「数学的な活動を通した課題発見能力と課題解決能力の育成」

松　原　敏　治
数　学　科　浜　口　国　彦
戸　水　吉　信

1．はじめに

数学の中等教育が担う役割の一つに，小学校の算数を踏まえ高等学校の抽象化された数学へ移行させるということがあげられる。子どもたちの抽象化能力は，もちろん個人の発達段階に応じて身に付いていくものであるが，計算や操作的活動，日常的な事象の考察などを行う中で，具体的なものを一般化していくというプロセスで，抽象的な思考が身に付いていくものでもある。

そこで本校の数学科では，こういったプロセスを大切にし，必修教科はもとより，選択教科においても数学的な活動を取り入れることを重視した。子どもたちが自ら課題を発見し，それを解決していく能力を育成し，数学における抽象的な思考を身に付けさせることをねらいとして，研究を進めることにした。新指導要領の実施で必修数学の内容や時数が削減されるのにともない，ますますこういった時間の確保が可能になってくるだろう。

2．数学的な活動について

(1)　数学的な活動とは

数学的な活動は簡潔に表現すると「身の回りの事象を数理的に考察する活動」とされている。具体的には「実験・観察・操作的活動」「問題点や学習課題を見つける活動」「学習課題に見通しを持ったり結果を予想する活動」「学習課題を解決する方法を見つける活動」「予想した結果を数学的に確かめる活動」「数学的な規則性を見つける活動」「数学的な規則性を説明し一般化する活動」「課題を発展させる活動」などが考えられる。

(2)　数学的な活動を重視する背景

数や文字式の計算などの技能が定着している生徒は多い。また，数学的な原理法則を出来上がったものとして覚えているだけの生徒も見られる。しかし，自ら数学的な課題を見つけて，数学的な考え方を生かしながら課題を解決する力が十分に身に付けている生徒は多いとはいえない。また，学年が進むにつれて抽象的な内容が増えていくために数学の得意な生徒と不得意な生徒の差が激しくなっていく傾向にある。更に，数学の学習は系統的であるため，ある学年の学習内容の理解が遅れ，その後の学習に困難をきたし学習意欲を失っている生徒も多い。数学的な活動を通して数学を学ぶ過程を大切にする学習を進めることでこのような問題点を改善していくことが求められていると考えられる。

数学的な活動は外的な活動と内的な活動が考えられる。外的な活動では作業的な活動，体験的な活動，具体物を利用した活動，操作的活動，実験・観察などの活動が考えられる。これらの外的な活動から，身近に感じたり疑問に思ったりすることなど情意面から学習を喚起し，学習意欲を高めることが期待できる。このような外的な活動は，数学の問題点や学習課題を捉えやすくしたり，具体的な事象に照らして考えることで，内的な活動を促しより論理的・一般的・抽象的に考える手助けになる。

内的な活動は外的な活動などから得た疑問や学習課題を帰納的に考えたり類推したりすることで疑問や課題を解決する役割がある。また，一般化したり論理的な説明を考えることで数学的な概念の原理法則の理解を深めることができる。このような活動から数学を学ぶことのおもしろさを味わうことを狙っている。

(3) 数学的な活動の場面

授業の各場面での数学的な活動の例として次のような活動が考えれる。

① 導入場面

操作，実験，観察など，情意面から学習意欲を高める活動

具体的な事象から，学習課題を見つける活動

既習事項の検討や発展から学習課題を見つける活動

② 課題追求，課題解決場面

学習課題に見通しを持ったり結果を予想する活動

予想した結果を数学的に確かめる活動

帰納的に考えたり類推したりするなど解決する方法を見つけ課題を解決する活動

数学的な規則性を見つけ，その規則性を説明し一般化する活動

話し合いなどで自分の考えを説明したり，他者の考えを取り入れる活動

③ 課題発展場面

課題を発展的に考え，次の課題を見つけていく活動

3．選択数学の内容

(1) 選択数学Ａ（補充選択）

ねらい：基礎基本の習熟

内　容：日常的な事象を考察したり，操作的活動を行うなどの数学的な活動を中心にして学習活動を進めて，必修教科の基礎基本の習熟を図る。

(2) 選択数学Ｂ（発展選択）

ねらい：中学校数学をふまえた高等数学への導入

内　容：数式，関数，図形の各分野において必修教科で学んだ方法を用いて，数学的な活動を重視しながら発展的な内容に取り組む。

4．必修数学と選択数学との関連性について

必修の数学における苦手意識は，操作的な活動を十分に行うことで克服できることもある。補充選択では，操作的・活動的な体験の補いを行いながら，基本的な論証能力の育成と技能の習熟を図る。

また，内容等の削減により必修の数学で学習できる範囲は限られてくる。そこでそれ以上の範囲について学習を深めたいと思っている生徒のために，発展選択では，数学的な活動から生じる生徒のより高度な数学への興味・関心を活かし，高校数学も視野に入れた内容を学習する。

5．必修数学における授業実践

(1)　学習課題

「正負の数の計算の練習をしよう」

(2)　数学的活動

①　導入場面

ア．操作活動から学習意欲を高める活動

トランプを使った財産・借金ゲームを取り入れることによって学習意欲を高め，実際に財産や借金をやりとりする中で正負の数の加法の習熟を目指す

イ．具体的な事象から学習課題を見つける活動

さらに，トランプを使って正負の数の計算の練習ができるようなルールを考え，実際に遊んでみてルールの検討を行ったり，実際の計算に結びつけたりする中で，学習課題を見つけていく態度を養う

②　課題追求，課題解決場面

ウ．数学的な規則性を見つけ，その規則性を説明し，一般化する活動

実際の計算の法則について，自分たちで説明し，自分たちで法則としてまとめる中で，数学的に説明する力や事象を一般化する力を養う

(3)　授業展開と生徒の反応

＜①－ア．操作活動から学習意欲を高める活動＞

財産・借金ゲームとは，トランプで，黒が正の数（財産），赤が負の数（借金）とし，右隣の人から１枚抜き，左隣の人に１枚抜かせ，より多くの財産を集めるゲームである。これによって生徒の学習意欲は向上し，加法の理解にもつながったが，さらにその意欲を活かして，自分たちで「正負の数の計算が練習できるようなルールを考える」授業を行ってみた。

＜①－イ．具体的な事象から学習課題を見つける活動＞

子どもたちには各班にトランプを１組ずつ渡し，正負の数の計算練習ができるルールを自由に考えてもらった。最初のうちはどの班も

大貧民などの順位がつくゲームで，１位は＋３点，２位は＋２点，…７位は－３点など，順位に応じて＋，－の得点をあたえるというようなルール

でやっていたが，時間が進むにつれて，ゲーム自体に正負の数の計算を取り入れようという動きが出てきた。例えば，

ダウトで，－13からはじめ，＋13まで順に出す。黒は＋，赤は－で，２枚あわせて和として出してもよい。

というルールが出てきた。これをみんなに紹介すると，今度は各班で，いろいろゲーム中に正負の数の計算が練習できるようにルールを考えはじめた。次に出たのが，

神経衰弱で，黒が＋，赤が－の得点。

というルールだったが，これではみんな赤のペアを取りに行かなくなる。これは計算の練習はできるがゲームとしてはおもしろくないね，というふうに議論が進んでいった。すると今度は，うすのろというゲーム

の応用で，

> カードを１枚めくり，そのカードの上にもう１枚カードをめくる。黒が＋，赤が－で，その２枚の和の絶対値が１，３，９なら，人数より１つ少なく用意されたおはじきなどを素早く取り，取れなかった人が負け。

というルールを考え出した。これはゲームとしてもおもしろいし，速く計算をする練習にもなるね，という確認をしていった。子どもたちに，１枚めくったときに，例えばそれが＋２のカードなら，次に何が出たらおはじきを取らなければならないか，という質問をしてみた。子どもたちは，－１，＋７，－11，…というふうに，熱心に答えを探し，お互いに「これで全部かな？」というふうに答えを確認しあっていた。このように，子どもたちが考えたルールで，少し発展的な計算の練習までできた。

また，このトランプゲームの授業は他のクラスにも休み時間中に話が伝わり，次のクラスでは，最初から，次のような大貧民のルールを改正したものが出てきた。

> 赤が－，黒が＋で，赤の２が一番弱く，黒の２が一番強い。ペア，トリプルは，カードを合計して，その和が多ければ出してもよい。

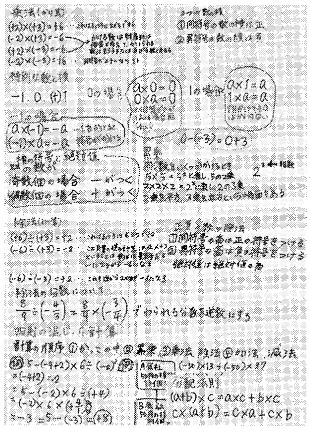
つまり，♣８，♥８，◆８のようなトリプルに対しては，合計が－８より大きいトリプルでなければだめである。だから，黒，黒，赤のトリプルはどんなトリプルでもOKで，赤，赤，黒でも，例えば4のトリプルなら，合計が－４だから，－８＜－４より，出していいことになる。生徒には，Ａや２の扱いをどうすればよいかきくと，以外と簡単に，Ａは14，２は15として扱えばよい，という返答が返ってきた。また，これは正負の数の計算の練習の他に，何の練習になっているかきいてみた。生徒たちは少し考えて，数の大小を判断する練習になっている，と答えてくれた。

＜②－ウ．数学的な規則性を見つけ，その規則性を説明し，一般化する活動＞

まず，身のまわりにあるもので，－のついた数を調べさせ，自由に発表させた。生徒はいろいろなところに－のついた数があるものだと感心していた。その際，何が基準（０）になって，＋が何で，その反対の－が何で，ということを生徒と一緒に確認した。そして生徒に「テストで－３点ってどういうこと？」と投げかけた。すると，100点が基準でそこから３点減点，平均より３点低い，前のテストより３点低い，など，自分たちでいろいろな基準を作っていろいろな場合に負の数が使えることを確認していた。このように具体物を定義にてらして数学的にとらえさせることが，後に正負の数の計算法則の説明に役に立ったと思われる。

計算法則についてはすべて生徒に説明を考えさせたが，例えば（－）×（－）＝（＋）については，生徒からは次のような説明が出てきた。また，まとめも次のように生徒自身に行わせた。

> ・１分間に３ｍずつ戻っている人は，２分前には６ｍ進んだ位置にいた。だから（－３）×（－２）＝＋６
> ・（－３）×（＋２）＝－６（－３が２個で－６）
> 　（－３）×（＋１）＝－３（－３が１個で－３）
> 　（－３）×　０　＝　０
> 　（－３）×（－１）＝＋３（３ずつふえているからこうなるだろう）
> 　（－３）×（－２）＝＋６（　　〃　　）
> ・財産・借金ゲームで「－３」を３の借金，－２を２枚持っていかれると考える。すると，６の財産を得ることと同じなので，（－３）×（－２）＝＋６



6．選択数学における授業実践(１)＜補充選択＞

(1) 題材

① 文字式　文字式の意味や必要性を理解し，式の計算の習熟を図る。
題材としては「数当てクイズ」「誕生日あてクイズ」「整数の性質」など

② 関数　事象の中から関数関係を見いだしたり，比例や１次関数の意味を理解し，比例・１次関数の特色を理解する。
正方形を規則的に並べるという具体的な操作活動から段数，高さ，底辺の長さ，周囲の長さ，辺の数，頂点の数，面積などの変化する量を見つける。そこから比例，一次関数などの関数関係を考察する

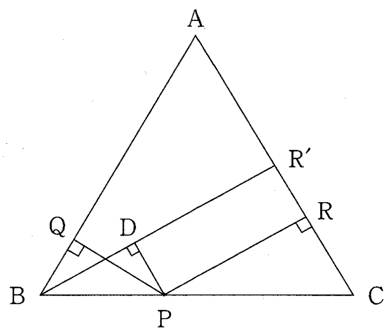
③ 図形　操作的活動などから図形の性質を見つけ，その理由を考察し証明としてまとめられるようにする。
題材としては平行四辺形を用いた証明問題，正三角形の１辺から引いた２つ垂線の関係

(2) 指導事例　図形の例

① 学習課題

正三角形のある１辺上の点から別の２辺に垂線を引く。この２つの垂線の長さの関係について考えてみよう。

正三角形 ABC の辺 BC 上の点を P とする。点 P から辺 AB，AC に垂線を引きその交点を Q，R とする。
「PQ＋PR＝正三角形 ABC の高さ」が成り立つ。
これは，直角三角形の合同，長方形の性質を利用して証明する方法と，三角形の面積の和の関係から調べる方法がある。



② 基礎基本の習熟面

・具体例や操作的活動を通じた図形の性質の見つけ方と予想の仕方
・垂線の意味，作図方法，補助線の見つけ方
・直角三角形の合同，長方形の性質，証明の進め方
・三角形の面積の求め方，等式の変形

(3) 授業展開とこの学習における数学的活動

① 導入場面

正三角形 ABC の辺 BC 上の点を P とする。点 P から辺 AB，AC に垂線を引きその交点を Q，R とする。このとき，辺や角などについてどんなことが言えますか。

操作的活動から課題を把握する活動

・正三角形の１辺の１点から別の２辺に２つの垂線を引く。

・辺や角などについて言えることを見つける。

（生徒の反応例）

$\angle BQP = \angle CRP = 90^\circ$　$\angle B = \angle C$　$\angle BPQ = \angle CPR$，$\triangle BPQ \backsim \triangle CPR$

具体的な事象から学習課題を見つける活動

・２つの垂線の長さを定規で測ってみる。点をいろいろ移動させて２つの垂線の長さを定規で図ってみる。２つの垂線の長さの和が一定であることに気づく。

② 課題追求場面

結果を予想しする活動

点を辺の頂点と一致したときに注目してその長さを測れば，いままで図った２つの垂線の長さの和と近い値になる。このことから２つの垂線の長さの和が正三角形の高さに等しいことを見つけることができる。

予想した結果を数学的に確かめる活動

前の活動から高さという補助線を引いて直角三角形の合同，長方形の性質を利用して考察する。このことから正三角形のある１辺上の点から別の２辺に垂線を引くとこの２つの垂線の長さの和が正三角形の高さに等しいことを確かめる活動につながっていく。具体的には点Pが頂点以外のBCの上にある場合の（PQ＋PR）と点Pが頂点Bと重なった場合のBR′とを比べてみる。PからBR′に引いた垂線とBR′の交点をDとする。四角形PDが長方形で直角三角形BPQ≡直角三角形PBDである。

このことからR′R＝DR′でPQ＝BDとなりPQ＋PR＝BD＋DR′＝BR′と言える。

また，この高さに注目して△ABP＋△ACP＝△ABCの関係から

$\triangle ABP = PQ \times AB \div 2$　$\triangle ACP = PR \times AC \div 2$　$\triangle ABC = BR' \times AC \div 2$

これから$\triangle ABP + \triangle ACP = \triangle ABC$

$$
\begin{aligned}
&PQ \times AB \div 2 + PR \times AC \div 2 \\
&= PQ \times AC \div 2 + PR \times AC \div 2 \ (AB = AC) \\
&= (PQ + PR) \times AC \div 2 \\
&= BH \times AC \div 2
\end{aligned}
$$

だから両辺をACで割ってPQ＋PR＝BR′が成り立つ。

話し合いなどで自分の考えを説明したり，他者の考えを取り入れる活動

自分の考えたことを回りの生徒どうして話し合う。その結果からら証明をまとめる。できた証明を代表者に黒板に書いてもらい，みんなで確かめあう。

③ 課題発展場面

課題を発展させる

垂線を引くもとの点の位置を変化させて考えてみる。（選択課題）

正三角形の内部，辺の延長線上，正三角形の外部など

７．選択数学における授業実践（２）＜発展選択＞

(1)　学習課題

「球に光をあてててできる影」

(2)　数学的活動

①　導入場面

ア．既習活動の発展から学習課題を見つける活動

円の接線の性質をもとに球の接線の性質を考える

イ．具体的な事象から，学習課題を見つける活動

球にペンライトで光をあてたときできる影について性質を考える

②　課題追求，課題解決場面

ウ．数学的な規則性を見つけ，その規則性を説明し一般化する活動

円外の１点から円に引いた接線の長さが等しいことをもとに，球に光をあてててできた影の周上の１点から球に引いた接線の長さについて性質を考える

(3)　授業展開と生徒の反応

＜①－ア．既習活動の発展から学習課題を見つける活動＞

円の定義が「１点から等しい距離にある点の集合」であることを確認し，球面の定義を考えさせた。イメージがつかめないようなので，人間が立ったまま「手を振り回す」時，手の先は球面上にある，という話題を出した。

その結果，球面を「空間内で１点から等しい距離にある点の集合」として定義すればよいことを納得した。

次に，円の接線の定義と基本性質「円の中心を通る直線に垂直な直線を平行に移動させていくと，１点だけで円と出会う場合がある。このとき，この直線は円に接するといい，この直線を円の接線，円と直線が接する点を接点という。円の接線は接点を通る半径に垂直である。」をもとに球の接線の定義と成り立つ基本性質を考えさせた。

「球の中心を通る直線に垂直な直線を平行に移動させていくと，１点だけで球と出会う場合がある。このとき，この直線は球に接するといい，この直線を球の接線，球と直線が接する点を接点という。」という定義でよく，また球においても「接線は接点を通る半径に垂直である。」という性質が成り立つと結論付けた。

次に，平面において「円外の１点から円に引いた接線の長さが等しい」こと（図１）に対応して球ではどのような性質が成り立つか考えさせた。

そのために「円外の１点から円に引いた接線の長さが等しい」ことの証明の図を，球の中心と，円外の１点とを結ぶ直線を軸に回転させるとどうなるか考えさせた。

図１

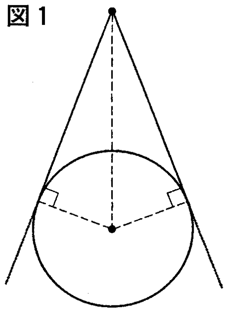
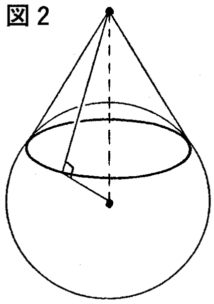


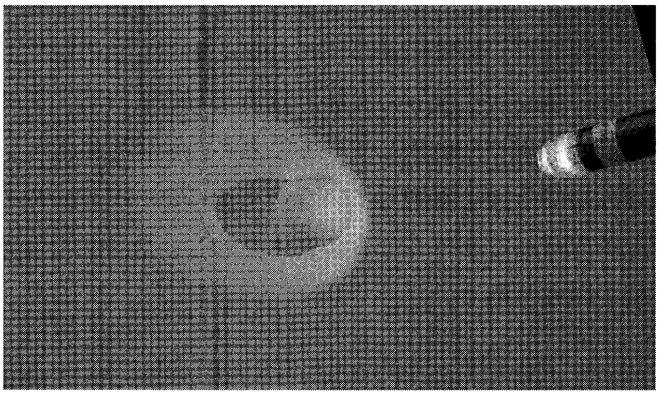
図２



その結果，生徒は球の接線が円錐の母線になること，接点の集合は円になることを発見した。(図２)

<①ーイ．具体的な事象から，学習課題を見つける活動>

机の上に置いた卓球の玉にペンライトで斜め上から光をあて，机の上にできた影を観察したところ，楕円のように見えるという声があがった。(写真１)



そこで，光源の位置を変えて影の形の変化をみた。

影の形と大きさと光源の位置の関係を断面図で考えることにした。

・光源の高さを変えないで位置を変える（図３）

・光源の高さをだんだん高くしていく（図４）

それによって影の大きさが変わることを確認した。

図３

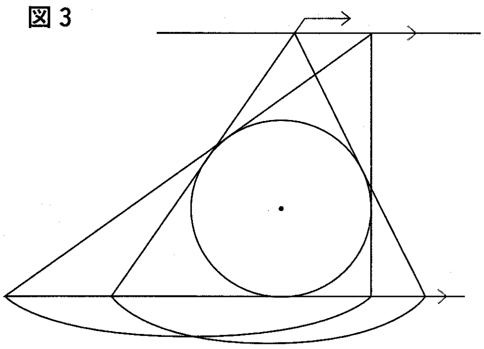
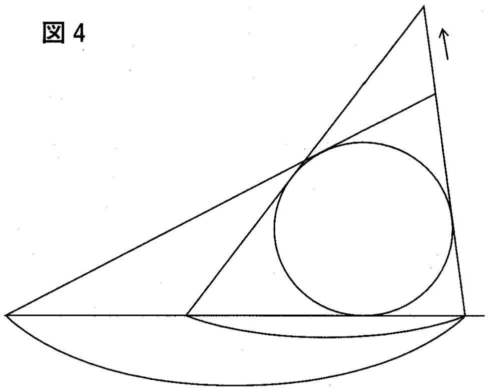


図４

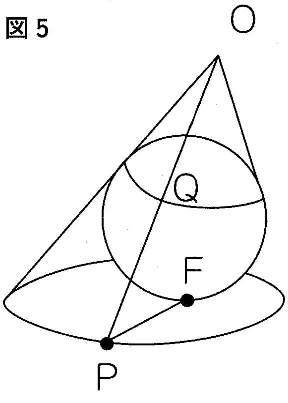


<②ーウ．数学的な規則性を見つけ，その規則性を説明し一般化する活動>

円錐の断面図において，円外の１点から円に引いた接線の長さが等しいことがいえた。

このことを空間図形へもどして，円錐の母線は球の接線になっていることを確認し，さらに「球と平面との接点から影の曲線上の特定の１点（長径の端）まで引いた線分の長さと，その点から球へ引いた接線の長さが等しい」という性質となることを確認した。(図５)

図５



8．まとめと考察

(1) 必修数学において

ゲームのルールを考える授業においては，実際に「＋のカード」と「－のカード」を使うといった具体的操作が，ルールを考えるという一般的・抽象的な思考をする手助けになたものと思われる。また，正負の数の計算法則を考えさせる授業も，日常生活の中の具体的事象を負の数で表すことによって，生徒が計算法則を一般化していくための手助けになったと思われる。このように，具体的なものを数学的な対象として扱っていくことが，生徒の事象を一般化していくことへの欲求を喚起し，その能力の育成に役立ったと思われる。ただし，発達段階がそこまで達していない生徒にとっては，やや難しい授業になったと思われる。具体的思考から抽象的思考へと移行させるのにふさわしい数学的な活動を，生徒の発達段階に応じて設定していくことが今後の課題である。

(2) 選択数学において

ア．補充選択において

生徒の感想からは，

・数学の謎を文字を使って解決できると驚いた。

・電卓・タイルなどを使い，遊びやゲームのような感じで考えることができて，楽しかった。

・新しい見方ができたり，新しい発見があってよかった。

・全体的に規則性の問題が多く，いろいろな考え方がでてきて，とても楽しかった。

など，操作的な活動を生徒が好意的に受け入れている様子がうかがえる。補充選択では，生徒の発達段階がすでに抽象的な思考を求めるところまできている様子がうかがえ，数学的な活動を通して課題を発見したりそれを解決していくことに生徒が喜びを感じているようである。今後も生徒の発達段階に応じた適切な課題を設定していくことが必要であろう。

イ．発展選択において

生徒は，平面図形の性質である円と接線の性質から類推して，空間図形の性質である球と接線の性質を考えた。また，球に光をあてたときの影としてできる楕円の，断面図上での長さの変化を見ることによって，断面図と見取り図を行き来しながら図形の性質を考えた。これらのことによって，図形のしくみを探る楽しさを味わえたと思われる。

なお，影については小学校３年の理科で学習した後は学習していない。このため，球にペンライトで光をあてたときの影は円錐の切断面である，ということの直感的理解がやや不十分だった。このことの導入の仕方について研究することが必要であると感じた。

(3) 全体を通して

必修・選択ともに数学的な活動を取り入れて授業実践を行ってきたが，その活動が生徒の発達段階に応じた適切なものでないと，生徒は活動意欲を失ってしまう。生徒の発達段階に応じた数学的な活動の設定と，評価規準の中に数学的な活動をどう位置づけるか，さらに研究を進めていきたい。これが今後の課題である。