生徒の発達段階を見据えた指導のあり方について
－数学的な思考水準の探究－

松原敏治
数学科　浜口国彦
戸水吉信

1．テーマ設定にあたって

本校数学科では，昨年度までは新学習指導要領の完全実施をうけ，評価のシステムを中心に研究をすすめてきた。しかし，評価のシステムを中心に研究をすすめていくと，評価の生かし方が，主に成績をつけるためのものにかたよりがちになってしまうおそれがあった。そんな中で我々は，金沢大学数学教育研究会において，数学教育がご専門である金沢大学教育学部・大谷実先生から，ファン・ヒーレの幾何学における思考水準論を教えていただいた。

ファン・ヒーレの幾何学における思考水準論では，生徒が幾何を理解していく段階として，それぞれの思考力に段階があるのではないか，と述べられており，ファン・ヒーレはその段階を次のように定義している。

第０水準　図形は「全体として」認識され，その形によってだけ認識されるという特徴をもつ。

第１水準　この水準では，知覚される形の分析が行われ，その結果，それらの性質が明らかにされる。子どもは，図形の形に潜在する性質を認識し始めるのである。

第２水準　この水準では，図形の諸性質間の論理的な関係や，図形間の論理的な関係づけがなされる。たくさんある性質の中で二三の特徴的性質が当該の図形を定義するものとして採用され，あとの性質は論理的な方法で確立される。図形は，定義に基づいて確立される一定の論理的な関連において現れる。

第３水準　この水準では，演繹法の意味が「大域的に」会得される。すなわち，理論全体を構成し，発展させる方法としての演繹法の意味が理解される。ここでは，「演繹の意味や，定理の逆，公理，必要・十分条件の認識に関連している。

第４水準　最も高いこの水準は，論理の本性についての認識である。ここでは，対象の具体的性質や対象間の関係の具体的な意味が捨象される。すなわち，理論をあらゆる具体的な解釈をぬきにして展開することができる。

こうした理論に出会って，我々も生徒１人１人にそれぞれの発達段階があり，それに応じた課題を与えることが必要ではないか，と考えるようになった。そこで今年度は，生徒の発達段階を，特に数学的な思考水準に絞って考察し，それに応じた指導のあり方について研究をすすめることにした。生徒の思考水準を評価し，それを指導のあり方にフィードバックしていくことが，評価が単に成績をつけるためのものではなく，真に生徒のためになる評価につながっていくものであると考える。

2．研究の方針

研究の方針として，次のように考えた。

(1)　「数と式」「数量関係」「図形」の３領域それぞれの思考水準を考察する。

(2)　生徒の思考水準に応じた指導法を考え，実践する。

(3)　生徒の様子やレポート，評価テスト等を教師自身にフィードバックし，さらに指導のあり方について考え，授業改善を行う。

3．思考水準と作業仮説

前述したとおり，数学科では生徒の発達段階の作業仮説（※研究部総論参照）として，数学的な思考力にしぼって考察をすすめた。

例えば「数と式」の領域において，「作業仮説」となる思考水準を，以下のような手順で考察してみた。

(1) 中学校３年間の生徒の様子を話し合う

はじめに，数と式の領域における中学校３年間の生徒の様子を話し合ってみた。以下はその結果をまとめたものである。

① 中学校１学年

・法則を見つけることに興味を示す。

・法則を説明することも得意。

・なぜそうなるのか？ということを考えることに対しては興味薄（そういう力もついておらず，苦手なのかも。）

・具体的な事象と関連づけての説明は苦手。教師が例示すると，「分かりやすい」という反応を見せる。（具体の世界と抽象の世界のリンク付けが自分ではできない）

② 中学校２年生

・法則を見つけると，なぜそうなるのか，ということを考える。
（個人差あり。中３くらいからか？）

・文字式を使って考えはじめる学年である。

・具体的な事象と結びつけた説明もできるようになる。

③ 中学校３年生

・より数学的なすっきりとした法則にまとめようとする。

・法則の一般化をすすめようとする。（個人差あり。高校生くらいからか？）

・操作的活動にはだんだんと取り組まなくなる（操作の結果が予想できるから？）。

(2) 思考水準の考察

以上のことをもとに，「数と式」領域における思考水準を以下のように考察してみた。

第０水準

具体的な物を使っての計算しかできない。
（小学校低学年）

第１水準

具体的な物を使っての計算から，「数字」での機械的操作による計算ができる。
（小学校低学年～高学年）

第２水準

いろいろな法則を見つけ，それを具体的な事象に照らすなどして，一般的に成り立つことが説明できる。
（中学校１学年～中学校２学年）

＜例＞

（－５）＋（＋３）＝（－２）

などの計算法則を一般化し，それがいつでも成り立つことを説明することが出来る。

第３水準

いろいろな数の定義を理解し，定義から計算法則などの公式・定理を導き出し，新たな公式・定理の証明ができる。また，必要に応じて数の場合分けをして，数学的な議論をすすめることができる。

（中学校３年生～高校生）

＜例＞

$\sqrt{a}$ ＝面積ａの正方形の一辺の長さ・・・・定義１

＝２乗してａになる正の数・・・・・・定義２（定義１と同値）

などを根号のついた数の定義としてとらえ，

定理１　$a<b$ ならば $\sqrt{a}<\sqrt{b}$ であることや

定理２　$\sqrt{a}\times\sqrt{b}=\sqrt{ab}$ であることを，定義を使って説明することができる。

定理１は定義１を，定理２は定義２を使う方が証明しやすい，などの理解も含む。

第４水準

数や文字式の集合を環や体としてとらえることができ，定義・定理を集合そのものに適応することが出来る。

（大学生）

(3) 専門の先生に見ていただく

大谷実先生に，以上の思考水準の定義を見ていただいた。すると，代数の分野における思考水準を研究している方の定義を以下のように教えていただいた。

第０水準

数が，それを特徴付ける具体物の集合から分離されておらず，また演算が直接具体物の対象に対して行われる。

第１水準

数が，それを特徴付ける具体物から分離される．一定の記数法（十進法）で記述された数を利用し，演算の諸性質が帰納的に確立される。

第２水準

数字によって表される具体的な数から，文字の一定の解釈の際だけに具体的な数を表す抽象的な文字式への移行がなされる．この水準で，局所的な論理的整理が行われる。

第３水準

代数全体を，与えられた具体的な解釈で演繹的に構成する可能性が明らかにされる。ここでは，計算の対象である文字が，ある与えられた集合に属する数をあらわすものや変数として用いられ，演算は普通の意味を持つ。

第４水準

計算対象としての具体的な性質や演算の具体的意味が捨象され，あらゆる解釈をぬきにして抽象的演繹的体系としての代数学が構成される．いろいろな代数の可能性がとらえれる。

このことからも，前述の思考水準の定義は，おおむね的を得ているように思われる，と大谷先生からご指摘をいただいた。そこで本校数学科では，「数と式」領域における思考水準を上記(2)のように定義し，それを作業仮説として研究をすすめることにした。また，「図形」領域における作業仮説は，ファン・ヒーレの思考水準をそのまま使用することにした。「数量関係」領域における作業仮説は，今年度は時間の関係で作成できなかった。これは次年度の課題とする。

参考文献

ファン・ヒーレ夫妻（van Hiele, P. M. & van Hiele Geldof）　ファン・ヒーレの思考水準論

4．「数と式」領域における1年生の実践

(1) 思考水準の評価

3．で，「数と式」領域の思考水準を考察したが，生徒の思考水準に応じた指導法を考え，実践するには，生徒の思考水準を評価しなければならない。そこで，生徒の思考水準を評価することからはじめた。

評価の方法については，面接，観察，評価テスト（レポート）など色々な方法があるが，生徒の思考水準を一律に平等に評価するため，評価は主に単元テスト（※本校でほぼ1月に1回行っている，単元の学習内容の定着をはかるためのテスト）で行うこととした。ここではどのような問題（課題）で評価するか，ということに焦点をあてたい。

① 5月単元テスト

問　題　$-4>-7$　である。このことの「理由」を説明しなさい。(数直線上で右にある，負の数は絶対値が大きい方が小さい，などは，「法則」にあたるので，「理由」としては不十分です。)

出題のねらい　第2水準の到達評価を意識した問題。-4や-7を具体的な事象にあてはめて説明できるか見ることが狙い。

評価例
ア．負の数の定義「基準の数を0として，それより小さい数（正の数と反対の性質を持つ数）を－の符号を用いてあらわす」を用いて，具体的な事象に触れながら説明した例。第2水準に到達していると評価できる。 『体重30kgを基準にして考えると』 ・－4は30kgの－4で26kg －7は30kgの－7で23kg → 26kgのほうが23kgより重いから，－4 のほうが－7よりも大きい数だと分かる。 イ．具体的な事象にてらして説明した例。思考水準はほぼ第2水準に達していると評価することができる。下の説明は，法則的な説明。第1水準から第2水準への移行がなされていると見ることができる。 ☆ －4とは，4の借金と考えると，－7とは7の借金になる。借金は損(小さい)なので，－4より－7の方が損が大きいということになる。損が大きいということは少ない，小さいということなので－7の方が－4より小さいということになる。 ☆ 負の数は正の数と反対の性質をもちます。正の数は絶対値が大きい方が大きいので，反対の性質なら負の数は，絶対値が大きい方が小さいということになり，絶対値の大きい－7が小さく，－4が大きいということになります。

評価の結果と分析

上記ア，イにあたる解答をしたのは73人（45.6%），一見アやイのような説明を行っているが，定義があやふやなもの51人（31.9%），法則を述べてしまったもの（上記イの下部分など）や解答が不十分なもの36人（22.5%）であった。「－３＞－５である理由」を授業できちんと議論し，ノートもしっかりととらせたことが，4割強の生徒にとって効果があったと考えることができる。一方，正負の数の大小の感覚をなんとなくつかんでいても，それを説明する表現力（説明を書く能力）がまだまだついていない生徒も多いということが分かった。

②　６月単元テスト

問　題	減法を加法になおす法則を簡単に説明しなさい(なぜそうなるのかの説明はいりません)。また，なぜ減法を加法になおして計算すると簡単に計算することが出来るのかを，授業を思い出して簡単に述べなさい。

出題のねらい　法則が書けるかどうかは，第１水準から第２水準への思考水準の移行がなされているかを見る問題。減法を加法になおして計算すると簡単に計算することができる理由は，以前習ったことを次に生かしていく，ということが分かっているかどうか，第３水準の到達の素地ができているかということを評価する問題。

評価例

ア．法則を記号化して書いている例。抽象的表現力もついてきていると見ることができる。理由については，授業を思い出して書いているのだろうが，いまひとつあやふやである。

減法を加法になおす法則（理由はいりません）	減法を加法になおすと簡単に計算できる理由
□－(－○)＝□＋(＋○) □－(＋○)＝□＋(－○)	加法は減法よりも先にならった。 －は、逆にすると言う性質があったので前ならった加法に直して計算した方がわかりやすかった。

イ．法則を，具体的な例も出しながら，わかりやすく説明している。数学用語の使い方も正しく，知識・表現力ともにすぐれ，思考水準も第２水準に到達していると思われる。理由も，既習の法則に帰納させる考え方をしっかりと理解しており，第３水準に到達する素地ができていると思われる。

減法を加法になおす法則（理由はいりません）	減法を加法になおすと簡単に計算できる理由
演算記号「－」を「＋」に直し、ひく数の符号を変える。 例 (＋3)－(＋5)＝(＋3)＋(－5) ＋に直す	加法には、同符号の数の和は絶対値の和に共通の符号をつけ、異符号の数の和は絶対値の差に絶対値の大きい方の符号をつけるという法則が成り立っているから。

評価の結果と分析

授業では，生徒は法則の説明よりも法則を見つけることに意欲を示していた感があったので，法則を書く部分は，前回の説明よりは出来がよいと思ったが，きちんと法則が書けているものは59人（36.9%），

表現力不足で少し誤りがあるもの48人（30.0%），全く違う解答53人（33.1%）であった。この問題も，授業でしっかりとノートをとらせたにもかかわらず，前回より少し正答率が減り，無答も前回は２人だったのに対し，今回は６人と増えていた。法則を数学的にまとめて書くには，抽象的な表現力・数学用語を正しく使う知識が必要であり，そういった力がまだついてないのではないかと考えられる。

また，理由を書く部分は，上記イのように加法の法則を使うことがきちんと明示されているものはわずかに９人（5.7%），上記アのように少しあやふやなもの21人（13.2%），交換法則や結合法則に帰納させてしまったものや理由になっていないものや無解答は129人（81.1%）であった（無答は10人）。授業では，減法の指導にあたる前に加法をたくさん練習し，なぜ減法を加法になおすのか議論したのだが，法則も同時に書かせたためか，または３数以上の加法の練習にも力を入れたためか（後述の100問計算練習参照），交換法則や結合法則に帰納させた答案が多く，２数の減法という基本的な部分の説明に気づいた生徒は少なかった。また，既習の事項に帰納させる，という考え方は，実感はできても，説明するのにはかなりの表現力が必要であると考えられる結果になった。

③　７月単元テスト

問　題　(1)　$a<0<b$　のとき，次のうち必ず正の数になるものをすべて選び答えなさい。

$$b+a \quad , \quad b-a \quad , \quad a^2-b^2 \quad , \quad b^2-a^2 \quad , \quad a-ab \quad , \quad b-ab$$

(2)　Ａさんは，毎日，自転車で毎分200mの速さでa分かけて家から駅まで行き，そこから電車に乗り換える。Ａさんはある日，寝坊をし，いつも乗る電車の発車３分前に家を出てしまったため，毎分b mの速さで急いで駅に向かった。しかし，その電車には乗れず，次の電車まで15分待たなければならなかった。電車は一定の間かくで運転されているとして，次の式は何を表しているか，答えなさい。

①　$200a$　　　　②　$\dfrac{200a}{b}-3+15$

出題のねらい　これは，評価規準の「数学的な見方や考え方」に対応した問題。評価規準は「ａ＋ｂ，ａｂなど，文字を用いた式はそれぞれ加法，乗法を表しているとともにそれらの結果も表しているとみることができる。」であり，(2)①はＢ基準を，(1)と(2)②はＡ基準を達成できているかどうかみることとした問題。具体的な事象にてらすことができるかどうか，という面で(2)②は第２水準の問題であると考えられる。また，いろいろな場合にあてはめて考えることができるかどうか，という面で，(1)は少し第３水準を意識した問題であると考えられる。

評価例

ア．(1)は，$b-a$ と $b-ab$ が正解であるが，$a-ab$ を解答に入れてしまう生徒が目立った。$a-ab$ の反例をあげるには，bが１以下の場合を考えなければならないので，この問題を完答できた生徒は，第２水準の思考水準を持ち，少し第３水準にかかる思考水準を持っていると評価できる。

イ．(2)②の誤答例としては，「Ａさんが家を出てから電車に乗るまでの時間」が最も多かった。「電車の運転間隔」が正解であるが，3を引いていることを電車の運転時間につなげられることが必要なので，この問題を完答できた生徒は，第２水準の思考水準を持っていると評価することができる。

評価の結果と分析

(1)の完答は50人（31.3%），$a-ab$ を解答に入れた生徒は45人（28.1%）であったのに対し，(2)②の完答はわずか29人（18.1%）であった。(1)の問題を完答するには高い思考水準が要求されると思われるが，解答には表現力を要しないので，思考水準はそこそこ高いが，表現力がついていない生徒でも解答しやすかったと考えられる。それに対し，(2)の解答には，ある程度の表現力を要し，また，授業であまり練習しなかったので，生徒は慣れていなかったのではないか，と考えられる。

(2) 評価結果の分析

上記(1)の評価の結果とその分析から，さらに分析をすすめると，次のようなことが分かった。

① 正負の数の単元テストで高い思考水準を持っていると判断された生徒でも，文字と式の単元テストでは思考水準が下がった生徒がいた。正負の数の単元は，具体的事象とのつながりが強く，生徒の思考水準，特に抽象化ができるかどうかが基準になる第２水準以降の思考水準の到達をみるのにあまり適した単元ではないのではないか。

② 思考水準が高い生徒でも，抽象的な表現力がついていないとペーパーテストで思考水準をはかるのは難しい。また，抽象的な表現力がついていることは，頭の中で抽象的に考える力にもつながるのではないか。

(3) 思考水準と計算力との関係

評価の分析結果から生徒の思考水準に応じた指導方法を考察していくにあたり，もし，基本的な表現力や基本的な技能が思考水準を高めるのに必要であれば，それも指導方法の中にいれなければならない。そのため，生徒の思考水準と，基本的な計算力との関係を調べることにした。

① 計算力の評価方法

「100問計算練習」という教材を開発し，それで計算力の評価を行うことにした。教材作成にあたっては，計算力を「速さ」と「正確さ」に分けて評価できるように工夫した。100問の計算を10分間の制限時間の中，各自のペースでできるところまでさせ，解答数と正解率の２つを記録した。正負の数100問練習は，主に加法と減法の練習で，シート１枚で100問，文字と式100問練習は，主に１次式の加法と減法までで，シート２枚で100問である。（資料１）

さらにこの教材は，後に生徒個々に応じた指導にも使えるように，表計算ソフトで rand 関数（乱数発生関数）を用い，自動作問できるように作った。これにより，計算の反復練習をしたい生徒は毎回違う100問の計算練習ができ，また，課題として生徒にさせるときも，友達のとは違うドリルが来るため，解答を教師側で預かっておけば，お互いに写すなどの行為ができないため，各自が自分で練習をすることになる。意欲のある生徒はどんどんシートを取りに来た。のべ170回分のシートが生徒の手に渡った。

② 思考水準と計算力の相関関係

５月～７月の単元テストの結果と，100問計算練習の結果の相関関係を調べてみた。

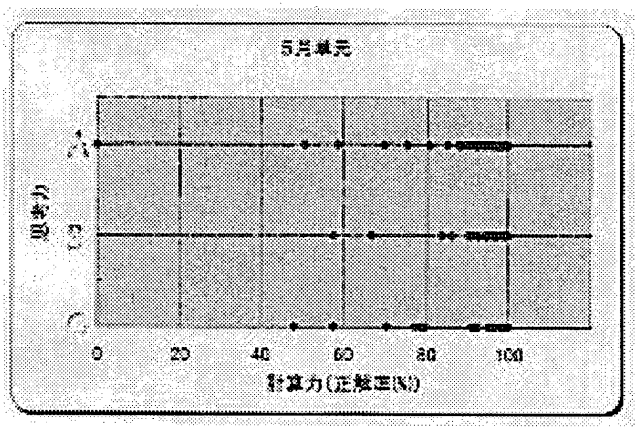
グラフのみかた

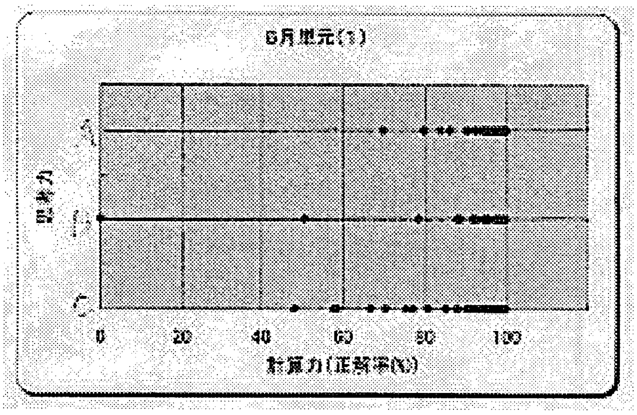
縦軸は思考力を次のようにＡＢＣであらわしている

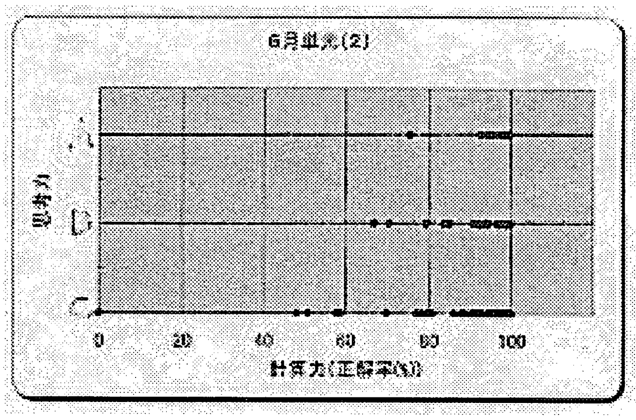
Ａ…完答　Ｂ…少しの不備がある解答　Ｃ…無答やまちがい

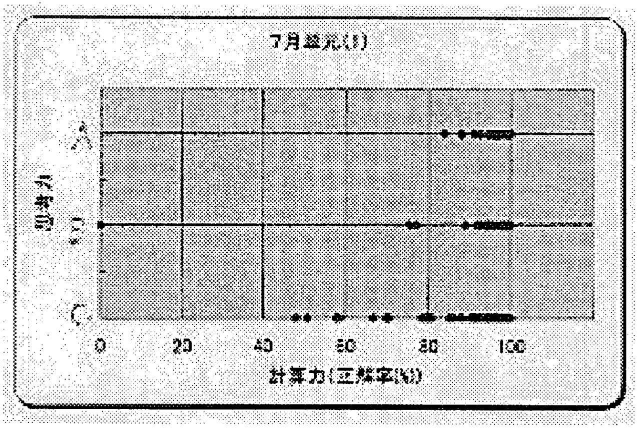
横軸は計算力を，正解率（%）であらわしている。

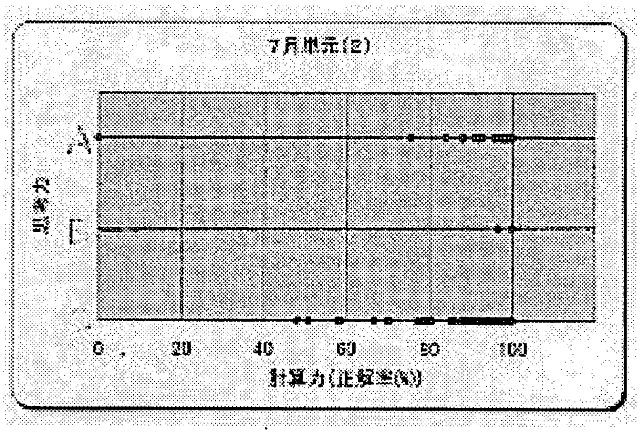
それぞれの生徒ごとに，思考力と計算力の交わったところに点をプロットした。











この結果から，計算力と思考力は直接の相関関係はなく，計算力がついていても思考力があるとは限らないことが分かる。しかし，例えば７月単元(1)は，完答している生徒はすべて正解率80%以上の計算力を持っており，計算力がついていないと，思考力を要する問題を解答するのは困難であるということが分かる。６月単元(2)や７月単元(2)も同じような傾向が認められる。思考水準に応じた指導方法を考えるには，基本的な技能をつけさせることも視野にいれなければならないであろう。

(4) 生徒の思考水準に応じた指導方法の考察

以上の考察の結果から，生徒の思考水準に応じた指導方法を考察することにした。「思考水準に応じた」とは，「全体へ」「個人へ」の２つの方向から考える必要があると思われる。それぞれについて考察してみた。

① 全体への指導として，全体的な傾向をつかみ，それに応じた課題を与えること

１年生の全体的な傾向として，思考水準が第１水準から第２水準へ移行していると見ることができる。そこで授業では「具体的な事象を取り上げ，そこに一般的な定義をあてはめ，一般的に法則が成り立つことを説明する」という流れで指導を行った。具体的には，以下のような実践を行った。

ア．「正負の数」

・身のまわりの－のついた数を探して発表し，共通することがらから負の数の定義を行う。

・正負の数の大小を，具体的な事象にあてはめて説明したり，負の数の定義から説明したりする

・負の数の四則計算を，具体的な事象にあてはめて説明する

イ．「文字と式」

・同類項をまとめる法則を，具体的な事象にあてはめて説明したり，文字式の定義から説明する

これらの授業を行った後に，生徒がお互いの考え方を見合うことができるように，生徒のいろいろな考え方を「数学通信」に載せて発行した（資料２）。これによって，お互いの考えを参考にし，思考力の定着をはかることができると考えた。

② 個人への指導として，思考をはじめるのに必要な技能や表現力がついているかどうかを評価し，個別に指導する

生徒の計算力を評価するために使用した「100問計算練習」で，計算力がついていない生徒に個別に指導を行った。夏休みを利用して生徒に計算の指導を行った結果，分かるようになった喜びを生徒から感じることができた。その後の授業で，その生徒の中から，自分の考えを授業で発表してくれる生徒も出てきた。

(5) まとめと考察

以上のように，生徒の発達段階を数学的な思考水準にしぼって，それに応じた指導方法を模索してきた。その結果，中学校１年生は，第１水準から第２水準への移行期であるのではないかと考えられる。具体的な事象を使って数学的に説明する，ということが生徒の実情にあっているのではないか。第２水準の到達に必要な抽象的な思考は，抽象的な表現力やしっかりとした計算力にも裏付けられてついてくるのではないかと考えられる。中学校１年生の段階では，操作的な活動や具体的な事象を多く用い，定義や法則を分かりやすく説明する練習をし，同時に抽象的な数学用語や確かな計算力をつけていくことが，生徒の発達段階に応じた学習形態であると考える。

【資料１①】１００問計算練習シート（正負の数）
シートは必要に応じて，加法のみ，減法のみ，加減混合のみ，
乗法のみ，除法のみ，乗除混合のみ，を選択できる。

数学100問計算練習　No1　　年　組　番　氏名(　　　　　　　[　　/　　]

(1) $(+1)+(+9)$
(2) $(+17)+(+11)$
(3) $(+19)+(+18)$
(4) $(+6)-(+8)$
(5) $(-4)-(+16)$
(6) $(+16)-0$
(7) $(-9)\times(-3)$
(8) $(+9)\times(+3)$
(9) $(-7)\times(-4)$
(10) $(-12)\div(+4)$
(11) $(+49)\div(+7)$
(12) $(-12)\div(+2)$
(13) $20-(-17)$
(14) $-4+(-8)$
(15) $8-(-7)$
(16) $-20\div(-5)$
(17) 0×8
(18) $14\div(-7)$
(19) $10+(-5)-18$
(20) $-10+5-0$
(21) $-3+18-15$
(22) $-36\div3\times9$
(23) $-2\times9\times7$
(24) $-1\times(-4)\div2$
(25) $-4-15-(-8)-(-12)$
(26) $-3-5-0+5$
(27) $17-(-10)-14-10$
(28) $2-(-19)-(-3)-(-11)-(-15)$
(29) $-12-(-15)-11+(-19)-(-13)$
(30) $-15+16+(-5)-18+(-8)$
(31) $-7\times4\times(-3)$
(32) $-18+(-1)-3-1-(-2)$
(33) $(-6)\div(-2)$
(34) $-3-(-3)+11$
(35) $20+9-8$
(36) $(+30)\div(-5)$
(37) $(-2)-(-1)$
(38) $-20+8+14+(-20)$
(39) $0\div(+5)$
(40) $(-7)\div(-1)$
(41) $(+25)\div(-5)$
(42) $0+13+(-11)$
(43) $-19-0$
(44) $(+12)\times(+8)$
(45) $3+20-(-5)$
(46) $(-90)\div(-9)$
(47) $-8+17-(-19)+7-(-17)$
(48) $-6\div3$
(49) $(+70)\div(+7)$
(50) $-2\div(-1)$
(51) $-18+14-(-6)-7$
(52) 10×5
(53) $6\div(-6)$
(54) $(+2)\times(-7)$
(55) $20+(-8)$
(56) -6×4
(57) $11-11-(-15)$
(58) $(+11)+(-18)$
(59) $-17+(-15)-(-2)-(-9)$
(60) $11-9+4-(-7)$
(61) $(+2)\times(+5)$
(62) $11\div1\div(-2)$
(63) $-20-(-4)-1+(-9)+(-4)$
(64) $-20-20+(-4)-(-14)+(-15)$
(65) $10\times8\times(-1)$
(66) $19-(-12)-15$
(67) $(+18)+(+7)$
(68) $-2+19-6-10$
(69) $15-1+(-4)$
(70) $-18-15-8-10$
(71) $7\times7\times4$
(72) $-19+(-4)+14-5+14$
(73) $-4+20-(-20)-4-10$
(74) $-12+8-4+9-6$
(75) $13-(-7)-20+16$
(76) $-17+8-11+(-4)-(-1)$
(77) -10×9
(78) $5-18+10-10$
(79) $(-10)-(-20)$
(80) $(-7)\times(+1)$
(81) $(-12)\div(+6)$
(82) $(+9)-(+13)$
(83) $(-19)+(-16)$
(84) $(+81)\div(+9)$
(85) $(-17)-(-3)$
(86) $(-11)+(+1)$
(87) $(+20)+(+16)$
(88) $(-25)\div(-5)$
(89) $(+13)-(+6)$
(90) $-3-1$
(91) $19+15+(-13)$
(92) $(+2)+(-12)$
(93) $(+24)\div(-3)$
(94) $0-(-6)-17$
(95) $-11\times9\div(-1)$
(96) $-3-20+10-2+(-15)$
(97) -10×1
(98) $-3\times5\times5$
(99) $-15-(-6)-12-(-17)-18$
(100) $5-(-5)$

【資料１②】 １００問計算練習シート（文字と式）
シートは必要に応じて，２項のみ，２項と３項，４項のみ，１次式の加法のみ，
１次式の減法のみ，１次式の加減のみ，すべて混合，を選択できる。

数学100問計算練習　No1　　年　組　番 氏名(　　　　)　[　／　]

(1) $-2y+3y$
(2) $8b-4b$
(3) $-a+7a$
(4) $-2b-3b$
(5) $-7x+4x$
(6) $-5b+3b+2b$
(7) $-9x+3x-x$
(8) $-2b+8b+5b$
(9) $4y+5y+2y$
(10) $-7a+2a+8a$
(11) $-3b+1+9b+6$
(12) $6y-5-8y-4$
(13) $b-3+8b+8$
(14) $3y-9+y+5$
(15) $9a-6-5a-5$
(16) $-5x-3-9x+8$
(17) $2y-8+5y+2$
(18) $-4x-8+8x-6$
(19) $3a-9+8a+3$
(20) $9x-7+5x+6$
(21) $(8y-2)+(-9y+7)$
(22) $(4y-7)+(7y+9)$
(23) $(7y-3)+(-6y+5)$
(24) $(b+3)+(-7b+5)$
(25) $(y-9)+(3y+2)$
(26) $(-9x+7)-(x-4)$
(27) $(-5b+5)-(2b-7)$
(28) $(3x-5)-(-x+1)$
(29) $(-7y-7)-(-y+7)$
(30) $(8b+2)-(9b+8)$
(31) $(-5b+6)-(-7b+3)$
(32) $2b-6-7b+3$
(33) $(-8a+6)+(6a+3)$
(34) $8y+8y$
(35) $(4x+5)-(x+5)$
(36) $-3b-4b$
(37) $(-8x-8)+(-5x+2)$
(38) $(5y-3)-(8y-7)$
(39) $-5b+8b$
(40) $(b-2)-(8b+7)$
(41) $(7y+9)+(-9y-7)$
(42) $(-5y-1)+(-4y-5)$
(43) $a+6a-9a$
(44) $(-4b-5)+(6b-1)$
(45) $4y-9y$
(46) $(2a+7)+(-5a-9)$
(47) $5b-1+6b-3$
(48) $-7b+7-9b+9$
(49) $(-y+6)+(5y-8)$
(50) $-3b-b-2b$

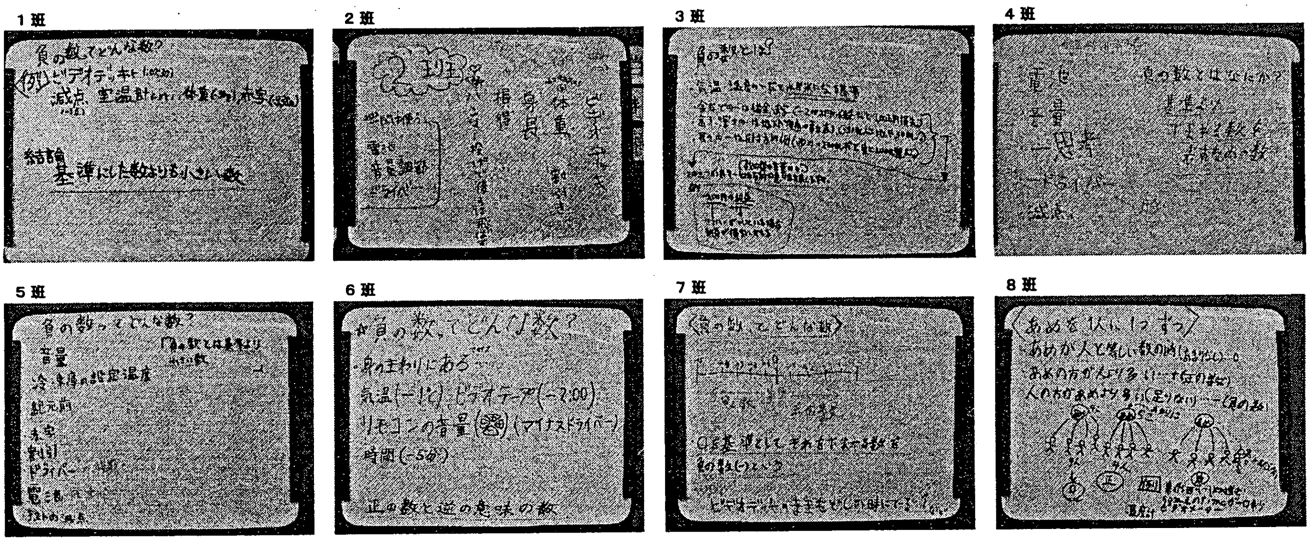
数学100問計算練習　No1　　年　組　番 氏名(　　　　)　[　／　]

(51) $7a+5-7a+8$
(52) $-2x+7-3x+1$
(53) $(5a-2)-(5a+1)$
(54) $-5a-a-3a$
(55) $(-9y+3)+(9y-8)$
(56) $-4y-6-9y-6$
(57) $2a+8a-4a$
(58) $(-b-2)+(-5b-8)$
(59) $(2a-9)-(6a+4)$
(60) $7y-8-2y+8$
(61) $(-9b-5)-(3b-7)$
(62) $2a+7-5a+3$
(63) $(7a-8)-(8a-6)$
(64) $(5y-1)-(6y+8)$
(65) $-2y-8y$
(66) $5a+4a$
(67) $(-2x+9)-(3x-7)$
(68) $(-9a-2)-(-7a-1)$
(69) $(b+8)-(4b+7)$
(70) $3a-a-7a$
(71) $-5x-7x$
(72) $-2a-1+a+3$
(73) $-8a+6a$
(74) $(x+8)+(-x+9)$
(75) $(-2y+3)-(-4y+1)$
(76) $-5a+4a$
(77) $(2b+6)+(-9b+1)$
(78) $(b-9)+(4b-6)$
(79) $(-9a-6)-(-8a-3)$
(80) $(8a-9)-(-2a-5)$
(81) $5y-6+8y+1$
(82) $(a-4)-(2a-6)$
(83) $(9y+2)-(6y-6)$
(84) $-3b-7+4b-2$
(85) $(6b-7)-(4b-5)$
(86) $(-a+8)+(-3a-1)$
(87) $6a+2-6a-7$
(88) $-3y+8y$
(89) $-8b+7b+3b$
(90) $b-7-2b+3$
(91) $-2x+6-6x+2$
(92) $(4a-9)+(-7a-2)$
(93) $(-4y-1)+(8y-5)$
(94) $(4x-6)+(-x+2)$
(95) $2x+4x+3x$
(96) $(-6a+7)+(7a-3)$
(97) $-4a+a-8a$
(98) $9a+6a+7a$
(99) $(-4x+3)+(-3x+4)$
(100) $-x+4x-2x$

【資料２】 数学通信
いろいろな法則を具体物を用いて説明する方法を授業で議論し，その結果を数学通信として発行，いろいろな考え方を振り返ることができるようにした。

数学通信 No.1 for 1－1 2004．4．22発行

負の数って何だ？



数学通信 No.3 for 1－1 2004．6．9発行

☆いろいろな考え方が出ました。みんな一生懸命考えてくれてありがとう！紙面の関係で全部載せられなくてゴメンね。

数学ワークシート 1年 1組 30番 氏名（ ）

(－3)×(－2)＝+6

そのわけを考えてみよう

Aさんが3km/hで東の方向(+)から歩いてきて原点にたどりついたとき，2時間前は原点からどれだけ離れたところにいるか？

原点 +1km +2km +3km +4km +5km +6km

(－3)×(－2)＝+6
西の方向へ3km/hで　2時間前　原点から東に6km離れたところ

ヤシの実が1分間で3コずつ落ちていく。2分前には何コのヤシの実が木になっていたか？

2分前

1分に3コずつおちている　何コあったか？

(－3)×(－2)＝+6
6コあったという意味

数学ワークシート 1年 1組 19番 氏名（ ）

(－3)×(－2)＝6

そのわけを考えてみよう

1台3円ずつの月極駐車場で100台分の駐車場を借りたとする。今月は2台分の金を出さなくてよくなったとする。すると6円分得する。

100台分を出すことを基本「0」とする

1台3円ずつはらう→(－3)円
2台分はらわない→(－2)台
(－3)×(－2)＝6

数学ワークシート 1年 1組 37番 氏名（ ）

(－3)×(－2)＝+6

そのわけを考えてみよう

(－3)×(+2)＝－6
(－3)×(+2)と－3×2は同じこと。
つまり－3のものが2こあること

それで－と+は反対の性質だから
(－3)×(+2)＝－6　(－3)×(－2)＝+6　となる

例
(－3)×(+2)が－3の借金を2回借りること
反対の性質
(－3)×(－2)は－3の借金を2回返すこと

数学ワークシート 1年 1組 9番 氏名（ ）

(－3)×(－2)＝6

そのわけを考えてみよう

－3円の借金を－2回かりたと言うことは－2回と言うのは2回かりていないと言うことになっていま+3円あると言うことになって答えは+6になる

ぎゃくの意味

数学ワークシート 1年 1組 2番 氏名（ ）

(－3)×(－2)＝+6

そのわけを考えてみよう

西へ向かって毎秒3mの速さで歩くことを－3mというので表す。
もし(－3)×(+2)だったら
現在より2分後ということで→進む
(－3(m))×(+2(分後))となり　－6になる。
これを
(－3)×(－2)にすると
－2は現在より2分前ということで→もどる
(－3(m))×(－2(分前))となり　+6になる。

数学ワークシート 1年 1組 27番 氏名（ ）

(－3)×(－2)＝+6

そのわけを考えてみよう

(－3)×(+2)＝－6という式があるとする。そこで，(+2)を(－2)にすると，+と－は反対の性質をもつというのだから，答えも符号がかわり(－3)×(－2)＝+6となるのではないか，と思った。

(－3)×(+2)の場合　(－3)×(－2)の場合

西へ時速3kmで歩いている人がいたとして，現在地点が0だとすると，2時間前(－2)の事》には，地点より東6kmの地点にいたことになるので，(－3)×(－2)とは，+6になる

数学ワークシート 1年 1組 11番 氏名（ ）

(－3)×(－2)＝6

そのわけを考えてみよう　（自分の考え）

(－3)×(+2)の場合
×2
答え

(－3)×(－2)の場合
×2

← +　－ →　反対にかける
だから6になる

数学ワークシート 1年 1組 26番 氏名（ ）

(－3)×(－2)＝+6

そのわけを考えてみよう

+にいく力を ← として，
－にいく力を → とすると，
→に→の力をくわえると，
－は+とは逆の性質をもつので，
反発しあって，←(+の力)になる。

数学ワークシート 1年 1組 23番 氏名（ ）

(－3)×(－2)＝+6

そのわけを考えてみよう　+と－は逆の性質をもつ！

反対に!!

(－3)×(+2)＝－6

+と－は逆の性質をもつので，
+2が－2になると，
積も反対になる
－6 → +6 に!!

数学ワークシート 1年 1組 34番 氏名（ ）

(－3)×(－2)＝+6

そのわけを考えてみよう

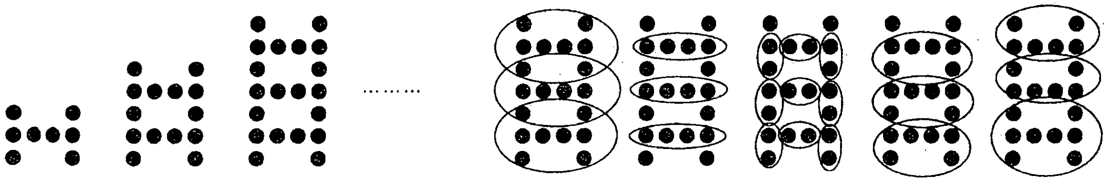
(－3)×(+2)＝－6という式があるとする。そこで(+2)を(－2)にすると，+と－は反対の性質をもつというのだから答えも符号がかわり(－3)×(－2)＝+6となるのではないかと思った。

具体系

法則系

数学通信　No.4　for 1－1，2，3，4　2004．6．28発行

☆はしごの段数から碁石の個数を求める式．みんな色々な考え方を出してくれました．



碁石の個数を求める式は…

５０段では	ことばの式で表すと	はしごの段数を x 段とすると
５０×６＋２	（はしごの段数）×６＋２	x×６＋２
５０×６＋８－６	（はしごの段数）×６＋８－６	x×６＋８－６
８＋（５０－１）×６	８＋（はしごの段数－１）×６	８＋（x－１）×６
５０×８－（５０－１）×２	（はしごの段数）×８－（はしごの段数－１）×２	x×８－（x－１）×２
５０×４＋２×（５０＋１）	（はしごの段数）×４＋２×（はしごの段数＋１）	x×４＋２×（x＋１）
５０×４＋２×５０＋２	（はしごの段数）×４＋２×（はしごの段数）＋２	x×４＋２×x＋２
５０×２×２＋５０×２＋２	（はしごの段数）×２×２＋（はしごの段数）×２＋２	x×２×２＋x×２＋２

数学通信　No.5　for 1－4　2004．7．14発行

☆ $5x+3x=8x$ になる理由を説明してもらいました

☆ $5x+3x=8x$ になる理由を説明しよう

5xはxが5個あって3xはxが3個
5個＋3個は8個だから8xになる

☆ $5x+3x=8x$ になる理由を説明しよう

5x+3x ＜ 5x+3xは、5×x+3×xと同じ。
⇓
5×x+3×x ＜ 5×x+3×xは同じ数をかけたものをたしている。
⇓
(5+3)×x ＜ 結合法則をつかってかけられる数をたしたのちにかける数をかける。
⇓
8x ＜ 5+3は8なので8×x、8xとなる。

☆ $5x+3x=8x$ になる理由を説明しよう

5x+3x
=5×x+3×x
=(5+3)×x
=8×x
=8x

同類項は係数を先に計算して、その文字をつける。

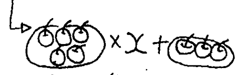
5x+3xは5×x+3×xと同じになる。5×x+3×xは分配法則が使えるので、分配法則を使うと(5+3)×xになる。かっこの中を先に計算すると8×xになる。8×xは乗法なので、×を省くことができる。すると8xになる。だから5x+3x=8xになる。

☆ $5x+3x=8x$ になる理由を説明しよう

5x+3x=5×x+3×x ←かけ算の式に
かけ算の記号は省略されるから
=x×5+x×3 ←交換法則
=x+x+x+x+x+x+x+x
1×3=1+1+1だから　←足し算の式に
=8x ←xが8個　(1)xが8個だから

☆ $5x+3$ がこれ以上計算できない理由を説明してもらいました．

☆ $5x+3$ がこれ以上計算できない理由を説明しよう



仮にxが1皿か2皿だとわかっていたら、
5×1か5×2で答えをたして計算できるが、xだと何皿あるかがわからないので、そのわからない数に、3は足せない。
(5×x) のこと。
例．a+3=a+3
→aに3をたしても、aが何の数か分からないため答えはできない。

5x+3を展開してみると
5×x+3になる。これは分配法則を使うことができない。
また、5xと+3という項は同類項でないため、計算することはできない。（計算できない）
もし、これが、5x+3=8xであるならば、代入してたしかめる
x=2を代入
5×2+3≠16で成り立たないとわかる。

5xというのは、5×xのことである。
仮にxを2とする。
すると、答えは5×2+3=13になる。
しかし、5x+3を8xとして8×2にすると、答えが16となり、違ってくる。
なので、3にxがついていないじょう分配法則なども使えなくなるので、5x+3はこれ以上計算できない。

☆ $5x+3x=8x$ になる理由を説明しよう

x=2（代入すると…？）
5x+3x=5×2+3×2 →分配法則で考えてみる。
=(5+3)×2　｜　=(5+3)×x
=8×2　｜　=8×x
つまり　=16　｜　=8x

※同じ文字が2回（同類項）の場合分配法則を利用して文字の係数同士を先に計算することができる。

5.「数と式」領域における2年生の実践

(1) はじめに

中学2年生の思考水準としては第2水準の「法則を見つけ，それを具体的な事象に照らすなどして一般的に成り立つことが説明できる。」の時期と考えられる。また，領域によっては第3水準に達する生徒もでてくると考えられる。

「数と式」領域ける中学校2年生の姿として次のような3点を考えた。

・法則を見つけると，なぜそうなるのか，ということを考える。

・文字式を使って考えはじめる学年である。

・具体的な事象と結びつけた説明ができるようになる

また進んだ生徒は次のような傾向も見られるようになると思われる。

・より数学的なすっきりとした法則にまとめようとする。

・具体的な説明からより一般的な説明ができるようになり，法則の一般化をすすめようとする。

2年生は生徒の思考水準を評価することを主に行った。評価の方法については，2年生は9月始めに，調査問題を実施した。次のような観点で問題を作成に生徒の解答を検証した。この内容は2年生始めに学習した内容ばかりである。また，一部1年生と同じ調査問題についても実施し1年生との比較も行った。

計算法則については

「多項式の減法の計算方法とその理由について」「単項式の乗法と除法における計算法則について」

数量の性質については

「連続した整数の和について」「2桁の3の倍数の性質について」

(2) 思考水準の評価問題の結果から

問題1（1年生と同様な問題）

問　題	$-4>-7$　である。このことの「理由」を説明しなさい。（数直線上で右にある，負の数は絶対値が大きい方が小さい，などは，「法則」にあたるので，「理由」としては不十分です。）

解答の結果

① 具体的な事象にてらして説明する生徒　(9.3%)

② 0よりいくつ小さい数かから説明する生徒　(40%)

0を基準に考えると－7は0より7小さい。－4は0より4小さい。

だから7のほうが0より一層小さい。

③ －4と－7のそれぞれに10を加えた和の大小から説明する生徒　(18.7%)

-4と-7のそれぞれに10を加えると6と3になる。$-4+10=6$，$-7+10=3$

6と3では6の方が大きいからもとの

④ 2数の差から説明する生徒　(16%)

大きい数から小さい数を引くと数は答えは正の数になる。

2数の差を計算すると$-4-(-7)=3$で3になるので－4の方が大きい。

⑤ －1がいくつあるかから説明する生徒　(8%)

$-4=(-1)+(-1)+(-1)+(-1)+$

$-7=(-1)+(-1)+(-1)+(-1)+(-1)+(-1)+(-1)$

－１の数が－７の方が多いので

⑥　数直線の性質から（5.3%）

数直線では０より右の方に行くほど数は小さくなるから

⑦　無回答（2.7%）

思考水準評価例

②の評価例から

ア　基準の数を０としてそれよりどれだけ小さいかを用いて具体的に照らしながら説明している。第２水準に達していると評価できる。

－4は 0より 4小さい。－7は、0より 7小さいということになる。だから 4小さいのと 7小さいのでは、7の方が小さいということになるから －4＞－7 になる。

③の評価例

ア　等式の性質から推測して不等号の場合も同じよう性質が成り立つと考えて２数に同じ数を加え，正の数に帰着して大小を考えている。第２水準に達していると評価できる。

－4，－7にそれぞれ10を足すと、6，3になり、双方に同じ操作を行っても ＞の関係は変わらないので －4の方が大きい（－4＞－7が成り立つ）。

イ　同じように２数に同じ数を加えて正の数に帰着して大小を考えているが，そのことを裏付ける法則まで考察できていない。第１水準から第２水準に移行しつつあると考えられる。

－4，－7に 8を 足してみると、4、1 になり

－4の方が 大きい数になるので －4＞－7

④の評価例

ア　大きいもから小さいものを引くと答えは正の数になるという一般的な法則を用いて説明できている。第２水準に達していると評価できる。

大きいものから小さいものをひくと答えは正の数になる。

－4－(－7)＝3 となるから、－4が大きい数に、－7が小さい数にあたいするため

これは１年生とかなり違った傾向を見せた。日常の具体的な事象を用いて説明する生徒は全体の9.3%しかいなかった。ほとんどが数の性質や計算を利用した説明だった。１年生のときの学習から１年４か月あまり経過している。その間に学習した数学的な規則や法則を駆使して説明している様子が伺われた。かなり一般的な説明に慣れてきている生徒が増えつつある。

問題２

次の計算をしなさい。また，どのようにしてカッコをはずしたか説明しなさい。 （５ｘ－６ｙ）－（３ｘ＋４ｙ）＝

解答の結果

① －１をかける　65.3%
② 加法に直す（符号を変えてたす）　29.3%
③ 不正解　5.3%

思考水準評価例

この式は，$1(5x-6y)-1(3x+4y)$ とも表せる。
つまり，かっこの数にそれぞれ １と－１をかければ良い。
$1\times5x-1\times6y-1\times3x-1\times4y$
$=5x-6y-3x-4y$ となり，かっこがはずれた。

この解答から思考水準を考察することは難しかった。この場合は単に正しく計算できることと計算の方法を説明することは知識理解を問うだけになってしまったようである。

問題３

$6xy \div \frac{3}{2}x$ 　を計算しなさい。また，計算方法を説明しなさい。

解答の結果

① 逆数という言葉をもちいて乗法に直して計算する説明　18.7%
② 乗法に直して計算する説明　70.7%
③ 正解だが説明なし　5.3%
④ 不正解　5.3%

思考水準評価例

ア　文字を数と同様にとらえて，除法は逆数をかけるという計算の法則を用いて説明している。数の一般化したものが文字だととらえれている。第２基準から第３基準に近い思考水準をもっている。

$\frac{3}{2}x$ は $\frac{3x}{2}$ と考えることができる。３でわるときに $\frac{1}{3}$ をかけても同じなように，
$\frac{3x}{2}$ でわるのは $\frac{2}{3x}$（$\frac{3x}{2}$ の逆数）をかけるのと同じである。
$6xy\times\frac{2}{3x}$ となり　$6xy$ と $3x$ で約分できるので　$2y\times2=4y$ となる。

イ　分数をひっくり返して計算するという法則を利用して説明している。文字を数と同様に見ると考え方ができているかはっきりしない。第２水準に到達しつつあると考えられる。

分数をひっくり返して，$\frac{2}{3}$ にし，x は，３に付いているので，
$\frac{6xy\times2}{3x}$ ができて，$3\div6=2$　$x\div x=0$，すると，
$2x\times2$ という式ができるので計算すると　$4x$ になる。

問題4

4xy × 5x　を計算しなさい。そのとき利用した計算法則を上げて計算方法を説明しなさい。

解答の結果

文字使用のきまりと交換法則や結合法則をあげて説明している。	30.7%
文字使用のきまりだけで説明している。	57.3%
答えのみ	8%
不正解	4%

評価の結果と分析

問題2から問題4は計算の規則に関する思考水準をみる問題である。2年生では，文字を数と同じように考えて計算規則を適応して計算できるなっている生徒が多く見られる。1年生に比べるとかなり違いが見られた。正負の数の大小についての説明でもあまりでも日常生活の具体的事象とのつながりから説明する生徒は少なくかった。それよりも正負の数で培われた計算規則やその後学習した法則を利用して説明する生徒が増えている。生徒の思考水準，抽象化ができる状態に高まっているようである。

問題5

$a < 0 < b$ のとき，次のうち必ず正の数になるものをすべて選び答えなさい。 $b + a$ ， $b - a$ ， $a^2 - b^2$ ， $b^2 - a^2$ ， $a - ab$ ， $b - ab$

解答の結果と分析

完答の生徒はは52%，$a - ab$ を解答に入れた生徒は24%であった。

1年生は完答31.3%で $a - ab$ を解答に入れた生徒は28.1%であった全体的な傾向として思考水準は上がっていると考えられる。$b - a$ と $b - ab$ が正解であるが，2年生でも $a - ab$ を解答に入れてしまう生徒が目立った。1年生とあまり変わらない割合である。b が1以下の場合も考えないと正解できない。この問題を完答できた生徒は，第2水準の思考水準を持ち，少し第3水準にかかる思考水準を持っていると評価できる。そういう生徒も増えつつあるが，まだ，思考水準が第2段階で第3水準には移行していない生徒は1年生と同じ割合である。

問題6

連続した整数の性質について次の問いに答えなさい。 ① 連続した3つの整数を足すとどんなことが言えますか。また，それが正しいことを説明してください。　例　3＋4＋5＝12 ② 連続した整数の和について考えるとき，足す数を増やすとどのような性質があると言えますか。

解答の結果①

・文字を使って正しく説明している。	93.3%
・数をいくつか上げて説明している。	5.3%
・解答なし	1.3%

思考水準評価例

ア　法則を見つけて文字式を用いて性質を一般的に説明している。第２基準に達していると考えられる。

説明：２番目の整数をaとして考えると、１番小さいのは$a-1$, １番大きいのは$a+1$.
で、その３つを足すと、$(a-1)+a+(a+1)=3a$　となり、２番目の数"a"の３倍になるから。

イ　法則は見つけているが，数例の具体的な例で説明して一般的に説明できていない。まだ，第１水準の思考水準に留まっている。

必ず３でわりきれる

$1+2+3=6$　$6\div3=2$
$6+7+8=21$　$21\div3=7$
$9+10+11=30$　$30\div3=10$

わりきれる３で

解答の結果②

文字を用いて５数，７数など複数の例について考察している	26.7%
文字を用いて５数のみについて考察している	21.3%
ことばだけで説明している。	42.7%
解答なし	6.7%

思考水準評価例

ア　３数，４数，５数の連続した整数の和と文字で調べさらに奇数と偶数の場合に分けてｎ数の連続した整数の和を一般化している。第２水準から第３水準の入り口に入ってきていると考えられる。

３つの時、真ん中の数をxとすると、
$(x-1)+x+(x+1)=3x$.
４つの時、２番目の数をxとすると、
$(x-1)+x+(x+1)+(x+2)=4x+2$.
５つの時、真ん中の数をxとすると、
$(x-2)+(x-1)+x+(x+1)+(x+2)=5x$

このことから、連続したn個の整数の和について考えるとき、
nが奇数の場合は真ん中の数をxとした時、
nx,
nが偶数の場合は真ん中に近い数をxとした時、
$nx+\frac{1}{2}n$ という式がなりたつ性質があるといえる。

イ　７数の連続した整数の和について法則を見つけて文字を用いて一般的に説明している。第２水準に達している。

例えば連続した７つの整数の和だと

まん中をx

$(x-3)+(x-2)+(x-1)+x+(x+1)+(x+2)+(x+3)=x+x+x+x+x+x+x-3-2-1+1+2+3$
$=7x$

問題７

２桁の３の倍数の一の位と十の位の数字を足すとどんなことが言えますか。またそのことが正しいことを説明しなさい。

解答の結果

文字を用いて正しく説明している	20%
性質は見つけて文字で説明しようとしている	30.7%
性質を見つけて数で説明している	29.3%
答えのみ	12%
無回答	８%

思考水準評価例

性質を見つけ，文字で説明しようとしているが，説明の方法が分からず説明が途中で終わっているが第２水準といえる。

A ３の倍数になる。

２桁の３の倍数を $10x+y$、３をかける前の数nと考える

$3n = 10x+y$ と表す事ができる

評価の結果と分析

「連続した３つの整数の和は真ん中の数の３倍である。」を説明するときは約93%が文字を用いて正しく説明している。これは授業で取り上げた分かりやすい例のため多くの生徒が一般的に説明できたと思われる。更に，連続した数の個数を増やしても50%の生徒が一般的な説明を求めない課題にも関わらず文字を用いて一般的に性質を求めようとしている。これらの生徒は確実に第２水準の思考水準にあると思われる。

この２桁の３の倍数の十の位と一の位の数字の和は３の倍数になる。この性質は発見しやすい。しかし，文字を用いて一般的に成り立つことを説明することは少々難しい課題であると思われる。

それでも正解・不正解に関わらず前題の問題６と同じ割合の約50%の生徒が文字を用いて性質を一般的に説明しようとしている。説明できない生徒は $10x+y=9x+(x+y)$ とする技能的なことを指導すればかなりの生徒が説明できると思われる。これからのことから整数の性質や法則を文字を用いて一般的に説明する場合，確実に思考水準が第２水準に達している50%の生徒が達していると言えそうである。始めの課題の90%との差の40%の生徒は第２水準に移行つつあると考えられる。

⑸　まとめと考察

以上のように，生徒の発達段階を数学的な思考水準にしぼって，調査問題から考察してみた。その結果，中学校２年生は，かなりの生徒は第２水準に達しているのではないかと考えられる。具体的な事象を使って数学的に説明するから文字を用いて一層一般的に説明することの意味を理解してきている。第２水準の到達に必要な表現力や計算力も身に付いてきている。まだ，確実に第２水準達していない生徒のためには，法則を見つける場面や説明する場面で「いつでもこの性質が成り立つことを言うにはどうしたらよいか」などの発問を投げかけたり，計算技能を身につける場面でもそこで利用されている計算法則について考えさせるような指導が大切であると思う。また，評価問題でも計算だけを問うだけでなく，その計算法則を説明させることも必要である。

6．空間図形における発達段階についての考察

1年生から3年生までを対象とした平面に関する意識調査

(1) はじめに

中学2年生に実際に模型を手に持たせた上で，「図1で表されるような立方体上の2直線が交わったところにできる角は何度か」と質問したところ，62%の生徒が90度，11%の生徒が45度と答えたという調査結果がある。(松原．2003)

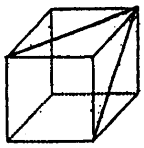


図1

実際に模型を手に持っているわけだから，見取図が読めないことが原因というわけではなく，自分自身で立体の内部に平面を想定することが困難であることが主な原因と考えられる。

そこで，なぜ，中学生にとって，立体内部に平面を想定することが困難なのか，また，そのことはこの年令においては発達段階としてやむをえないことなのかを探るため，まず，中学生は平面をどのようにとらえているか，調査を行った。

(2) 質問紙による調査

[調査対象]　本校生徒1，2，3年生

[調査時期]　2004年7月

[質問紙の内容]

あなたは，平面の性質としてどんなことをあげますか。また，あなたが平面という言葉から思い浮かべる形容詞（様子をあらわす言葉）をあげなさい。

(3) 調査結果

以下に，質問紙に対する回答状況を集計した結果を示す。(複数回答可とした。数値は%)

[表1]

	1年	2年	3年
平ら，平たい，凹凸がない	80	81	72
広い，果てしない，どこまでも続く，無限に続く	3	41	31
薄い，横から見たら直線，厚さがない，2次元	20	30	28
まっすぐ	15	16	8
水平	18	5	10
つるつる，すべすべ	45	5	54
かたい，強い	8	24	13

その他の答え

長い（1，2，3年)，白い（1，3年)，厚みが同じ（1年)，平行（1年)，高さが同じ（1年)，きれい，美しい（1，2，3年)，四角い（2，3年)，重ねられる（2年)

(4) 考　察

各学年の生徒が思い浮かべる性質や言葉の中に「平ら」や「平たい」がもっとも多いのは予想されたことである。

ここで最も注目したいのは1年で10%にみたなかった「広い」が2年，3年ではいずれも30%を越える高い割合になっていることである。

小学校教科書に出てくる平面は，あくまで立方体の表面であったり，部屋の床であったりして，あくまでも有限なものである。中学1年の教科書で初めて「ふつう，平面はかぎりなくひろがっているものと考える」という記述が出てくる。(各社教科書) そして，平面の性質について説明する場面で，平面は一般的な長方形で表される。(図2)

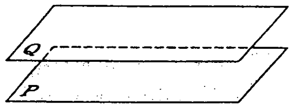


図2

このアンケートをとった時期には1年生は空間図形について未習なので，彼等は小学校での平面についてのイメージをそのまま持っているものと考えられる。したがって，中学2年，3年での「広い」や「果てしない」「どこまでも続く」「無限に続く」という回答は明らかに中学1年の授業で得たイメージが影響していると考えられる。

41%，31%という絶対値が高いと見るかそれほどでもないと見るかは別にしても，このようなイメージを持てる生徒が空間図形を未習の1年生に比べて多いことは明らかに中学1年における教育の効果と考えられる。

これほどの大きな差はないが，「薄い」「横から見たら直線」「厚さがない」「2次元」などの回答も，中学1年と2年では10%の差がある。生徒が平面を直方体の表面の性質ととらえているか，下敷きのような立体の一種ととらえているか，場合によって使い分けができるようになっているかは，この調査だけではわからない。しかし，少なくとも「薄い」などの回答を書いた生徒は表面の性質ではなく，立体ととらえることができているわけであり，中学1年と2年との差はこれも教育の効果と考えられる。

これらの結果から，学校の授業は，生徒の空間図形に関するイメージの形成に大きな影響を与えているといえよう。

(5) 「そこにそれがある」という認識

佐伯 (2004) は，人間がモノを見るとき「視覚」だけで見ているのではなく「触ってみたらこうなるはず」「動かしてみたらこうなるはず」という過程を頭の中で行い，はじめて「そこにそれがある」ことを認識すると述べている。

これはモノを見ること一般についての主張であるが，「空間図形を見る」あるいは「空間図形を書いた図を見る」時に，特にあてはまることであるといえよう。

さらに，空間図形の性質の学習とはまさに，様々な空間図形に対して，「触ってみたら」「動かしてみたら」という実験あるいは思考実験を行いながら，この，「そこにそれがある」という認識を得ることではないかと考えられる。

各学年の結果において，ふつう数学の授業では取り上げられない一連の言葉がある。

それは「つるつる，すべすべ」「固い」，や「まっすぐ」「水平」などの感覚に関する言葉である。これらの言葉は空間図形について論理的に考える際には，普通，使われることはない。

ところが，空間図形の性質の学習が，先に述べたようなものであるとすれば，その中心に，触ってみる，動かしてみるなどの身体動作（あるいは思考実験）があり，その結果としてこれらの感覚に関する言葉が得られ，それは空間図形の認識の中に位置付けられる。

したがって，空間図形の学習（の特に初期の段階）では，これらの言葉を排除するのではなく，むしろ学習の中に取り込んでいくことが，より生徒の認識を深めることにつながると思われる。

(6) 今後の課題

この調査は，立体内部に平面を想定することが困難な理由や，そのことが中学生においては発達段階としてやむをえないことなのかについて考える第一歩として行ったものであり，この調査結果だけからこれらの問いに関する結論を出すことはできない。

ただ，平面のイメージに関して教育の効果がこれだけ大きいことがわかると，立体内部に平面を想定することが抵抗なくできるようになる指導の方法があるのではないかと思えてくる。

現在の中学数学においては，空間図形に関して，発達水準が明らかになっていない。にもかかわらず，中学３年で一気に見取図の読図など，難しい課題を要求されている。

生徒の実態に沿った発達水準の探究と教材の構造化や順序性などの考察が必要である。

その際，認知心理学から明らかになった知見がもっと活かされるべきであると考える。

引用・参考文献

松原敏治．中学生の空間図形に対する見方(2)　－空間内の２直線の作る角を題材として－．
第36回数学教育論文発表会論文集．2003．

熊倉，中西，八田，国宗．空間図形についての理解に関する研究　－授業を通しての検討－
第36回数学教育論文発表会論文集．2003．

新編　新しい算数　６下．東京書籍．2001．

新しい数学１．東京書籍．2002．

数学１年．啓林館．2002．

佐伯　胖．「わかり方」の探究．小学館．2004．pp137～150

城　仁士，中塚みゆき．空間関係の認知の指導．空間に生きる．北大路書房．1995．pp74～100