない）具体的には関数関係を理解し，式によって一般的に関数をとらたり，変化の様子を一般的に考察できる。(中１から中３)

第3水準 関数の概念が理解でき，一段高い視点から関数族を考察する。(中３から高３)

第4水準 抽象的な関数空間（Banach, Hilbert 空間など）を考察する。(高３から大学生)

この関数に関する思考水準を要約すると次のようになる。

0水準　漠然とした全体的認識

1水準　個々の性質（属性）の集合

2水準　属性の局所的・論理的組織化（中学校の扱う対象）

3水準　関数の一般的概念

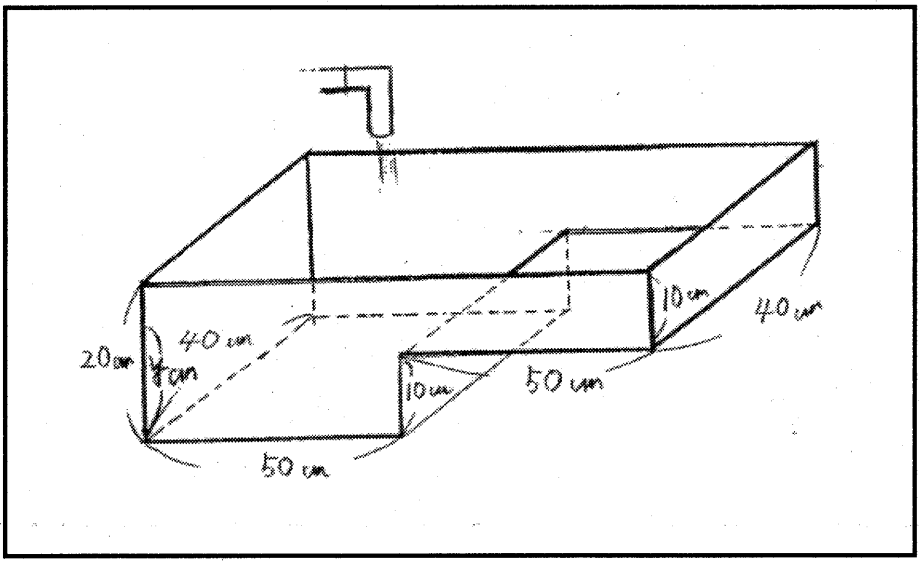
4水準　関数空間の概念

5．関数の思考水準の調査問題の結果（平成17年9月実施）

関数の思考水準から見た生徒の実態を調査し，思考水準が適正が検討してみた。

⑴　調査問題

次にように2段になった水そうがあります。ここに毎分4リットル（4000㎤）割合で満水にまるまで水を入れていきます。このとき，時間がたつにつれて水の深さはどのように変化しますか。



⑵　調査問題のねらい

・関数関係にある2つの量をどのような方法でとらえ，表現するか。

・途中から変化の割合が変わる場合，関数関係をどのようにとらえるか。

⑶　調査問題の結果

1年生

①　解決方法

・表を用いて考察（39％）

・グラフを用いて考察（22％）

・文章と計算式のみで考察（33％）

・無回答など（6％）

②　答えとしては

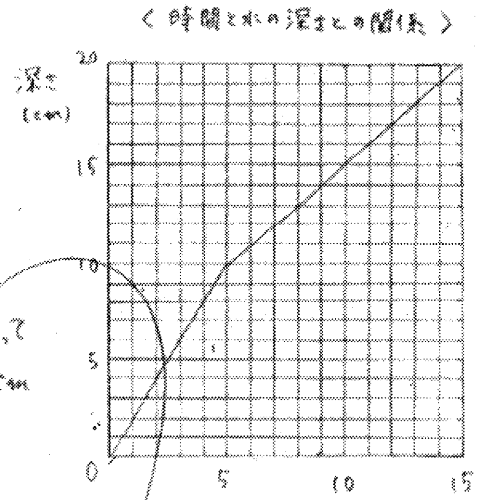
・時間がたつと水の深さは深くなる。（6％）

・途中から水の深さが深くなると速さが遅くなる。（11％）

・水の深さははじめは1分間に2㎝ずつ増え，5分後からは1㎝ずつ増える。(30%)
・15分間で満水になる。(35%)
・比例　　　　　　　　(4%)
・無回答や誤答　　　　(14%)

③　解答例

5分たつまでは、
毎分この水槽に水は
深さ2cmずつという
風にたまって行く。
5分後からは、毎分たまって
行く水が$\frac{1}{2}$になり、1cm
ずつとなる。
合わせて、15分後には
満水の状態である。



〜5分：深さ＝2×時間
5分〜：深さ＝1×時間

時間(分)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
深さ(cm)	2	4	6	8	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

この生徒は表とグラフを用いて関係を調べようとしている，その結果5分後水の深さは毎分2㎝たまっていき，5分後から毎分1㎝ずつたまっていき，15分後には満水になると答えている。これまでの学習を十分に身につけている。数表やグラフにより関係をとらえたり，変化の様子を具体的な事象によって考察できているので第1水準の思考である。しかし，第5分後までは比例しているととらえられていない。これは5分後から水の深さの変化の割合が変わるために全体として比例していると考えられなっかたように思う。まだ，第2水準にいたっていない。

④　1年生の調査結果から

中学1年生のまだ関数について学習を行っていない時期の調査である。このため，6割の生徒が対応表やグラフを用いて時間と水の深さの関係を考察している。その反面，文字式で考察したり表現する生徒はいなかった。当然予想された結果である。しかし，文字式については学習しているので文字で関係を表す生徒が少しはいてもよいような気もするが，この段階では式を用いて変化と対応の関係を表現するという思考水準にはまだ達していないということであろう。時間と水の深さの関係については「時間がたつと水の深さは深くなる。」「途中から水の深さが深くなると速さが遅くなる」といった感覚的にとらえた答えも多くあった。また，表やグラフから具体的に「水の深さは

はじめは1分間に2㎝ずつ増え，5分後からは1㎝ずつ増える。」「15分で満水になる。」など数量的に考察できた生徒もいた。途中から水の深さの増え方が変わることは表やグラフ，文章表現でとらえられている。しかし，0分から5分までは時間と水の深さが比例しているととらえられていない。時間の変化にともなって水の深さが一定の割合で変化することは理解している。つまり，変化と対応について成り立つ諸性質を見出すことはできている。これらのことから中学の関数の未習の1年生の9月段階では，式で変化する数量の関係を表すという段階まで思考水準が高まっていない。ほとんどすべての生徒が第1水準に留まっていると考えられる。

2年生

① 解決方法

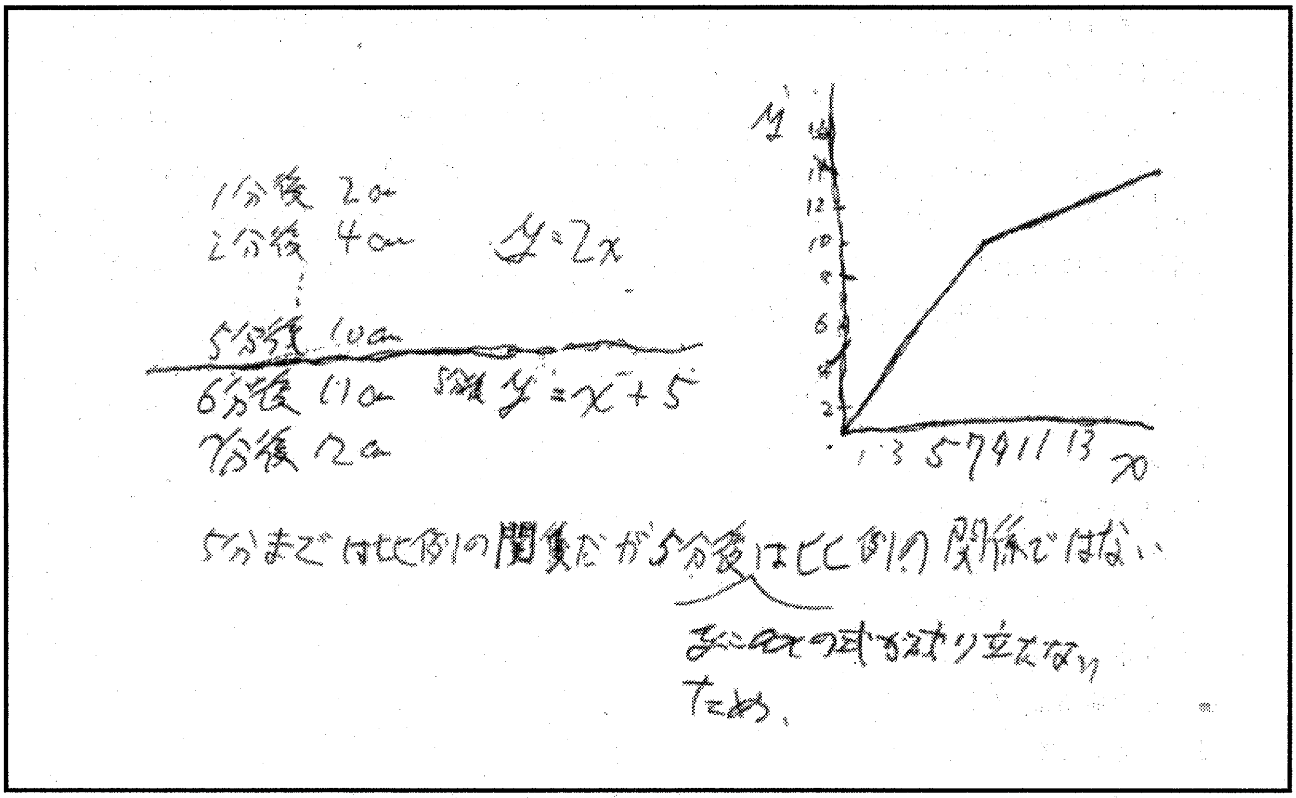
・式のみで考察（62%）
・表と式で考察（15%）
・グラフと式で考察（5%）
・文章で考察（8%）
・その他13%（無回答など）

② 答えとして

・$y=2x$（$0\leqq x\leqq 5$），$y=x+5$（$5\leqq x\leqq 15$）まで（23%）
・$y=2x$まで正解で$5\leqq x\leqq 15$は一次関数ととらえているが式が間違っている（7%）
・$y=x+5$のみ（7%）
・$y=2x$まで求めている。（15%）
・表のみが正しいが式ができない（5%）
・水の深さははじめは1分間に2㎝ずつ増え，5分後からは1㎝ずつ増える（5%）
・式を作っているが間違っている。（20%）
・無回答など（18%）

③ 解答例

次の図のように答えている生徒はグラフと未完成ながら表で2つの変数の関係を調べようとしている。また，表とグラフから 時間xと水の深さyの関係を5分までは$y=2x$と表し比例関係ととらえている。5分後は$y=x+5$との関係式を作り$y=ax$が成り立たないので比例ではないと認識している。1次関数を学んだばかりなので5分後が一次関数とはまだ，認識していないようである。一般的な関数でなく，比例という関数の性質を知り2つの変数が比例関係にあるかないか判断している。また，変化と対応について成り立つ諸性質の中で表やグラフを利用しながら式による関係を把握している。この生徒は第2水準に移行しつつあると思われる。



④　2年生の調査結果から

約8割の生徒が関係を式で表現してしようとしている。また，文章表現したり，表・グラフで考察しようとする生徒もいるが少なくなっている。これまでの文字式の学習や1年生の関数の学習を通じて，式によって一般的に関数をとらたり，変化の様子を一般的に考察できる思考水準に移行しつつあると考えられる。ただ，一次関数を学習し始めたばかりでの調査である。また，変域によって比例から1次関数へ変わることは明確にとらえられている生徒は3割程度に留まっている。全体としてはかなりの生徒が第1水準から第2水準に移行しつつあると考えられる。

3年生

①　解決方法

・式のみで考察（77%）

・グラフと式で考察（3%）

・表で考察（0%）

・文章で考察（9%）

・その他無回答など（11%）

②　答えとして

・$y=2x$（$0 \leqq x \leqq 5$），$y=x+5$（$5 \leqq x \leqq 15$）まで（25%）

・$y=2x$まで正解で$5 \leqq x \leqq 15$は一次関数ととらえているが式が間違っている（28%）

・式が間違っている（16%）

・はじめは比例で途中から一次関数（8%）

・はじめは比例（3%）

・水の深さははじめは1分間に2㎝ずつ増え，5分後からは1㎝ずつ増える（7%）

・その他（無回答など13%）

③　解答例

$0 \leqq x \leqq 5$　$\underline{y = 2x}$

$5 \leqq x \leqq 15$　$y = (x - 5) + 10 = x + 5$　$\therefore \underline{y = x + 5}$

上のような式になるので x が $0 \leqq x \leqq 5$ のとき y は x の関数で
また $y = ax$ の式で表されているので y は x に比例して
いる
$5 \leqq x \leqq 15$ のときは y は x の関数で y は x の一次関数
である

この生徒は変域に分けて（$0 \leqq x \leqq 5$）では $y = 2x$ が成り立つので比例しているととらえている。更に，$5 \leqq x \leqq 15$ では $y = x + 5$ 成り立つので一次関数であると把握している。変化と対応について成り立つ性質の中で定義としての式が優先されている。また，関数という用語で２つの変数の関係を説明している。これらのことから，この生徒は第２水準を十分に満たしているといえる。

④　３年生の調査結果から

８割の生徒が式で関数関係を表そうとしている。その反面，表やグラフで調べたり表現しようとする生徒はほとんどいない。また，「１分間に２㎝ずつ増え，5分後からは１㎝ずつ増える。」などと変化の様子の関係を答える生徒もあまりいない。比例や一次関数の関数関係を式で表せばよいと考えているようである。このことは，１，２年では表を書いて関係を調べようとしたり表から式を作ろうとした生徒もいたが，３年ではほとんどいないことからわかる。比例と一次関数になると予測して水槽の形状から体積の関係から１分間に増える水の深さを求めている生徒が多い。例えば，$0 \leqq x \leqq 5$ なら $4000 \div (50 \times 40) = 2$ ㎝などと求めて $y = 2x$ の式を求め，$5 \leqq x \leqq 15$ では $4000 \div (1000 \times 40) = 1$ ㎝それから $y = x + b$ などに $x = 5$，$y = 10$ を代入して切片５を求め $y = x + 5$ を立式している。

また誤答も含めて６割以上の生徒がはじめは比例で５分後から一次関数であるととらえている。これは多数の生徒が関数関係を理解し，式によって一般的に関数をとらたりする段階つまり，変化と対応について成り立つ諸性質の中で定義（式）が優先されているという第２水準にあると言える。

参考文献

ファン・ヒーレ夫妻（van Hiele, P. M. & van Hiele Geldof）　ファン・ヒーレの思考水準論

5．問題解決的授業

問題解決的授業は先行研究により様々な様式が提案されているが，本校では次の４つの場面を問題解決の場面と考えて授業実践していくこととした。４つについて具体的な例を上げたい。

①身の回りの事象による問題解決

②新しい知識の獲得の場面

新しい数　負の数や平方根の導入や新しい数の計算

③方程式の文章題などの文章題

④問題づくりによる問題解決

(1)　身の回りの事象についての問題解決

事例　中学校２学年　単元「式の計算」

課題

インターネットで，アメリカニューヨーク州のブルックリンの現在の気温を調べると，58° であった。これはどういうことか。

①　生徒の反応

・暑すぎる

・そんなはずはない

・単位が違うのではないか

②　教師の働きかけ

・アメリカでは°Fがよく使われる。日本では℃。°Fと℃の関係は？

③　生徒の予想（ここはまだ数学的な思考ではない）

・58° から体温の36° を引いて22° ではないか

④　教師の支援１（ここからが数学的な思考を用いた問題解決の場面）

・５Ｆ＝９Ｃ＋160　という関係があることを知らせる

⑤　生徒の活動１

・Ｆ＝58を代入して方程式を作り，Ｃを求める

⑥　教師の支援２（問題提示）

毎回Ｆに値を代入してＣを求めるのは面倒くさくないか

⑦　生徒の活動２

１Ｆを求めておけばよい

⑧　教師の支援３

実際にやってみてうまくいかないことを知らせる

⑨　生徒の活動３

Ｃを求める公式を作ることはできないか

等式の性質を使って，Ｃ＝の形にできるのではないか

<発達段階に関する考察>

中２はより抽象的な思考ができるようになる学年である。

⑦の生徒の思考は，関数の感覚を使った解決方法であるが，代数的な解決方法ではない。

比例の考え方を使っているが，１次関数を知らない生徒にとっては，なぜうまくいかないのか理解できないであろう。

⑨について，「等式の変形」という第２学年で習う新しい手法を用いての解決方法となる。

これは，未知数が２つ以上ある等式において，ある１つの未知数について，他の未知数をそのまま残した形で方程式を解くということが必要になる。

「数」に用いた操作を「文字式」に拡張して用いることができることが必要となり，第２学年の発達段階に応じた問題解決の場面であるといえよう

＜問題解決力を伸ばすために＞

これらの力を伸ばすために，次の２点について指導を行ってきた。

①方程式を機械的に解く力を伸ばすために，１学年10月頃から，毎時間授業の最初５分間を使って，簡単な方程式を解く小テストを実施した。

②２学年に入ってから，多項式の計算の授業で「ある式を求めようシリーズ」としてスペシャル問題を授業の終わりにいくつか提示してきた。

スペシャル問題の例

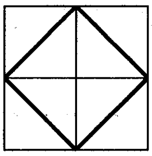
ある式の２倍に$x-2y+1$を足すと$3x+4y-5$になった。ある式を求めなさい。

これは，求めたい多項式自体を大きな未知数として扱い，他の多項式も１つのまとまった式として，それごと移項するというような考え方が必要となる。多項式を数と同じように扱って，方程式を解くように答えを求めるといった点で，より抽象的な思考力が要求される。

(2) 新しい知識獲得の場面での問題解決

事例　中学校３学年　単元「平方根」

課題



面積２の正方形の１辺の長さはどうなるか。（どう表したらよいか）

① 生徒の反応

・簡単簡単…２の半分で１…じゃないし，じゃあ1.5？ でもないよなあ…あれ？

・そんな数ないよ

・定規で測ったら1.4くらいなんだけどなあ

② 教師の支援１

・整数とは限らない。小数や分数かもしれないよ

③ 生徒の活動１

・小数は無理っぽい。わりきれなさそう。分数？ でも結局約分できないといけないから，無理

・実際にはそんな数ないんじゃない？

④ 教師の支援２

・きっちりとした小数や分数ではないようだね。でも実際にない数なのかな？
きっちりとした小数ではないけど，実際にある数って今までに習わなかった？

⑤　生徒の活動２

・あっ！π！じゃあ，πみたいになんか文字で表せばいいんじゃない？　αとか

⑥　教師の支援３（解答提示）

αにすると，面積３，面積４，…で正方形はたくさんあるから文字が足りなくなっちゃう

そこで，面積２の正方形の１辺の長さは$\sqrt{\ }$という記号を使って$\sqrt{2}$と表すんだ

<発達段階に関する考察>

中３は，定理や定義を使って論理的な思考ができるようになりつつあるが，まだ自分で定義から１つの論理体系を作り出せる力はない。自分で１つの論理体系を作ることができるためには，中３での発達段階に加え，様々な知識と経験が必要であると思われる。生徒が⑤の思考まで到達できれば十分であると考えられる。すなわち，今までの知識では表せない数なので，新しい数として定義する，という思考である。これが中３生徒の発達段階と知識に応じた問題解決の，教師が求める到達点である。

<問題解決力を伸ばすために>

面積が２の正方形を生徒に描かせ，実際ある１辺の長さが整数や小数で表せないことを体験させる。

ここにこの問題を解決しなければならない必要感が生まれる。問題の把握から解決の意欲が生まれる。この段階で平方根の定義は教師から与える必要がある。面積が２の正方形だけでは不十分なので面積が５の正方形などいくつかの面積の正方形にも取り組ませ平方根を一般化できるように配慮する。これまで学んできた数と平方根という新しい数が同じ数体系にあると把握し，数に関する知識の再構成ができるかが中３での課題として残る。

(3)　方程式を利用した文章題の問題解決

中学校１学年　単元「方程式の利用」

課題

「一郎君は家から５㎞離れた学校まで自転車で25分かかって毎日通学している。ある朝，途中で自転車が故障したために故障した所から自転車を引きながら時速３㎞で歩いた。それでいつもより18分遅れて学校に着いた。故障した地点は家から何ｍのところか。

①　生徒の反応

・ｘを決めて方程式で解こうとする

・速さ・時間・道のりの関係から計算で求めようする

・手がつかない

②　教師の支援

問題から分かっていること整理してみよう

③　生徒の活動

・家から学校までの道のりが５㎞でいつも25分かかる

・自転車故障してからは時速３㎞の速さ

・いつもより18分遅かった。つまり，25分＋18分で43分かかった

④　教師の支援

・方程式を利用して解いてみよう。何をｘにしたらよいだろうか

⑤　生徒の反応

・家から故障した所までの道のりを x km

・故障した所から学校までの道のりを x km

・毎日の自転車の速さ・・・他の生徒から 5 km ÷25分で求められる

・家から故障した所までの時間を x 分

⑥　教師の支援

・家から故障した所までの道のりを x kmとしたとき，時間・速さ・道のりを表にして整理してみよう
表を参考に方程式を作ってみよう

＜発達段階に関する考察＞

中１は法則を具体的な事象に照らして一般的に成り立つことを説明できる段階に入る時期である。

方程式は具体的な事象から離れて形式的な操作で問題を解決していくことを学ぶ教材である。ただ，文章題を解く場合は具体的な数値計算にとどまろうとする生徒と方程式を利用した形式的操作による解決のよさを理解し活用して行こうとする生徒が混在している。

＜問題解決力を伸ばすために＞

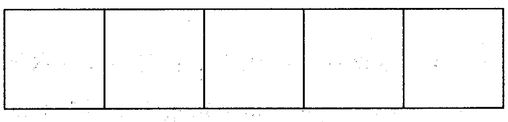
はじめは易しい問題で方程式を利用して問題を解決する手順を学習する。この課題では数値計算による解決はやや難しいので，方程式で解決できれば，方程式で解決する必要感がでてくると思う。そのために問題の条件を整理する。求めるものや分からない数量を文字で表す。更に，表や図で数量関係を把握して方程式をつくり解く。この過程を通じて繰り返し問題を解決することでで問題解決力も大きく伸びると思われる。

(4)　問題づくりよる問題解決

中学校１学年　単元「文字と式」

課題

「マッチ棒を並べて正方形を n 個作るとき，マッチ棒は何本必要か。」また，マッチ棒の並べ方を変えるとマッチ棒は何本必要になるか。



最初は正方形を15個並べたときの必要なマッチ棒の数を求める。

①　生徒の反応

・実際に図をかいたりして数える生徒もいる

・１個のとき４本，２個のとき７本，３個のとき10本と３本ずつ増えるので15個のときは
$4+3\times14=46$（本）

・初めは１本と考えて３本ずつ増えていくので $1+3\times15=46$（本）
同じように考えて n 個のときも $3n+1$（本）になる

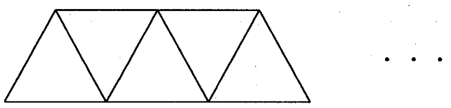
②　教師の働きかけ

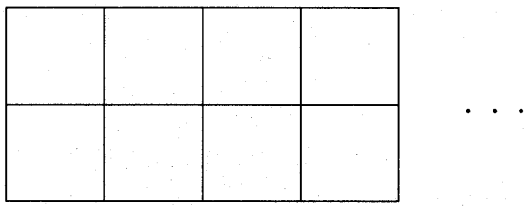
マッチ棒を規則的に並べてみよう。どんな並べ方があるだろうか

③　生徒の反応

正三角形に並べる。正多角形に並べる。正方形を２段，３段と並べる。規則的な模様を作る。

例えば





④　教師の支援

並べ方を分類して生徒に発表させる

⑤　生徒の活動

各自興味のある並べ方について正方形で数えた考え方を利用してマッチ棒が何本必要か考える

＜発達段階に関する考察＞

中１は法則を具体的な事象に照らして一般的に成り立つことを説明できる時期に入る時期である。

「マッチ棒を正方形の形に並べる」という基本課題についてまだ，マッチという具体物を利用しながら数えようとする生徒が少なからずいる。また，正方形の場合は１個のとき４本，２個のとき７本，３個のとき10本というようにマッチ棒が３本ずつ増えているとい規則性を見つけて一般化する生徒もいる。また，マッチという具体物を利用しながら３本ずつ増えているという規則を見つけて一般化する生徒もいる。

「マッチ棒の並べ方を変える」という発展課題については正方形から正三角形や正多角形になっても，正方形で見つけた規則性を用いて一般化し問題を解決しようとしている。

＜問題解決力を伸ばすために＞

この課題では「マッチ棒を正方形の形に並べたときのマッチ棒の本数を一般化する」という基本課題から「マッチ棒の並べ方を変えたときのマッチ棒の本数を求める」という発展課題を追求する授業である。

本校の問題解決で重視している「問題の把握・形成」「知識の統合・再構成」「表現（論理的組織化)」の面を考えてみる。まず，マッチ棒の並べ方を変えることで生徒が自分の力で問題を形成する経験を積むことになる。このことで問題を意識化し問題解決の意欲を高めることになると思う。また，「知識の統合・再構成」の面では正方形も多角形もマッチ棒の増え方に注目すると同じようにマッチ棒の本数を一般化できることから正方形の求め方と他の多角形の求め方を統合して考えられるようになる。

これは正方形を段数を増やしても同じである。このことから正方形ではマッチ棒の本数は３ｎ＋１，ｍ角形では（ｍ－１）ｎ＋１というように一般的に表現できることを学ぶことになる。

Ⅱ．実践例

1．中学校２年選択　単元「立体の切断」

身の回りの事象における問題解決による事例

⑴　問題設定

これまで，立方体の切断について見取図を用いて指導をすると，たとえば，図１で△ ABC は直角三角形であるという間違いをする生徒や図２で３点 A，B，C を通るような立方体の切り口は△ ABC であるという間違いをする生徒が必ず出てきた。

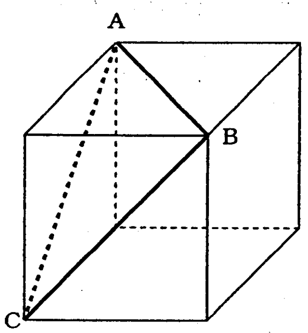


図１

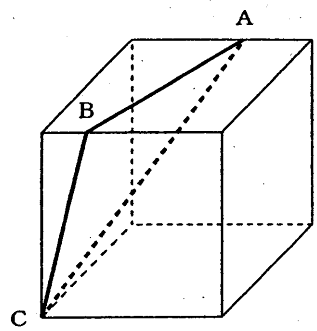


図２

これらの間違いはよく「生徒の錯覚」とよばれている。

⑵　発達段階についての考察

図形の類同認知（いろいろな向きに置いてある似たような図形が同じ図形かどうかを判断する）について研究している発達心理学者の田中敏隆によれば，

「幼児から七－八歳の小学二年生頃までは，対象物を直観的，知覚的にとらえる特性をもっている。見たまま，思考ぬきでとらえる，ということです。

（中略）

ところが，八－九歳の小学三年生頃になると，操作的，思考的に空間の対象をとらえる特性が出現する。」と述べている。（田中，2002）

さらに，類同認知の実験全般に関して，

「幼児でも与えられる問題の内容によっては，成人のように客観的に解決できる者もいる。反面，成人においても与えられる問題の内容によっては，幼児的な主観的把握しかできない者もいる。ただ幼児では，主観と客観の二重性格において，主観的特性の占める比重が大きく，これに対して成人では，客観的特性の占める比重が大きいところに，幼児と成人の知的機能に差異がみられる。」と述べている。（田中，1991）

これらは，平面図形における類同認知に関する記述であるが，空間内の図形を見取図で与えた時に正しくとらえられるかどうかについて述べている文章とも読み取れる。

この文章から，誰でも最初は見取図を間違ってとらえる可能性があることや，個人差があることが読み取れる。

(3) 問題解決力をのばすために

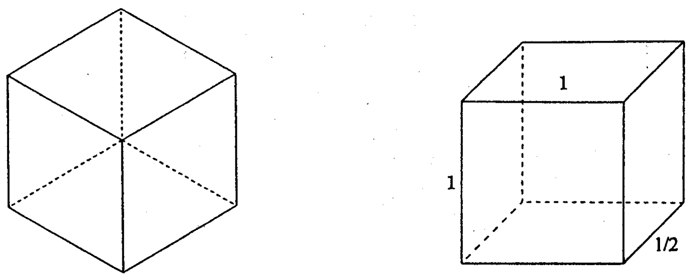
① 見取図の扱いについて

立体の切断の問題において，実物模型を用意しない場合の出題や説明は見取図を用いて行われる。そこで，見取図について教科書ではどのように書かれているかについて，各社教科書を調査した。その結果，小学校算数教科書において，見取図の書き方は指導されているのだが，その指導は立体の概形をとらえるという立場がとられていることがわかった。

また，中学校数学教科書において，見取図は投影図と定義されているわけではないことがわかった。

一方，中学校の技術・家庭科（技術分野）では投影図を指導している。教科書では，等角図とキャビネット図が指導されている。

（図３）



立方体の等角図　　　立方体のキャビネット図

図３

しかし，技術科において投影図の指導は設計図のためであり，数学で行われているような空間図形の性質の分析のためではない。このため，生徒からは立体を斜めに平面で切ったら切り口はどうなるか，という問題に投影図を分析的に利用する，という発想は出てこないように思われる。

また，生徒は技術科で投影図の書き方について学んでいるとはいえ，数学の授業において切断の説明に使われている見取図が平行投影図であることは必ずしも認識していない。

これらのことから，中学校数学の見取図を使う授業においては，最初から見取図が平行投影図であることを前提として議論するのでなく，実物模型を使って辺の長さや角の大きさが視点の位置によって変わることなどに気づかせていく指導が適当と考えられる。

② 方眼の利用

最初にあげた，いわゆる錯覚といわれる間違いをへらすための方策として，見取図および立体模型の表面に方眼を書くことにした。

方眼を入れることが，実際には等しい長さの線分が見取図上では置かれている面によって違う長さの線分として表されることや，空間内での平面図形の形や角度が見取図上では視点の位置によって変わることの理解の補助となると考えた。

③ 指導学年および授業の位置づけの変更

これまで立体の切断は空間図形の内容であるということから，指導の時期は中学１年に限定されてきた。

一方，現在中学２年生に空間図形の教材がない。このため，３年になって三平方の定理の応用として直方体の対角線の長さを求める問題などで見取図の読み方がまだできていない生徒が出てくる

などの現象がある。

そこで，中学２年生にちょうどあてはまる位置づけで立体の切断という空間図形の教材を入れることによって，中学１年と３年をつなぐことができないかと考え，２年の平面図形の論証の導入の場面での指導を試みることにした。

中学１年より論理的に考える力がついた時期であり，より積極的に問題に取り組もうとする姿勢が見られるのでないかと思われる。

⑷　授業の実際

①　実施年月　2005年６月

②　対象生徒　附属中学校２年選択11名

③　指導のねらい

・実際の立体を操作しながら，与えられた条件から切り口をイメージする力をつける

・見取図を見て，与えられた条件から切り口をイメージする力をつける

・論理的に考える力をつける

④　実験授業の実際の流れ

ア　見取図で予想を立てる

問題プリントを配付し，まず，見取図だけで切り口の形を予想させる。（資料１）

イ　立体模型を作り，切れ目を入れて，残りの切れ目を予想させる

１辺４センチの立方体の実物模型を作らせ，実際にカッターで条件に合う切れ目を入れ，アクリル板をさし入れて，実物模型で切り口の形を予想させる。

ウ　予想を立てた切れ目を実際に切ってみる

エ　アクリル板を用いて，切り口が平面上にあることと，切り口の形を確認する

⑤　分析と考察

ア　見取図で予想を立てる

出題の見取図は斜投影図とし，不透明で方眼を入れたものイと，透明なものアの２種類の図を与えた。

まず，不透明で方眼を入れたイ図であるが，これは，1つの方眼が正面，右側面，上面で形が変わって見えることを知らせるためである。

さらに，現実に近づけることで，視点を移動して見る（あるいは立体を手に持って回転させる）イメージがわきやすいようにするという意図も持っている。

次に，透明なア図であるが，これは思考実験で切り口の形を考えやすいようにしたものである。

イア２種類の図を同時に与えることによって，全体を見る見方と辺の長さを分析的に見る見方の両方の見方ができるようにした。

この２種類の図の横に等角図の立方体の見取図を２種類用意した。不透明で方眼を入れてあるウ図と透明なエ図である。

これらの図は，出題図の正面の位置を変えたもので，思考実験に使えるようにしたものである。

４種類の見取図を用意することによって，立体の見取図と切り口の平面図形を関連させながら見ることを意識させ，さらには見取図だけから切り口の形をイメージする力をつけることをねらった。

授業では，必要に応じて，ウ図やエ図に自分で切り口の線分を書き込み，利用するように伝えた。

実際の授業では問題(1)(2)については，ウ図やエ図に自分で切り口の線分を書き込むことによって，ほとんどの生徒が見取図だけで正解を出していた。

イ　立体模型を作り，切れ目を入れて，残りの切れ目を予想させる

工作用紙を準備し，1辺4センチの正方形を6枚用意させた。次にその6枚をセロハンテープで留め，立方体を作らせた。

そのあと，問題プリントの条件にあうように線分を引かせ，カッターで切れ目を入れさせた。

アクリル板を切れ目のところまでさし入れ，その段階でさらに予想を立てさせた。

三角形ではこの段階で形がわかるが，四角形ではまだ形がわからないので，さらに予想を立てさせた。

その際，思考が停止している生徒に対して方眼を用いて考えられないかというヒントを出した。その結果方眼を数えることが正しい切り口の予想のヒントとなった。

この段階で問題(1)(2)(3)(6)については全員が正しい切れ目を予想していた。問題(6)について生徒は対称性も使って切れ目を考えたものと思われる。

問題(4)(5)についてはすぐには正しい切れ目の線を予想できない生徒も多かった。そこで，立方体を目の高さまで持ち上げてみるなど，いろいろな視点から見てみることをヒントとして与えたところ，ほぼ全員の生徒が正しい切れ目の線を予想した。

ウ　予想を立てた切れ目を実際に切ってみる

エ　アクリル板を用いて，切り口が1つの平面上にあることと，切り口の形を確認する

全員が正しい切れ目を入れていたので，1平面上にないような図形はなかった。

問題(1)(2)(3)(6)に関しては全員切り口の形は正解をえていた。

しかし問題(4)(5)に関しては切り口の形が平行四辺形かひし形か，実験でははっきりしない生徒もいた。今回は答を保留にしておいた。

これは，平面図形の論証を正式に学習中，あるいは学習した後，各自が再度考えることができるようにしておくためである。

(5)　まとめと今後の課題

立体の切断は小学校における直観的な思考と中学校における論理的な思考をつなぐ教材であると見ることができる。さらに，これまで漠然としか見てこなかった見取図の見方について学習する機会ととらえることもできる。

しかし，内容的に中学1年生には難しい。

そこで，中学2年生を対象にして，立方体の切断を選択授業として行った。

その結果次のことがわかった。

①方眼は有効に機能した。見取図上でも実物模型においても考える手がかりになっていた。

②各自が見取図から予想を立てた後，実際に自分で切り口の図形を作ったので，予想が確かめられた。実物模型を用意したので，見取図の見えによる錯覚を解消することができ，実物模型を利用しての学習の有効性が明らかになった。

③なぜ，その形ができるかの理由の説明を保留にし，各自で考えさせることにしたので，単元全体を

通しての課題となり，持続的に関心を持たせることができたと思われる。

今後，平面図形の論証を学習した後の授業展開について検討していきたい。その中では，今回は取り上げなかった，切り口が五角形や六角形になる場合についてふれる予定である。

なお，どの段階で方眼を取るのがよいかも今後の検討課題である。

また，見取図をどう指導していくかを探るために，見取図による思考と実物模型による思考との関係を考える必要がある。

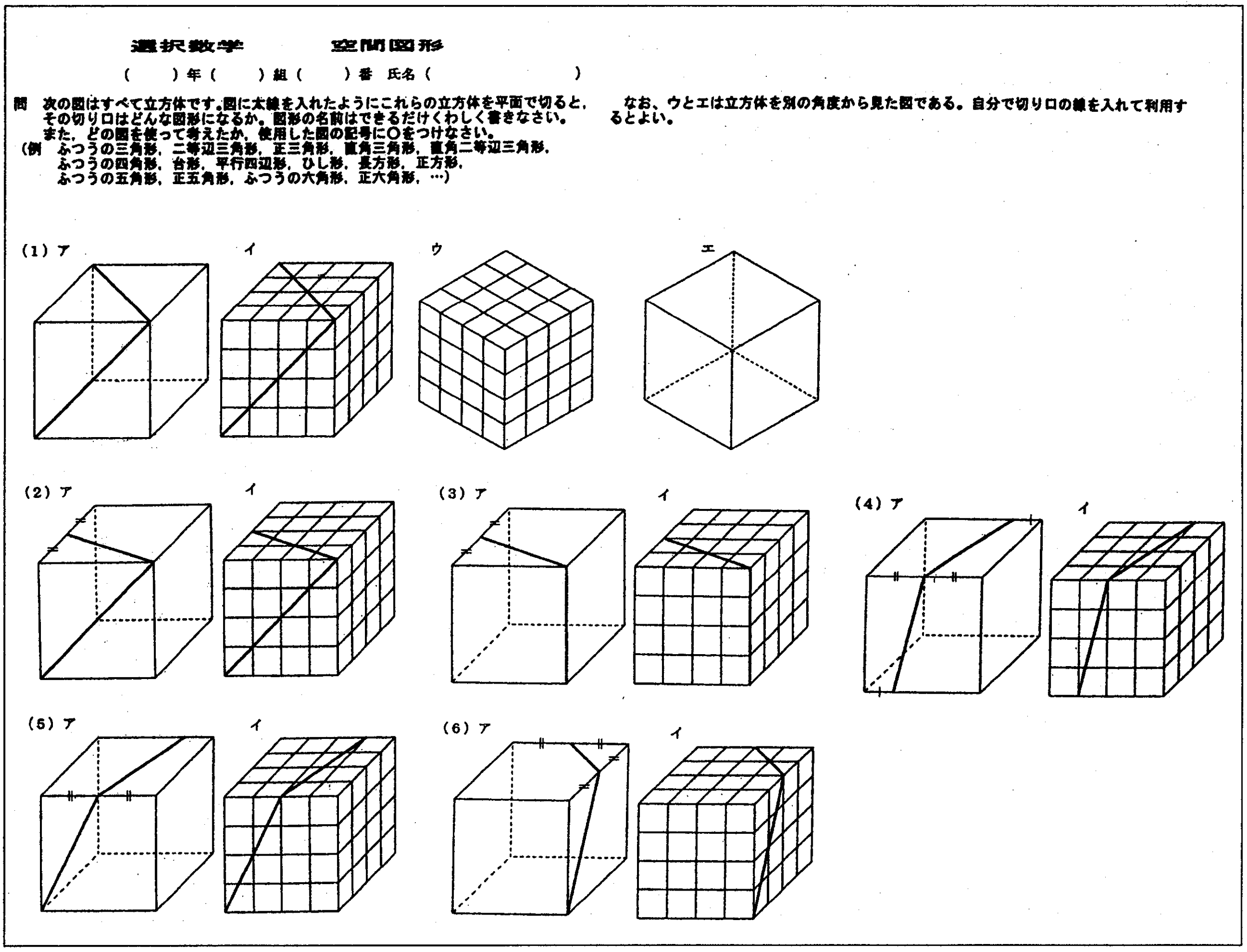
注　切り口が四角形となる立方体の切断においては，与えられた3点で平面が決まるので，4つ目の頂点の位置は必然的に決まってくる。このため，立体模型上のすべての面に方眼を書く必要はない。切り口の直線が後から書かれる面の方眼は4つ目の頂点の位置を考える目安として書いておくことにした。

参考文献

田中敏隆，2002,『子供の認知はどう発達するのか』金子書房　pp. 67

田中敏隆，1991,『認知の実験発達心理学－図形と文字を中心にして』中央法規出版　pp. 147－148

資料プリント



選択数学　　空間図形

(　　)年(　　)組(　　)番　氏名(　　　　　　)

問　次の図はすべて立方体です。図に太線を入れたようにこれらの立方体を平面で切ると，その切り口はどんな図形になるか。図形の名前はできるだけくわしく書きなさい。
また，どの図を使って考えたか，使用した図の記号に○をつけなさい。
(例　ふつうの三角形，二等辺三角形，正三角形，直角三角形，直角二等辺三角形，
ふつうの四角形，台形，平行四辺形，ひし形，長方形，正方形，
ふつうの五角形，正五角形，ふつうの六角形，正六角形，…)

なお、ウとエは立方体を別の角度から見た図である。自分で切り口の線を入れて利用するとよい。

2．2年生の必修授業における事例

(1) 実践のあらまし

① 単元「連立方程式」

② 題目「お店屋さんにある品物の値段をあてよう」(連立方程式の文章問題の導入)

③ 問題解決場面

方程式の文章題・身の回りの事象を方程式を用いて解決する場面

④ 授業の流れ（総時数　2時間）

ア 店側と客側に分かれてのロールプレイ

イ 店側は品物の値段を設定

（例）みかん1個30円　りんご1個70円　バナナ1本20円

ウ お客側が，品物の値段を当てる活動<問題解決場面>

ルール　・客はお店の中の2つのものを選んで，その値段を当てる。

・品物単独の値段を聞いてはならない。

（だめな例）みかん1個買うといくらですか？　りんご10個でいくらですか？

・できるだけ少ない条件で品物の値段を当てる。

エ 条件から品物の値段を当てる。

オ いろいろな条件を試してみる。

カ 時間があれば，3つの品物を同時に当てる条件を考える。

キ 客側と店側が交代して1～6を繰り返す

ク 条件の発表会（班ごとに優れた条件，またはおもしろい条件を発表し，評価しあう）

ケ 時間があれば問題作り

(2) 発達段階についての考察

中学校2年生の思考水準は，第1段階（操作的な活動をともないながら，具体的な事象を数学的に考察できる）から第2段階（具体的な事象に照らして一般的・抽象的に事象を考察できる）への移行期であると考えられる。生徒が文章問題を方程式を用いて解くには，具体的事象を示した文章を抽象化した式で表すことができないといけない。そのために「連立方程式の利用」の導入で，上記のように買い物の場面を想定した疑似具体物を用いたロール・プレイを行うこととした。操作的な活動を行いながら具体物を通して数学的に思考していくことが，抽象的な思考に結びついていく第1歩であると考えた。また，グループ学習を取り入れて，班員と相談しながら学習をすすめていくことで，より高い思考水準へ高め合うことができるのではないかと考えた。

(3) 問題解決力をのばすために

文章から方程式を作ることができても，その方程式を解くことができなければ，最終的に問題を解決することができない。方程式さえ作れば，求めたいものが求まるという安心感もまた，生徒が方程式を作る意欲につながり，総合的な問題解決力に結びつくと考えた。そこで，生徒の意欲や学習の状況に応じて計算練習をすすめることができるよう，小テストＢＯＸを設置し，いつでも好きなときに連立方程式の計算練習に取り組めるようにした。取り組んだ小テストは採点ＢＯＸに入れると教師が採点して返すシステムになっており，1枚につき2問の小テストは，自動作問システムによりすべて問

題が違うようにした。生徒は友達の小テストの答えをうつすことができず，それが問題を自分の力で解く練習につながると考えた。

(4) まとめと考察

① 森敏昭先生の理論との関係

今回の実践には，森先生に教えていただいた3色の糸も織り交ぜてみた。多くの生徒が意欲的に授業に参加し，活発な意見交換を行った。

赤い糸 ＝ ロールプレイに入っていける雰囲気作り
レジや果物などの具体物を作ったこと，活動時間を開店時間などと声かけをすること

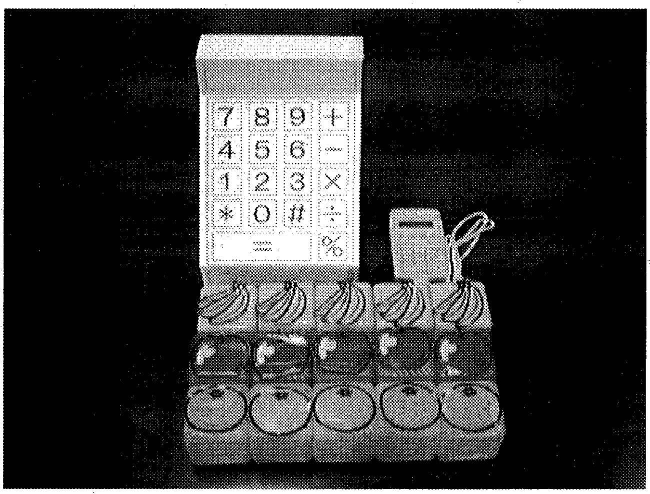
青い糸 ＝ 未知数と条件数の関係を知る
未知数の数だけ条件を与えると，未知数の値はただ1組に定まることの発見

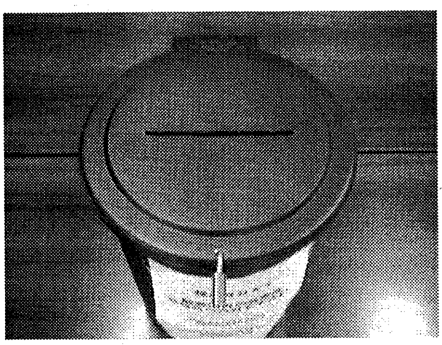
黄色い糸 ＝ グループ活動や発表での意見交換
友達の意見を聞いて，条件の決め方を話し合い，よりよい方法や，自分では考えつかなかった条件を知る

② 生徒の様子から

今回の実践を終えて，多くの生徒の学習意欲が向上した。特に思考水準が第1段階にある生徒にとって効果があったようだ。それらの生徒は，単元テストの結果が40点から60点も伸びた。小テストで計算力がつき，操作活動を伴いながら，身近な問題を方程式を用いて解決できたことが自信となり，それがそのまま学習意欲につながったのではないかと考えられる。問題解決力の育成には，発達段階に応じた適度な課題と適度な授業形態，問題解決に必要な様々な力の育成（ドリルによる計算力の定着など）が必要であると感じた。

【資料1】授業で用いた買い物セット，小テストボックス，実際の小テスト





連立方程式　小テスト№9077　　[　　]点

2年　組　番　氏名（　　　　）　月　日

(1) $\begin{cases} 4x - 5y = 12 \\ -8x - 7y = 112 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} 2x + 2y = 2 \\ -9x + 2y = 13 \end{cases}$

【資料２】授業で生徒がまとめたプリント

果物の値段をあてよう！③

2年　　組　　番　氏名（　　　　　　　　　）

みんなが発表した質問について，それぞれの質問のいいところを考えてみよう。

（ 1 ）班

①みかん2個とりんご3個でいくらですか。
②みかん4個とりんご2個でいくらですか。
みかんx円，りんごy円とすると、

$$\begin{cases}2x+3y=250\\4x+2y=300\end{cases}$$

工夫しているところ

（みかんとりんごの個数を変えて質問することによって、連立方程式を作って値段が求められる。）

（ 2 ）班

①みかん1個の値段とりんご1個の値段の合計はいくらですか。
②りんご1個の値段からみかん1個の値段を引くといくらになりますか。
みかん1個x円，りんご1個y円とすると、

$$\begin{cases}x+y=150\\y-x=90\end{cases}$$

工夫しているところ

（・最も簡単な数で質問して、すぐに値段が求められるようにした。
・同じ数でも和と差を質問することによって連立方程式が作れる。）

（ 3 ）班

①バナナ2房とりんご2個で何円ですか。
②バナナ1房とりんご2個で何円ですか。
バナナx円，りんごy円とすると、

$$\begin{cases}2x+2y=1520\\x+2y=1160\end{cases}$$

工夫しているところ

（りんごの数を同じにすることによって、連立方程式にすると簡単にそれが消去できて、値段が求められる。）

（ 4 ）班

①みかん1個とバナナ1個でいくらですか。
②みかん2個とバナナ1個でいくらですか。
みかんx円，バナナy円とすると、

$$\begin{cases}x+y=\bigcirc\\2x+y=\bigcirc\end{cases}$$

工夫しているところ

（バナナの数を同じにすることによって、連立方程式にすると簡単にそれが消去できて、値段が求められる。）

（ 5 ）班

①みかん1個とバナナ1房でいくらですか。
②みかん2個とバナナ1房でいくらですか。
みかんx円，バナナy円とすると、

$$\begin{cases}x+y=400\\2x+y=530\end{cases}$$

工夫しているところ

（バナナの数を同じにすることによって、連立方程式にすると簡単にそれが消去できて、値段が求められる。）

（ 6 ）班

①みかん10000個，りんご100個，バナナ1個の値段はいくらですか。

(0)
○○○○○○○
みかん　りんご　バナナ

工夫しているところ

（10円単位の値段という条件があるので、Aを10000倍，Bを100倍，Cを1倍にすると7・6けたにAが，5・4けたにBが，3・2・1けたにCがでてきて、3つの値段が分かる。）

（ 7 ）班

①りんご・バナナ・みかん各1こずつ
②りんご・バナナ各1こずつ　みかん2こ
③りんご・みかん各1こずつ　バナナ2こ
④バナナ・みかん各1こずつ　りんご2こ
りんごx円，バナナy円，みかんz円とすると

$$\begin{cases}x+y+z=2890 & \cdots① \\ x+y+2z=2920 & \cdots② \\ x+2y+z=3760 & \cdots③ \\ 2x+y+z=4850 & \cdots④\end{cases}$$

②−①で
zが求まる。

工夫しているところ

（各1個ずつの値段の合計と、それにいずれか1個の値段を足した値段を質問することによって、足したものの値段を求めることができる。）

（ 8 ）班

①みかん2個とりんご5個の値段
②みかん1個とりんご5個の値段
みかんx円，りんごy円とすると、

$$\begin{cases}2x+5y=4580\\x+5y=3690\end{cases}$$

工夫しているところ

（りんごの数を同じにすることによって、連立方程式にすると簡単にそれが消去できて、値段が求められる。）

【資料３】授業の指導案

２年３組　数学科　学習指導案

平成１７年６月２１日（火）
第３限　２－３教室
指導者　戸水　吉信

１．単元　「連立方程式」

２．目標
・２元１次方程式に関心を持ち，手際よい解の求め方を見いだそうとする。
・連立方程式の解き方を，文字を１つ消去する点に着目して考察することができる。
・連立方程式を加減法や代入法で解くことができる。
・２元１次方程式，連立方程式やその解の意味を理解する。
・２つの分からない量を求めるには２つの条件を見いだして連立方程式を立てればよいことに気づき，問題の解決に連立方程式を用いようとする。
・連立方程式を用いて，いろいろな問題を解くことができる。
・連立方程式を用いて問題を解く手順を理解する。

３．評価の観点及び規準（指導計画第３次のものを抜粋。詳しくは別紙の評価規準表参照）
①関心・意欲・態度
連立２元１次方程式を利用することで問題解決が容易になるというよさに関心をもち，積極的に問題を解決しようとする。
②数学的な見方・考え方
具体的な事象の中の数量の関係をとらえ，連立２元１次方程式を用いて解を求めるとともに，解や解決の方法が適切であるかどうか振り返って考察することができる。
③数学的な表現・処理
連立２元１次方程式をつくったり，解を求めたりするとともに，その手順や解の適否を説明することができる。
④数量・図形などに対する知識・理解
連立２元１次方程式を利用して，問題を解決する手順を理解している。

４．指導にあたって
【教材観】
本校の今年度の研究は，「問題解決力」の育成を柱にあげている。数学科においては問題解決力の育成に必要な力として，主に「数学的思考力」をあげ，いろいろな問題解決の場面を場合分けし，生徒の発達段階に応じて「数学的思考力」を伸ばす指導のあり方について研究をすすめている。その場面の１つが「方程式を用いた問題解決」であり，２学年では「連立方程式」の単元が，「方程式を用いた問題解決」の場面にあたる。
連立方程式の利用は，生徒にとっては数学の文章問題としてとらえられており，生徒の中には最初から苦手意識を持っているものもいる。生徒が連立方程式を用いて問題を解決するためには，文章から２つの条件を探し出し，それを式化しなければならない上に，未知数が２つある方程式を解かなければならない。文章を文字式に置き換えたり，見通しを持って方程式をたてて解く力が身に付いていなければ，生徒が学習をすすめていく上で，はじめから困難を覚えるのは当然であろう。しかし，方程式を用いて問題を解決していくことは数学の学習においては必要不可欠であり，生徒個々の学習の状況に合わせて指導を重ねていくことは大切なことである。
そこで，次の２つの点に留意して教材を組み立て，指導にあたった。
１つは，生徒が加減法や代入法を用いて形式的に連立方程式を解くことができる力の育成である。２０問小テストを実施して生徒の計算力を把握し，個々の指導に役立てたり，生徒がいつでも連立方程式の問題に取り組めるように廊下に小テストボックス※1を設置して，生徒の計算力の向上に努めた。
もう１つは，生徒が文章から式を作ることができる力の育成である。そのために，本時の授業では，「連立方程式の利用」の導入として，買い物の場面を想定した疑似具体物を用いたロール・プレイを行うこととした。りんご，バナナ，みかんの中から２つのものを選び，２つの条件でそれらの値段を当てる活動である。思考水準※2が第１段階である生徒にとっては，操作的な活動を行いながら具体物を通して数学的に思考していくことが，抽象的な思考に結びついていく第１歩であると考えた。また，グループ学習を取り入れて，班員と相談しながら学習をすすめていくことで，より高い思考水準へ高め合うことができるのではないかと考えた。
※１　休み時間等に，連立方程式の問題を載せた小テストを自由に持って行けるボックス。小テスト回収ポストもあり，教師が採点して生徒に返すシステムになっている。
※２　本校数学科では，一昨年度から思考水準に関する研究を行っている。
第１段階は，操作的な活動をともないながら，具体的な事象を数学的に考察できる。
第２段階は，具体的な事象に照らして一般的・抽象的に事象を考察できる。
【生徒観】
中学校２年生の前半時期は，思考水準が第１段階から第２段階へ移行する時期であると考えている（数学科作業仮説）。ただし，生徒の思考水準の発達には個人差があり，それぞれの発達の段階に応じた教材を準備し，生徒個々に応じた指導を行わなければならない。具体的に操作できるものを用意し，生徒の思考の手助けとする一方，思考水準が第２段階に到達している生徒は，文章がすぐに抽象的な文字式の世界に直結し，頭の中で文字式を使った機械的な思考ができると考えられる。そこで，はじめは２つの分からないものを２つの条件で当てる活動をすることにするが，３つのものを用意し，３つの条件で３つの分からないものを求める発展的な学習もできるように準備した。これによって生徒がそれぞれの思考水準に応じた活動ができるものと考えた。

【指導観】
実際の指導に当たっては，森敏昭先生の理論から勉強させていただいたことを取り入れて，生徒が興味を持って授業に取り組めるように，また，生徒がお互いに意見を交換する中で，お互いが高めあえるように工夫した。森先生の理論は，赤，青，黄の３色の糸を授業に盛り込むことが必要である，ということである。
まず，この授業での赤い糸（生徒個人の情念の世界）は，実際にりんご，バナナ，みかんの疑似物を用意したり，店の雰囲気を出すために，レジも用意したところである。そのことが，生徒の情念に訴えかけ，実際に店員と客のロールプレイングに入り込み，それが学習意欲につながると考えた。
次に，この授業での青い糸（学問的知識の習得）は，未知数の数だけ条件を与えると，未知数の値はただ１組に定まることを発見することである。また，りんご１個の値段などを当てることを目的に設定したため，目的が分かりやすく，課題に取り組みやすいのではないかと考えた。
この授業での黄色い糸（学びのネットワーク）は，班活動をするなかで，友達の意見を聞いて，条件の決め方を話し合い，よりよい方法や，自分では考えつかなかった条件を知ることである。店のカウンターを作り，店員側と客側を分けることで，店員全員で相談して値段を決めたり，客は条件の聞き方を話し合ったりしながら学習をすすめることができ，話し合いが行われやすい雰囲気ができると考えた。

５．指導計画及び評価計画（総時数１３時限）

			評価計画
第１次	連立２元１次方程式とその解の意味	（２時間）	①②③④
第２次	連立２元１次方程式の解き方	（６時間）	①②③④
第３次	連立２元１次方程式の利用	（５時間）	
第１時	果物の値段を当てよう（１）<活動>【本時】		①②
第２時	果物の値段を当てよう（２）<発表>【本時】		①②
第３時	距離・速さ・時間の問題		②③
第４時	割合の問題		②③
第５時	連立方程式の問題を作ろう		①②③④

６．本時の学習（第３次中の１時，２時）
（１）題材名　「果物の値段をあてよう①②」
（２）ねらい
・日常生活の中の問題を，数学的な手法を用いて解決しようとする。
・２つの分からない数を求めるのに，２つの条件が必要であることを理解する。
・どのような条件を得られれば問題を解決することができるか考察することができる。
（３）評価の観点及び規準（別紙の評価規準表を参照）
①関心・意欲・態度
連立２元１次方程式を利用することで問題解決が容易になるというよさに関心をもち，積極的に問題を解決しようとする。
②数学的な見方・考え方
具体的な事象の中の数量の関係をとらえ，連立２元１次方程式を用いて解を求めるとともに，解や解決の方法が適切であるかどうか振り返って考察することができる。
（４）発達段階に応じた学習活動について
問題解決場面として，１時間目は値段を当てるための条件を考える活動を行う。生徒の発達段階に応じて，３つのものを同時に当てる条件を考えさせる。２時間目は，班ごとに条件の発表会を行い，他の班の条件のいいところを評価しあう活動を行う。また，その条件を聞いて，自分で問題を作る活動も行う。他の班の工夫を自分の問題作りにも生かすことができるか評価していきたい。
（５）本時の展開
用意するもの　品物，レジ，電卓，ホワイトボード，ボード用マーカー

【１時限目】

学習活動・内容	教師の指導・支援及び留意点	評価規準および方法	時間
１．活動内容の説明 ・店側と客側に分かれてのロールプレイ。	・まずグループ分けをし，机を並べて店のカウンターを作る。		１０
お店にある２つの品物の値段をあてられるような質問を考えよう。			
・店は果物の値段を班で相談して決める。 ・客は２つのものの値段をあてる活動。	・お客側には，品物単独の値段を聞かないよう指示。 ・できるだけ少ない回数で当てるようにいう。		
２．ロールプレイ ・１５分ずつ店側と客側に分かれて活動を行う。	・客側は早く終われば，３つのものを同時にあてる条件も含め別の条件を考えるようにいう。 ・お店側にはお客さんの評価をしてもらう。	評価① 値段をあてる条件を考えている（観察，ワークシート） 評価② 値段をあてる条件を適切に考察している（観察，ワークシート）	３０

３．発表準備 ・班ごとに発表の準備をする。	・ホワイトボードを配り，発表の準備をさせる。工夫しているところをきちんと発表できるようにいう。		１０

【２時限目】

学習活動・内容	教師の指導・支援及び留意点	評価規準および方法	時間
４．条件の発表会			１５
班ごとに工夫されている質問を発表し，評価し合おう。			
・班ごとに優れた条件，またはおもしろい条件を発表し，評価しあう	・１つの班に発表させ，似たような班があればまとめて発表させる。	評価② 条件の工夫しているところを適切に発表することができる（発表）	
５．条件の評価 ・他の班の工夫しているところを自分の言葉でまとめる	・ワークシートをくばり，まとめさせる	評価② 他の班の条件のいいところやおもしろいところを評価することができる(ワークシート)	１５
６．問題作り			２０
発表された条件を参考にして，連立方程式の問題を作ろう。			
・自分で難易度を設定して条件を工夫し，問題を作る	・問題を作るには，何をかかなければならないか確認する。（条件２つ，求めるもの２つを明記する。）		

（単元　連立方程式）総時数１３時限（５月～６月）

	指導計画および予定時数	主な学習活動または学習項目	数学への関心・意欲・態度	数学的な見方や考え方	数学的な表現・処理	数量，図形などについての知識・理解
指導計画・評価規準	①連立二元一次方程式とその解の意味 （２時限）	・分からない値が２つある具体的な事象を考え，その値の求め方を考えてみよう。	・具体的な事象を２つの文字を使って式に表し，これを方程式とみて解を求めようとする。 連立二元一次方程式やその解の意味に関心をもち，自分なりの方法で解を求めようとする。	・具体的な事象を２つの文字を使って式に表し，これを方程式とみて解の意味について考察することができる。 二元一次方程式には解が複数あることに気づき，方程式を連立させることの意味や連立二元一次方程式の解の意味を考察することができる。	・連立二元一次方程式をつくることができ，１つの文字に値を代入してもう一つの文字の値を求めることができる。 ２つの二元一次方程式に値を代入して，連立二元一次方程式の解であるかどうか確かめることができる。	・二元一次方程式とその解の意味を理解している。 連立二元一次方程式とその解の意味を理解している。
	②連立二元一次方程式の解き方 （６時限）	・二元一次方程式をいろいろな解き方で解いてみよう	・一元一次方程式に帰着することで，効率よく連立二元一次方程式が解けるという代数的な操作のよさに関心をもち，連立二元一次方程式を解こうとする。	・一方の文字を消去し，既知の一元一次方程式に帰着させれば解けることに気づき，連立二元一次方程式の解き方を考察することができる。	・加減法や代入法を用いて，連立二元一次方程式を解くことができ，その手順を説明することができる。	・一方の文字を消去し既知の一元一次方程式に帰着させれば解けること，加減法や代入法による解き方を理解している。
	③連立二元一次方程式の利用 （５時限）	・いろいろな文章問題を二元一次方程式を使って解いてみよう	・連立二元一次方程式を利用することで問題解決が容易になるというよさに関心をもち，積極的に問題を解決しようとする。	・具体的な事象の中の数量の関係をとらえ，連立二元一次方程式を用いて解を求めるとともに，解や解決の方法が適切であるかどうか振り返って考察することができる。	・連立二元一次方程式をつくったり，解を求めたりするとともに，その手順や解の適否を説明することができる。	・連立二元一次方程式を利用して，問題を解決する手順を理解している。

3．中学校3年　課題学習　「一筆書きでできた図形の角の和」

問題づくりによる問題解決の事例

(1) 問　題

> 平面上の5点を同じ点を通らずに一筆で結んでみよう。どんな図形ができるだろうか。
> また，そのときにできる角の関係について考えてみよう。

(2) ねらい

・平面上の5点を同じ点を通らずに一筆で結び，色々な図形を描くことから課題を発展させることができる。

・一筆書きでできた図形の角の和について論理的に考察しその関係を見いだすことができる。

(3) 目　標

① 数学への関心・意欲・態度

一筆書きでできた図形の角の和に関心を持ち，角や平行線の性質を利用して角の和の性質を見いだしたり確かめたりするなど，数学的に考察している。

② 数学的な見方や考え方

一筆書きでできた図形の角の和の性質を数学的な推論の方法を用いて論理的に考察することができたり，課題を発展させることができる。

③ 数学的な表現・処理

角の和の性質の考察において，その求め方を説明したり数学的な記号を用いて簡潔に表現したりすることができる。

④ 数量，図形などについての知識・理解

一筆書きでできた図形の角の和の性質について理解している。

(4) 課　題

基本課題（既習事項）

平面上の5つの点を結ぶと五角形ができます。そのときできる5つの角の和は何度だろうか。

2年のときの多角形の内角の和の求め方から$180° \times (5-2) = 540°$ になる。

また，星型5角形も様々な求め方から180° になる。

発展課題1　平面上の5点を同じ点を通らずに一筆で結んでみよう。どんな図形ができるだろうか。
また，そのときにできる角の関係について考えてみよう。

発展課題2　平面上の点を5つから増やした場合どうなるだろうか。

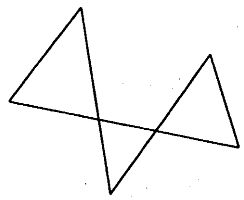
⑸　題材について

２年生に対頂角，平行線と同位角・錯角，三角形の内角と外角，多角形の内角と外角，円周角について学習している。これらの学習の発展として学習した。

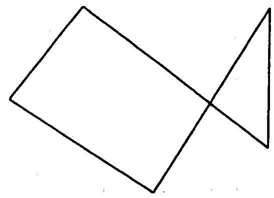
星形五角形は平面上の５点を一筆書きで結んでできる図形である。しかし，平面上の５点を一筆書きで結んでできる図形は結び方によって五角形や星形五角形以外にも２つの図形ができる。

次の図のような場合である。

①



②



このときにできる５つの角の関係を調べると星形五角形の場合は∠Ａ＋∠Ｂ＋∠Ｃ＋∠Ｄ＋∠Ｅ＝180°という関係がある。五角形の内角の和として∠Ａ＋∠Ｂ＋∠Ｃ＋∠Ｄ＋∠Ｅ＝540°という関係がある。①②の場合にはまた違った関係を見出すことができる。

まず生徒に平面上の５点（３点が同一直線上にない場合）を自由に一筆書きで結ばせ，いくつかの図形ができることを見出させるようにする。その上で５つの角の関係について２年生の復習を含めて考察する。そこから課題を発展させ次の課題を見つけさせるようにする。まず，考えられるのは点の数を６，７と増やす場合である。その中でも星形多角形に注目して角数を増やしてその規則性を見つけていくことも考えられる。発展課題については生徒の学習の状況を観察して課題を設定する。また，各自の興味・関心に合わせて課題を自己選択させて学習を進めるようにする。最後に，追求した結果をレポートにまとめる。

⑹　授業の流れ

Ｔ　平面上の５つの点を一筆書きで結んでみよう。どんな図形ができますか。

Ｐ　５角形，星型５角形

Ｔ　この他の結び方を考えてみよう。

Ｐ　５角形や星形以外にも図形ができる。

Ｔ　新しくできた図形の５つの角を内角と考えてみよう。この５つの角の和にどんな関係があるだろうか。

Ｐ　５つの角の和を出すのは難しい。

Ｔ　５つの角をａ，ｂ，ｃ，ｄ，ｅで表したときこの５つの文字の間に何か関係式ができないだろうか。

　三角形内角と外角の関係など使いってできないだろうか。

Ｐ　１つは$a+b=c+180-d-e$，$(180-a-b)+(180-d-e)+c=180$

Ｔ　これらの式をどれも整理すると$a+b-c+d+e=180$になる。

Ｐ　もう１つは$a+b+c+(180-d-e)=360$

　これを整理すると$a+b+c-d-e=180$になる。

Ｔ　４つの図形の場合につてまとめる。星形５角形の場合は$a+b+c+d+e=180$です。結んだ

線が交差する場合はなにか180と関係ができそう。

＊さらに発展させた問題を考える。

T　点の数を７つに増やすと同じことがいえますか。いろいろな図を描いて考えてみよう。

もっと点を増やすとどんなことが言えますか。

各自自分の考えたり，他の生徒が発表した図を選んで追求する。

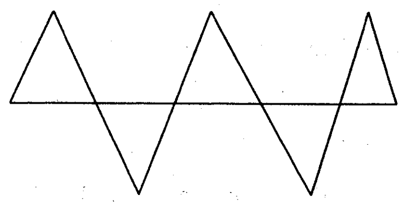
（これ以降は個人の課題としてレポートとして提出させる）

例えば，

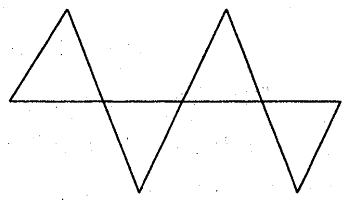
・星形七角形，星形九角形・・・の和について考える

・平面上の７つの点を一筆書きで結んでできる図形の角の和について考える。

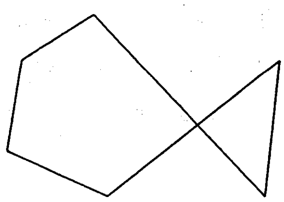
１Ａ図（7，9個と奇数個の点を結んでできる場合）



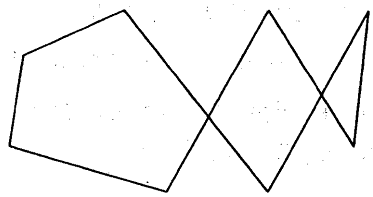
１Ｂ図４，６個と偶数個の点を結ぶ場合）



２Ａ 図



３Ａ図



(7)　発達段階に関する考察

５つの点を結んでできる図形の角の関係を三角形の内角と外角の関係などを用いて説明しようとしている姿が見られた。更に点の数を増やして出来た図形の中でも同じ決まりで結んだ図形の内角の間にも決まった関係があることを見つけようと努力していた。つまり，頂点を一つおきに結んでできる星形では５，７，９と頂点の数を増やしていくと角の和が180°，540°，900°になっていく。つまり星形ｎ角形では180°×ｎ－360°×４と一般化できる。

また，１Ａの図形では３つの点ではａ＋ｂ＋ｃ＝180，５つの点ではａ＋ｂ－ｃ＋ｄ＋ｅ＝180，

７つの点ではａ＋ｂ－ｃ＋ｄ－ｅ＋ｆ＋ｇ＝180という規則的な関係

１Ｂでは４つの点でａ＋ｂ＝ｃ＋ｄ，６つの点でａ＋ｂ＋ｄ＝ｃ＋ｅ

２Ａでは５点でａ＋ｂ＋ｃ－ｄ－ｅ＝180，６点でａ＋ｂ＋ｃ＋ｄ－ｅ－ｆ＝360

７点でａ＋ｂ＋ｃ＋ｄ＋ｅ－ｆ－ｇ＝540いう関係を見出すことができる。

ただ，自分で課題を発展させてどんどん追求して角の関係を見出していける生徒は図形の性質間の論理的な関係や，図形間の論理的な関係づけを十分に行っている考えられる。また，他の生徒が見つけた図形をもとに考えを深めていく生徒は図形の性質の論理的な関係を考察している段階に留まっているかもしれない。

また，角を用いた論証は三角形の合同を用いた証明に比べて生徒には考えやすい。ただ，三角形の合同を用いた証明の記述は練習を重ねているので書き方については慣れている。しかし，角の関係を説明する論証の記述に困っている生徒も見られた。

(8) 問題解決力を伸ばすために

問題解決には問題を把握したり，自ら形成する段階がある。つまり，問題解決を生徒が自ら行うためには，問題を自分の課題としてとらえられるかということが大切になる。その一つの方法は生徒に問題づくりを取り組ませることである。自分で作った問題なら他者から与えられたものではないから問題を内面的な問題として意識化されるだろうという推測からである。ただ，生徒に問題づくりに取り組ませるにしても初めはどのように問題を作ればよいか当惑する。また，数学的な内容と無関係の問題を作る場合もある。

そこでこの問題点を解決する方法として基本課題の条件を変えたり発展させるということが考えられる。簡単な例を上げる。１年生の正負の数の加法を考える場面である。「東に５ｍ進み続けて東に３ｍ進みました。２回で何ｍ進みましたか。」という問題から（＋５）＋（＋３）＝＋８という式を作り，（正の数）＋（正の数）について考察して計算の規則をまとめる。次に「東に５ｍ，東に３ｍ」の部分を変えてみて問題を作る。例えば西に５ｍ次に東に７ｍなどと条件を変えてみると「西に５ｍ進み続けて東に７ｍ進みました。２回で何ｍ進みましたか。」。この場合は東を西にかえたり，進む距離を変えるというように条件を簡単に変えて新しい問題をつくることができる。すると（－５）＋（＋７）＝という（負の数）＋（正の数）の計算法則を考察できることになる。

本課題も初めは五角形や星形五角形の角の和を求める課題から，５つの頂点の結び方を変えることで新しい図形ができその角の和について考察するという新しい問題を生徒が見つけることができる。問題解決に対する意欲付けになると思われる。

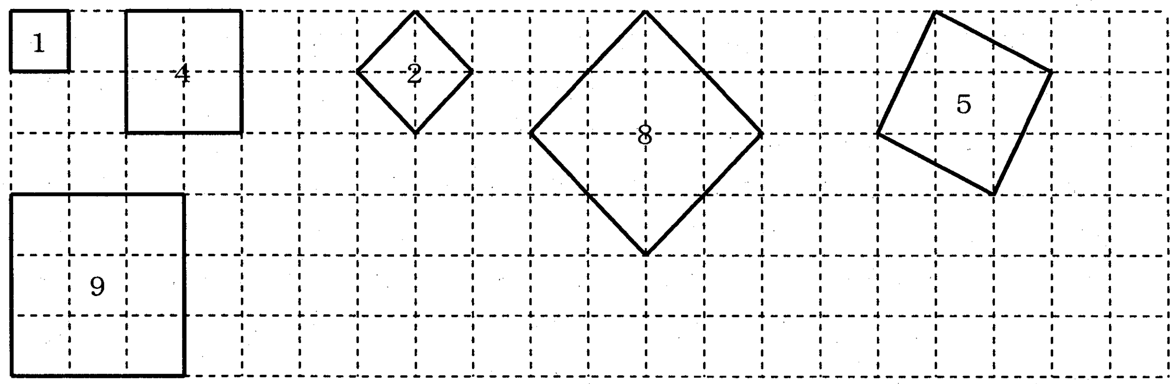
Ⅲ. 小学校授業参観記録

日　時	2月18日（金）３限	授業者	小学校　前田教諭	学　年	４学年３組
参観者	中学校　松原・戸水	題　材	いろいろな面積の正方形を考えよう		

(1)　授業のあらまし

＜授業は小学校の校内研究授業＞

１㎝四方の方眼紙にいろいろな面積をもつ正方形をかかせて，それらの正方形がなぜその面積になるか，児童がお互いに説明をする授業。はじめは１㎠，4㎠，9㎠，……などの簡単なもの。次に２㎠，８㎠，最後に５㎠のものをかかせ，その説明をさせていた。



(2)　参観後の感想

直角三角形の面積は長方形を半分にすることで求めることができることを，いろいろな面積の正方形を見つけながら学習する，考えられた教材であると思う。児童はパズル感覚で楽しみながら学習を進めることができ，教材の組み立て方のうえでも大変参考になった。

小学校は，自分たちの意見を発表しあうシステムとして，答えた児童が次の児童をあてるようになっていた。また，間違った意見を言ってもそれを揶揄するような雰囲気がなく，前田教諭の普段の指導が意見を言いやすい雰囲気を作っているのだと思った。中学校でもこういった雰囲気を生かせるとよいが，人前で意見を発表することを冷やかす雰囲気もみられ，これはどのあたりから発生するのか疑問にも思った。

(3)　児童・生徒の発達段階に関する考察

この教材は，中学校３学年で学習する平方根の単元の導入にもよく使われる。そういった意味で中学生（３年生）との比較がしやすかった。

①　正方形の見つけ方について

やはり面積５の正方形を見つける速さが格段に違った。ノーヒントで発見した児童は１人。また，面積５の正方形の正解を図示されても，それが正方形になっていること自体を理解できていない児童もいた。中学校３年生は，面積５の正方形はわりと早く見つけることができる。ノーヒントでも

約半数は見つけることができる。また，正解を図示されると，ほとんどの生徒が，それが正方形になっていることを理解し，それを説明することができる。

これは，２つの原因が考えられる。１つは数学的な思考力自体が抽象的に発達しているからであると思われる。小学生は正方形というものを概念的にしか理解しておらず，その概念が“方眼紙のように縦横にきちんとした形”としかとらえられていなければ，斜めに傾いた正方形は，正方形と認識されない可能性がある。また，図形を回転させても元の図形と同じ図形（合同な図形）であるという認識がなければ，正方形と認識させるのは困難である。中学生は，正方形というものを概念の面からも一般的にとらえる力が発達しており，正方形であることを見た目でも認識できると思われる。

もう１つは，正方形の定義や三角形の合同を中学校２学年できちんと学習するからであると考えられる。見た目で正方形であるという認識と同時に，抽象的な思考力がさらに発達していれば，それが本当に正方形であるか，論理的に考えるであろう。そしてそれが正方形であるということの確信へとつながっていくと思われる。

② 面積の概念について

発表の様子から，小学校の児童の面積の概念は，１×１の正方形が集まったものであるということがわかった。正方形の面積が５になる説明でも，図形をいろいろと移動し，１×１の正方形が５個集まった形にもっていく説明が多かった。中学校３年生ではまずそのような説明は出てこない。

３×３から直角三角形を４つ分ひくか，１×１の正方形に直角三角形を４つ分たすやり方である。

中学校３年生は，面積５の正方形をさがす段階で，2.2×2.2のように，中途半端な長さで正方形をつくるものもいて，面積はすでに長さを２つかけて出すものである，または公式から機械的に出すものである，という認識になっている。小学校の児童でも１人，2.2×2.2の正方形を作っている児童がいた。思考力の発達がかなり進んでいると思われる。

日　時	3月1日（火）2限	授業者	小学校　橋田教諭	学　年	6学年2組
参観者	中学校　松原・浜口・戸水	題　材	合計の重さを求めよう		

(1) 授業のあらまし

<教科書最後のやってみようの部分である>

犬と猫，猫とネズミ，ネズミと犬，といった２匹ずつの合計が分かっている。このことから，犬，猫，ネズミの３匹すべての合計を求め，その求め方を説明し，説明の仕方をみんなで深めていく授業。

児童は最初15分間の考える時間で自分の考えをノートにまとめ，その後自分の考え方を黒板で発表し，その考え方のポイントを確認したり，別の考え方を発表したりしていた。

児童の考えでは，

・（犬＋猫）＋（犬＋ネズミ）－（猫＋ネズミ）＝犬２匹分

犬２匹分 ÷ ２＝犬

犬＋（猫＋ネズミ）＝求める答え

・（犬＋猫）－（犬＋ネズミ）＝猫－ネズミ

（猫＋ネズミ）－（猫－ネズミ）＝ネズミ２匹分

ネズミ２匹分 ÷ ２＝ネズミ

ネズミ＋（犬＋猫）＝求める答え

などの答えが出た。

⑵ 参観後の感想

① 授業について

小学校６年間で培った計算力や数学的なものの見方を使って答えを求める考えられた教材である。授業では単に答えを求めるだけでなく，その求め方を説明させ，みんなでいろいろな考え方を深めていくことを大切にしていた。代数的な見地から言えば，3元１次連立方程式にあたり，算数の力でそれを説明するのは難しい思われるが，児童は元気よく積極的に手を挙げ，みんなでその説明を聞いて深めていこうとする様子が見られた。日頃の橋田教諭の指導が，1人１人の意見を大切にする雰囲気につながっていると思った。前田教諭の授業の参観のときも感じたが，この雰囲気を中学校で生かせると良いと思った。中学校では発表者を「カッコつけやがって」などど揶揄する雰囲気が出始める時期でもあり，中学生の心身の発達段階なども考慮して，よりよい授業形態を考えていかなければならないと感じた。

児童はよく考え，活発に活動していたが，答えまでたどり着かない児童もいたので，算数セットなどの操作できるものも利用して，思考の手助けとしても良いと思った。

② 児童の様子について

小学校６年生の雰囲気については，とても落ち着いていると感じた。考える時間，人の話を聞く時間，みんなで話し合って深めていく時間のけじめがしっかりついているように感じた。最上級生として，また卒業を控え，中学校への希望に胸膨らませている感じが見て取れた。学級掲示物の中学校へ向けての目標もとても頼もしく感じた。来年度が楽しみである。

⑶ 児童・生徒の発達段階に関する考察

① 代数的な思考力

黒板の説明では，児童は「犬」「猫」「ネズミ」といった言葉を使って説明していた。これらを代数的に用いる思考力がつき始めていると感じた。ノートに○△□の記号を用いて説明していた児童もいたが，こういった経験から，中学校で文字を用いるとより簡単に説明ができ，文字の良さを認識することへつながっていくのではないかと思った。

② 代数の多元性について

児童の説明では，｛(犬＋猫）＋（猫＋ネズミ）＋（ネズミ＋犬)｝ ÷ ２で答えが求まるといった考えはなかなか出てこなかった。やはり用いる代数の数が増えると思考がしにくいのではないか。３つのものを問題にしている，といった認識もあまりないのかもしれない。文字を形式的に扱うといった経験が，条件式の対称性に気づき，これらを足せば求めるものの２倍になる，といった思考につながっていくのかもしれない。

③　「－ネズミ」の認識について

中学校では－ｘというものを形式的に扱うことに慣れ始める。児童には「－ネズミ」といった感覚はさすがにないと思われるが，

（猫＋ネズミ）－（猫－ネズミ）＝ネズミ２匹分

であるという感覚を，どのように理解しているのか，興味深いところである。

⑷　その他

授業を見ながら小学校押野教諭と話をした。小学校の研究理念「創発」について少し聞くことができた。『例えば生徒に考えさせて前で発表させる授業では，中学校の研究授業では発表者に目を向けるであろうが，小学校では発表を聞いている生徒に目を向ける。発表者の意見を聞きながら１人１人がどう考えて学習を深めていくか，それを大切にするのが「創発」である。』とのことであった。