数学的思考力を深めるために

—— 帰納と類推について ——

天　川　義　昭
池　田　克　己
薗　森　正　栄

1．はじめに

図形のみならず数量教材においても論証指導がかなりのウエイトを占めている。すべての内容にわたって論証することは生徒の心的発達段階を考えれば無理な点が多い。ときには、観察や直観によって処理していくことは教育的見地からみて妥当なことである。帰納によって法則なり定理を発見し、一般化へと展開していく方法は比較的多くの場面で利用されている。しかし、類比、類推によって定理の拡張を図ったり、新しい定理を創造したりというとらえ方は帰納ほど扱かわれていないと思う。論証という思考形式は３ヶ年間でかなりの程度まで習得していくようだ。
しかし、帰納的に考察しようとする態度や類比、類推によって新しい性質を発見しようとする積極的な態度は論証ほど習得されていないように思える。そこでもっと帰納、類推を重視した教材の取り扱いを考えなければならないと思う。図形教材の中には類推を扱うにふさわしい教材のモデルが多く存在している。それらのモデルの中からどのモデルをどんな時期にどんな内容とからませて指導していけばよいか創意工夫して行かねばならない。そして、帰納、類推という数学的な見方、考え方を養い数学的な思考力を一段と深めていきたいと思っている。

可能な限り授業の中に取り入れて実施しているが、今回は各学年でそれぞれ比較的新しい内容で生徒の考え方、とらえ方をできるだけ多く把握し問題点を分析し今後の指導の際の資料にしたいと思いいくつかの調査を実施した。

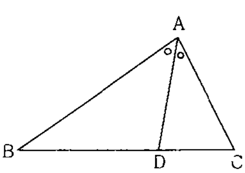
2．調　　査

図形教材のなかには、類比、類推によってまとめられる例が少なくない。生徒にとっては一見別のようにみえるが、実は類似の問題であったり、また互いに他の拡張されたものであったり、特殊化されたものであることが多い。新しい教材の学習についても低学年では特殊から一般への帰納的方法が理解され易く、学年が進むにつれ一般から特殊へ演繹的方法もくみ入れられて体系的にまとめる方法がとられている。

まず図形教材から類比される例をとりあげ、生徒がどの程度類推できるものか調査してみた。

調査１

問１．△ABCで∠Aの２等分線がBCと交わる点をDとするとき
　BA：AC＝BD：DC となることを証明せよ。



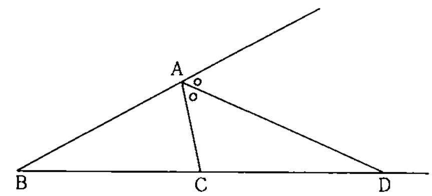
問２．前問で、∠Aの２等分線を∠Aの外角の２等分線に変えたとき、すなわち

△ABCで∠Aの外角の２等分線がBC(の延長）と交わる点をDとするとき、結論はどうなると思うか。予想をたてよ。

BA：AC＝（　　　）：（　　　）

またそれはどのようなことから、またはどのような方法で予想したか。

（　　　　　　　　　　　　　　　　）



上の結論を証明してみよ。

調査１の問１はどの教科書でも練習問題としてとりあげられている。この場合その証明方法もいろいろあるが、一般にヒントになる線等を与えて安易な問題にしてしまうことが多い。この配慮が逆に生徒の自由な思考を疎外、制約していることになっている。生徒の自由な思考の展開によって、いわゆる比の移動についての既習事項を活用し、整理する適切な例題である。ともかく、この問１の条件の一部を変更させてそのときの結論をどの程度類推できるか、またその証明と前の問１の証明との関連をどの程度関係づけられるかを調べることにした。結論はふつう

BD：CD＝…………とあるべきだろうが、生徒に結論を発見させることから考えて、故意に

BA：AC＝…………とした。

調査対象は２年の２クラス83人で、平行線と比例の指導のあとである。問１については授業でとりあげ、その後１ヶ月経て次の単元に入ってからこの調査を実施した。問２については授業では全く触れずにしてあった。

表Ｉ

		問１(内角)の証明		
		正　解	否	計
問２(外角)の証明	正解	45	0	45
	否	34	4	38
計		79	4	83

表II　問1 正解の79人について

		問２の結論の予想	
		正	誤
問２の証明	正解	45	0
	否	10	24
計		55	24

表１は問１、問２の正解のようすを調べたもので、問１（内角）の証明ができたのは79人（約95%）でそのうち問２の証明もできたのは45人（約54%）であった。

問１の正解者79人について問２の結論の予想を調べると表IIに示すように55人（約70%）が正しい予想をたてている。またそれはどのようなことからその予想をたてたかをみると次に示すように大半は問１とほぼ同じ結論だろうとか、同じ方法で平行線をひきながら証明の見通しがたったから、または何とか解けそうだからというのが多い。

表III

予想した結論が正しかった55人について どのような方法で予想をたてたか	問２(外角)の証明	
	正　解	否
内角の２等分線で成り立ったから外角のときも同じだと思う	18	4
前問と同じように平行線をひいていったら証明の見通しがついた	16	
平行線をひいてBA:ACをうつしていったらできそうだ	2	
はじめBC:CD(またはBD:BC) になると思ったがうまくいかず BD:CDとしてみたらうまくいきそうだった	4	
何となく	5	1
?		5
合　計	45	10

予想した結論が誤まった24人について、実際にその結論を列挙すると次の通りである。左辺のＢＡ：ＡＣが折線の比であるためにそのまま右辺に折れ線の比（三角形の相似　？）をかいたり、問１では右辺がＢＤ：ＣＤという直線上の比であったが、まさか問２でＢＤ：ＣＤのように一部重なってくるとは思わなかったのであろう。すなわち問１、とは別に新しく考えたり、くらべて考えてもそれは極くうわべの視覚的な比較にすぎない。

表IV　予想が誤まっていた結論

AD:DC	AD:AC	CD:AC	BD:AD	BC:AC	BD:AB	BC:CD	BD:BC	２：１	?	計
1	1	2	1	2	3	4	3	1	6	24

証明方法の類比について

表Ｖは問１の正解者79人について、その証明方法と問２の証明方法（できなかったものについては、図にひかれていた補助線）との関係を表にしたものである。証明方法は生徒が用いたものおよび、用いようと思って答案にひかれた補助線等より一応10種類に分けた。

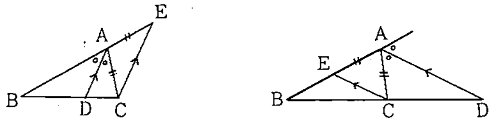
問１を授業で取り扱ったとき、生徒の方から発表されたのはクラスによって異なるが、大体１、２、３、７、８、９の方法だった。但しそのとき７を用いた生徒はその前半を１の方法で解いていた。即ち要点のみ示すと、

AB上に点E、BD上に点E′をとりAE＝AC、EE′ // AD　とすれば、△ADE≡△ADC

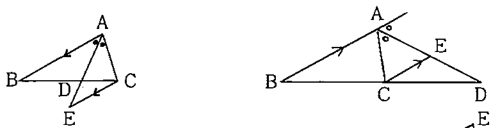
DE＝DE′　となり　BA：AC＝BA：AE＝BD：DE′＝BD：DE＝BD：DC

また問２を７の方法で解いた生徒は何れも面積で考えたのでなく、問１を定理として用いている。問１で10の方法を用いた生徒は、授業のときには発表されなかったものである。また問２へそのまま発展させることはできなかったようである。

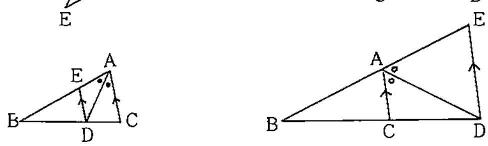
証明方法

1\. 

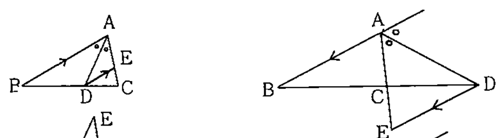
BA：AC＝BA：AE
＝BD：DC

2\. 

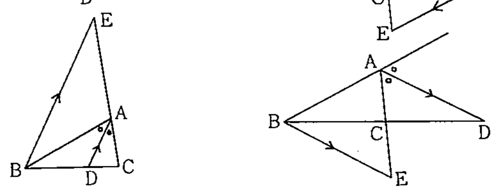
BA：AC＝BA：EC
＝BD：DC

3\. 

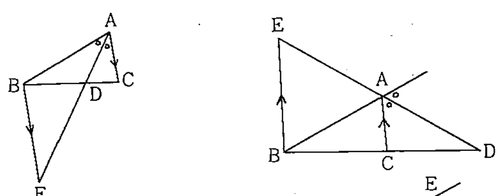
BA：AC＝BE：ED
＝BE：EA
＝BD：DC

4\. 

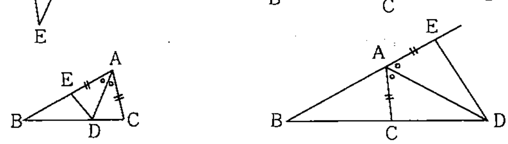
BA：AC＝DE：EC
＝AE：EC
＝BD：DC

5\. 

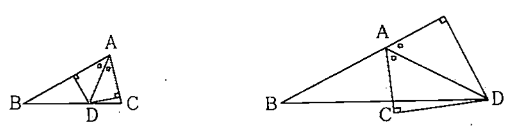
BA：AC＝EA：AC
＝BD：DC

6\. 

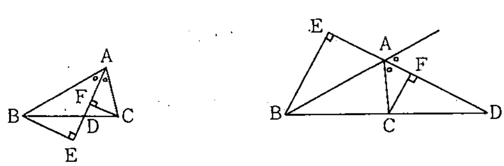
BA：AC＝BE：AC
＝BD：DC

7\. 

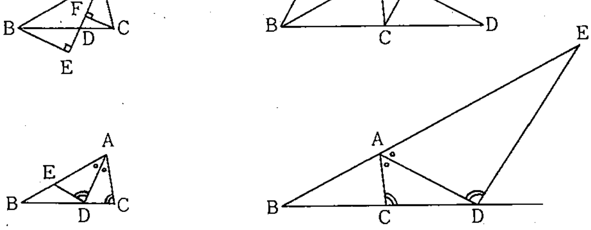
BA：AC＝BA：AE
＝BD：DE
＝BD：DC

8\. 

BA：AC＝△DBA：△DAC
＝△ABD：△ADC
＝BD：DC

9\. 

BA：AC＝BE：FC
＝BD：DC

10\. 

BA：BD＝AD：ED
＝AC：DC
∴ BA：AC＝BD：DC

表Ⅴ

問1（内角）の証明の正解者79人について

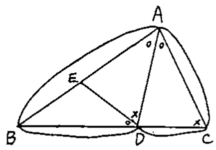
問1（内角）の証明方法と問2（外角）の証明方法（補助線）との関係

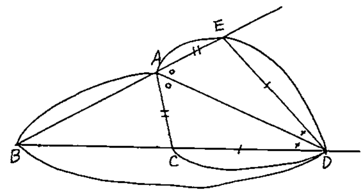
表中（　）内の数は、問2（外角）の証明への補助線をひいたが証明のできなかった人数……予想の誤まった者を含む。

問2（外角）の証明に用いた、または証明しようとしてひいた補助線のひき方

問1（内角）の証明法 ＼ 問2（外角）の証明法	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11（その他）	計
1	19 (1)	1	3			1	1	1				26 (1)
2	1	1										2
3	9 (17)	(3)	3 (1)						(1)			12 (22)
4		(1)										(1)
5	(3)											(3)
6	1	1										2
7	1 (3)	1 (1)								(1)		2 (5)
8								1				1
9												
10												
11 その他	(2)											(2)
計	31 (26)	4 (5)	6 (1)			1	1	2	(1)	(1)		45 (34)

生徒の答案例





DよりABへの直線が、$\angle ACD=\angle ADE$となるように、AB上に点Eをとる。

$\triangle ACD$と、$\triangle ADE$で、

$\angle DAC=\angle EAD$

$\angle ACD=\angle ADE$ だから $\triangle ACD \backsim \triangle ADE$

$\therefore DE:AD=DC:AC$ ―①

$\triangle BDE$と$\triangle BAD$で、

$\angle CAD+\angle ACD=\angle ADB$

$\angle ACD=\angle ADE$だから、

$\angle BDE=\angle CAD=\angle DAB$

$\angle B$は共通

よって$\triangle BDE \backsim \triangle BAD$

$\therefore BD:DE=BA:AD$ ―②

①,②より $BD:BA=DC:AC$

$\therefore BA:AC=BD:DC$

$AC=AE$となる点EをABの延長上にとる

$\triangle DAE$と$\triangle DAC$において

$AE=AC$

$DA=DA$ (共通)

$\angle DAE=\angle DAC$

$\therefore \triangle DAE \equiv \triangle DAC$ ―①

$\therefore \angle ADE=\angle ADC$ ―②

$\triangle DEB$において

②より DAは$\angle ECB$の二等分線である

$\therefore ED:DB=EA:AB$

ところが ①より $AE=AC$, $DE=DC$

$\therefore DC:DB=AC:AB$

したがって $BA:AC=BD:CD$

結論は一見上手に予想、推測できたようにみえても、証明の手順まで同じように類推できるとはいえず、その数は決して多いといえない。表Vの対角線上の24人がそれにあたる。前述のように問１と同じように平行線をひいて考えたといっても、全て記号まで含めて同じ方法をとったとは限らず、全般的には図の形だけから外見的に判断していくようである。そこで証明方法の類推の傾向を分析してみると

(ア)	問１で方法１──→問２で方法１	点ＣからＤＡと平行な直線をひく………	19（１）
(イ)	問１で方法３──→問２で方法３	点ＤからＣＡと平行な直線をひく………	３（１）
(ウ)	問１で方法１──→問２で方法３	外側に向けて平行線をひく………………	９（17）
(エ)	問１で方法３──→問２で方法１	内側に向けて平行線をひく………………	３（０）
(オ)	問１で方法１──→問２で方法７	ＢＡの延長上にＡＣと等しい線分をとる	１（３）

全般的には、生徒には類推しようとしている傾向はみられるが、まだ視覚的な類推のみの域を脱していない者が多い。このことは上の(ウ)、(エ)、(オ)の欄がそれを示していると思われる。（難易度からみると(ウ)、(オ)は難かしくなり(エ)は易しくなったと感ずるであろう。）類比、類推による学習の初期の段階であると思われる。証明のときによく用いられる「同様にして………」という述べ方の指導と合わせて、安易な気持で使うものでなく、そのうちにある論理的な意味が含まれていることの指導が望まれると思う。

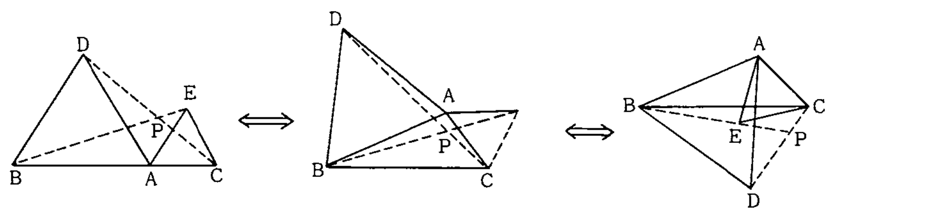
次に問２の証明できなかった34人について、はじめの結論の予想がどうであったかを調べたのが表Ⅵである。結論の予想が誤まっていた24人については証明できぬのは当然のことである。この中にはもし正しい結論を与えていたら多分できたであろうと思われる生徒が約半数になる。彼らには結論を含めた問であるから再度予想をふり返り吟味する必要を指導せねばならない。

表Ⅵ　問２(外角)の証明のできなかった34人について　結論の予想の可・否

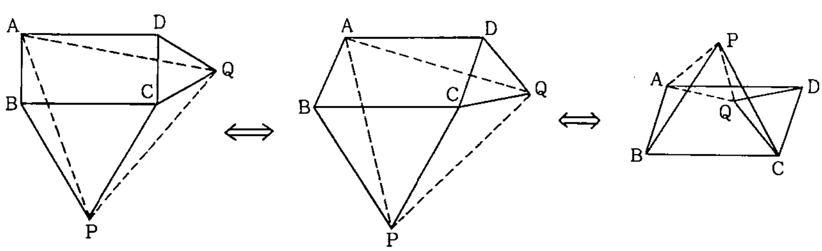
問２(外角)の証明にひいた補助線	結論の予想	
	正解　10人	否　24人
1		1
2		
3	7	15
4	1	
5		3
6		
7	2	3
8		
9		
10		
11		2

条件を変更することによって類似の問題をつくる例

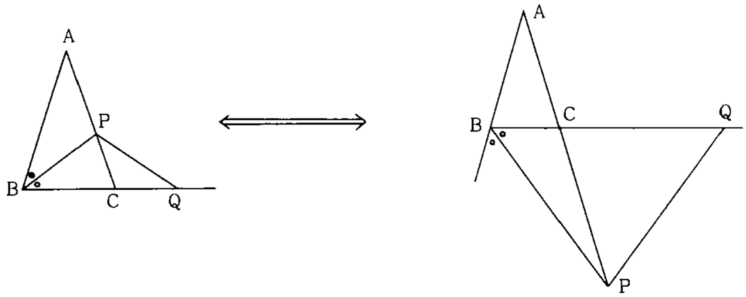
(1)BA、ACを一辺とする正三角形DBA、EACを同じ側につくり、BEとCDの交点をPとすれば BE＝DC、∠DPB＝60°となる。



(2)長方形（平行四辺形）の辺BC、CDを各々一辺とする正三角形BCP、CDQを外側（内側）につくれば、△APQは正三角形となる。



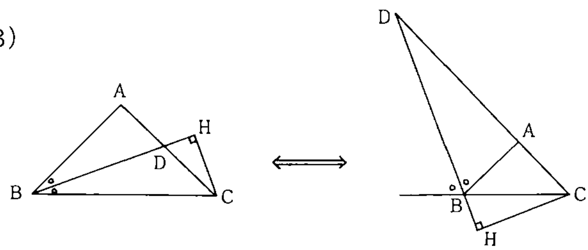
(3)BCを底辺とする二等辺三角形ABCで、∠B（の外角）の２等分線とAC（の延長）との交点をPとし、BCの延長上にCP＝CQとなる点Qをとれば、△BPQは二等辺三角形となる。



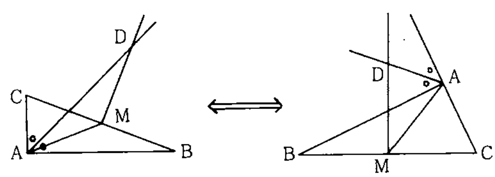
(4)BCを底辺とする直角二等辺三角形ABCで、∠B（の外角）の２等分線とAC（の延長）との交点をDとし、CよりBDにひいた垂線をCHとすれば

BD＝２･CH

BC＝AD＋AB（BC＝AD－AB）

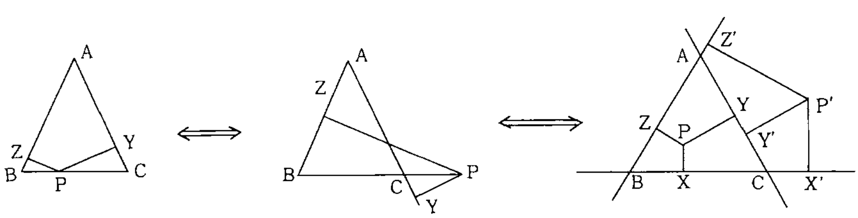


(5)直角三角形ＡＢＣの斜辺BCの垂直二等分線と、∠A（の外角）の２等分線の交点をＤとし、BCの中点をＭとすれば、MA＝MD

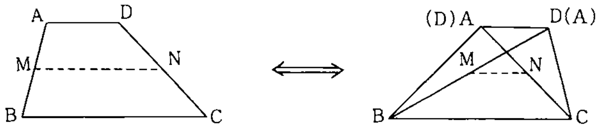


(6)二等辺三角形ABCで、底辺BC（の延長）上の点ＰよりAC、ABへ垂線PY、PZをひくとき、PYとPZの和（差）は一定である。

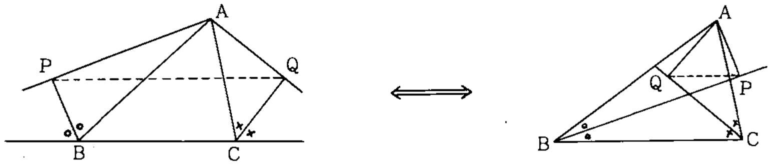
（正三角形ＡＢＣ内の１点Ｐより各辺におろした垂線ＰＸ、ＰＹ、ＰＺの和は一定となる。また点Ｐが△ＡＢＣの外部にあるとき、さらに辺の延長上にあるとき、３つの垂線ＰＸ、ＰＹ、ＰＺの間にどのような関係が成り立つか。）



(7)台形ABCDでAD∥BCであるとき、AB、DC（対角線DB、AC）の中点をM、Nとすれば、MNはADとBCとの和（差）の２分の１である。



(8)△ABCの∠B、∠Cの各外角（内角）の２等分線に頂点Aからひいた垂線をAP、AQとすれば、　PQ∥BC、PQはAB＋ACとBCとの和（差）の２分の１である。



３年間で習得した知識、技能をもとにして新しい問題に出会ったとき、それをどのように解決していくか、生徒の素朴な考え方、とらえ方を把握するために

(1)　既習の内容にも関連するがいままでに扱ったことのない内容をもった問題

(2)　興味関心がもてそれに積極的にとりくめる問題

(3)　既習の知識技能をもとにしていろいろと生徒なりに見通しをたてたり考察できる問題

等を考慮して調査２、３を作成した。

―調査２―

斜辺の長さをc，直角をはさむ２辺の長さをa, bとしたとき、a, b, cがすべて整数となる直角三角形を考える。a, b, cがそれぞれどんな値になる場合があるか調べたい。

a	b	c
3	4	5
5	12	13
7	24	25
9	40	41
11	60	61
13		
15		

(1)　左の表の空所をうめよ。

(2)　a, b, cの間にどんな規則なり関係があると予想できるか。

(3)　bの値の数の列４，12，24，40，60………に着目する。

始めから３番目の数24は　24＝４＋８＋12

５番目の数60は　60＝４＋８＋12＋16＋20　と表わすことができる。

㋐　始めからn番目の数は上のように考えると次のように表わすことができる。

終わり２つの(　)にあてはまるnの式を入れよ。

４＋８＋12＋16＋………＋(　)＋(　)

㋑　n番目にくる数をnの式で表わしたい。下にのべてある公式を用いて求めよ。

数の列x_1，x_2，………x_nがある。(x_1から始まってx_nで終わり、数が全部でn個ある。)

どのとなり合った２数の差をとってもつねに一定であるとき

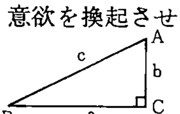
$$x_1+x_2+\cdots\cdots+x_n=\frac{n(x_1+x_n)}{2}$$ である。

たとえば、数の列３，７，11，15………75，79では、どのとなり合った２数の差をとってもつねに４である。数は全部で20個ある。ゆえに

$$3+7+11+15+\cdots\cdots+75+79=\frac{20(3+79)}{2}=820$$

(4)　a, cの始めからn番目にくる数をそれぞれnの式で表わせ。

始めて取り組む内容であるから、調査に入る前に問題の内容、構造を把握させて、興味、関心意欲を換起させることが必要だと思う。



直角三角形ABCで、３辺の長さがすべて整数になる直角三角形をいろいろと考えてみよう。その列として知っているものをあげさせると、次頁の表のようなものがあがる。ここで、６，８，10；10，24，26等はあまり面白くない。それらは、３，４，

a	b	c
3	4	5
6	8	10
5	12	13
10	24	26
⋮	⋮	⋮

5;5，12，13からなるもっとも簡単な直角三角形と相似になるからである。おたがいいに相似にならない本質的に異なったものをいろいろと考えたい。3，4，5;5，12 13のほかにどんなものがあるか調べてみよう。この程度の事前指導をしたあと調査問査問題を配布して解かせたところ以下に述べるような結果がえられた。調査人数は79人である。

(1)について　正答、誤答は下の表のようである。無答は3人、b,cともに最後の空所をまちがったものが4人であった。どういう方法でb,cの値を求めたかは調べるものはないが、おそらく(2)で述べる変化の規則性に目をつけて求めたものが多いと思われる。

c＼b	正答	誤答
正答	68	2
誤答	1	8

(2)について　この調査のねらいは(2)にある。表より関数的な見方、考え方がいかに生かされて正しい予想ができるか。更に、どんなすばらしい予想がでてくるか生徒の実態を把握することがねらいである。

変化に着目したもの

まず、大局的な見方として

① aの値が増加するにつれて、bの値も増加し、その値は4の倍数になっている。また cの値も増加し、その値はすべて奇数である。　………22人

局所的な見方として

② aの値がすべて奇数で、2ずつ増加するにつれて、b,cではともに第2階差は一定である。　………38人

③ aの値が2ずつ増加するにつれて、b,cではその増加量が等しく、8,12,16,…と増加する。　………22人

④ aがnからn＋2に変化すると、bもcもともに2(n+1) 増加する。　………8人

⑤ a+c−bは4，6，8，10…となりa+b−cは2，4，6，8，…となり、第2階差は一定である。　………6人

対応に着目したもの

対応に着目してa,b,cの間にどんな関係式が成立するか帰納から直観から見出したと思われるものが多かった。

① $c=b+1$……58人　② $a^2=b+c$……16人　③ $b=\frac{a^2-1}{2}$　$c=\frac{a^2+1}{2}$…11人

④ $c-a=2n^2$　$b-a=2n^2-1$，ただしnは自然数　………4人

⑤ $a+c-b=2n+2$ または $a+c-b=\frac{b}{n}$，$a+b-c=2n$，$b^2=2n^2(a+c)$ ただしnは自然数　………5人

⑥ $a=3$ のとき $b=3\times1+1=4$，$c=3\times1+2=5$；$a=5$ のとき $b=5\times2+2$，$c=5\times2+3$；$a=7$ のとき $b=7\times3+3$，$c=7\times3+4$ 以下同様に　………6人

その他

① a,b,cのうち少なくとも1つは素数である。

② a+b−cもa+b+cもともに偶数である。

関数での主なねらいは変化であり対応である。2変数のものについての考察が主で3変数のものに

ついての考察はほとんど扱っていない。だから、どう対処して処理し予想をたてるか興味のあるところである。変化に対しては、おおむね予想された見方がでてきている。一方の変数の増加量に対して、他方の変数の増加量がどうなっているかに着目して、第２階差が一定であることに気づいた生徒が約⅓いたことは心強い。大局的な見方や局所的見方がある程度身についているようである。

対応に対してはこちらで予想していなかったことがいくつかあった。aとbの関係、aとcの関係、bとcの関係というように２変数の関係を予測したものから、a, b, cの関係までにも予測した生徒がいたりして、生徒の洞察力、直観力のすばらしさに驚たんしている。どういうふうに予測したか、そのプロセスがかかれていないので生徒の着想を明確につかむことはできない。しかし３年生にもなると、直観力、洞察力を足場にして更に一歩進んで理づめで関係を導き出していく傾向が強いようである。たとえば$b=\frac{a^2-1}{2}$の関係を次のように導き出している。

① $a^2+b^2=c^2$ に $c=b+1$ を代入して $a^2+b^2=(b+1)^2$ ゆえに $b=\frac{a^2-1}{2}$

② $b=\frac{1}{2}a(a+1)-\frac{1}{2}(a+1)=\frac{1}{2}(a^2-1)$ とか$b=\frac{1}{2}a(a-1)+\frac{1}{2}(a-1)=\frac{1}{2}(a^2-1)$

この過程で$b=\frac{1}{2}a(a+1)-\frac{1}{2}(a+1)$, $b=\frac{1}{2}a(a-1)+\frac{1}{2}(a-1)$ の関係をどうして導き出したものか。表にでている値から推定したものだとするとすばらしい洞察力だと思う。

更に対応に着目して変化するもののなかに不変のものを発見することは関数指導の重要な柱である。和、差、積、商が一定という見方は関数指導において扱っている。この見方が生かされて、$c-a$, $b-a$に着目し、$c-a$は２，８，18, 32, 50……となって$c-a=2n^2$という関係がえられる。$b-a$についても同様である。$c-a$, $b-a$に着目した着想がすばらしい。こういう芽を十分に伸ばしていく指導が不断から十分なされていなければならないと痛感した。

変化のところで　$a+b-c$, $a+c-b$に着目した着想もすばらしい。$a+b-c$は２，４，６，８…となることから　$a+b-c=2n$の関係がえられる。$a+c-b$は４，６，８，10……となることより$a+c-b=2n+2$の関係が導きだされるのだが、$a+c-b=\frac{b}{n}$という関係を導き出したものもいる。

⑥のように一般化するところまでには到達していないが、具体例から帰納的にａとｂの関係やａとｃの関係を見出している。おそらく、一般化することまで目を向けさせれば、

$b=an+n$,　$c=an+n+1$　の関係まで導き出せると思う。

調査問題でｂのｎ番目にくる数をｎの式で表わすのにヒントを与えたが、自由に考えさせて求めさせた方がいろいろな方法や考え方をみることができてよかったのではないかと反省している。

帰納や類推によってえられる事柄はあくまでも予想である。いくつかの具体例から帰納的に性質を予想するのだから正しいもの正しくないものや余り価値のないもの等いろいろとでてくる。それらによって生きた授業が生まれてくることが多い。そのためにどの程度の具体例をあげていけばようか考えねばならない。与えられた表の値から、ａ，ｂ，ｃの少なくとも１つは素数であるという予想をたてた生徒が数名いた。この予想は当然でてくるものである。しかし、この予想は正しくない。たとえば$a=21$, $b=220$, $c=221$ 等がある。予想が正しければ１年の段階では実測、観察を用い、２年３年の段階では論証を用いることになる。正しくなければ反例が１つあげるとよいわけだが反例を探すことに手間がかかって容易でないことがある。

(3)　$\boxed{a=2n+1\quad 正解43人}$

奇数は２でわると１余る数であるから、ｎを自然数とすると　$2n+1$と表わされると考えるものが多い。ａは３から始まる奇数。だから、ｎを自然数とすると、$3+2(n-1)=2n+1$ として求めたものも数名いた。これは、初項が３、公差２の等差数列の一般項を求める方法であるが、

そのようなことを知らなくても、３，５，７，９……と続く奇数の列をみて帰納から出発して法則を見出し求めたものである。また、$a^2=b+c$ に $b=2n^2+2n$、$c=2n^2+2n+1$ を代入して求めた生徒が６人いた。ヒントに与えた等差数列の和を求める公式を用いようとして誤った生徒が８人いた。公式の中味が十分に理解できなかったことが原因である。これは未習の内容であるから当然の結果である。

$b=2n^2+2n$　正解52人

ａを求めるよりもｂを求める方がむずかしいのだが、結果は予想外に後者の方が高かった。ヒントによらなくても、③、④、⑥の関係式を用いれば、$a=2n+1$ を代入することによって、b, c をnの式で表わすことができるわけだが、これ等の関係を用いたものが６人いた。

③の㋐の( )内にｎの式を正しく入れたものが71人で、そのうちの45人のものが、ヒントを用いて解答していた。

$c=2n^2+2n+1$　正解32人

少なくともｂの正解者がほとんどできると思ったが予想外に悪かった。$c=b+1$ の関係を見出していながら、それを利用できなかったものが13人もいた。ｂとｃの関係に着目せずに、ｃの数の列に着目してｂと同様にヒントを利用しようとして誤ったものが数名いた。

類推を取り扱うには、概念の類推、性質の類推、論証の類推と３つの面を考え相互に関連づけていかねばならない。数学の問題を上手に解くには、この論証の類推が有効である。似ている点と異なる点をまず明確につかむことが大切である。ｂの求め方を利用するとすれば、異なっている点をどう考えることによって、ｂの方法に帰着できるかと考察する態度をいろいろな場面を利用して養っていくことが重要だと思う。だから、ｂの求め方を利用しようとするねらいはよいわけだが、実際には上手に解けたものは１人もいなかった。たとえば、$\frac{n(5+4n)}{2}$，$\frac{n\{5+4(n-1)\}}{2}$ といった誤答があった。

調査３

自然数を３でわると余りが０になるか、１になるか、２になるかである。余りが０になる自然数の集合をＡ、余りが１になる自然表の集合をＢ、余りが２になる自然数の集合をＣとする。次の各問に答えよ。

(1)　ｎを整数として集合Ａ、Ｂ、Ｃに属する数をそれぞれｎの式で表わせ。

(2)　㋐　1^2, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2………のような平方数を３でわったときの余りを( )内にかけ。

1^2…(　　) 2^2…(　　) 3^2…(　　) 4^2…(　　) 5^2…(　　) 6^2…(　　) 7^2…(　　)

㋑　㋐の結果からどんなことが推定できるか。推定したことを文章で述べよ。

㋒　㋑で推定したことが正しいことを証明せよ。

問題の内容からもわかるように法則や定理を帰納的にどの程度に推定できるか。そして、推定したことがらを、既習の定理を用いてどの程度に証明できるかを問うものである。

(1)は(2)の㋒で証明するために必要な基本事項である。調査人数79人に対して正解は56人であった。主な解答は次のようなものである。

①Ａ、Ｂ、Ｃに属する数を $\frac{n}{3}$，$\frac{n-1}{3}$，$\frac{n-2}{3}$ と表わしたものが10人いた。Ｂに属する数はすべて３でわると余りが１になるからｎ－１は３でわれる。ゆえに $\frac{n-1}{3}$　つまり、Ｂに属する数をｎと

考えて処理したものと思われる。$\frac{n}{3}$，$\frac{n-2}{3}$ も同様である。Bの要素を具体的に１，４，７，10，13……のようにかきならべて、これ等の数をｎを用いて一般にどう表わせばよいだろうかと問題を提起すれば上のような誤りが生じなかったのではないかと思う。

② Ａに属する数をｎとするとＢに属する数はｎ＋１，ｃに属する数をｎ＋２と表わしたものが５人いた。この誤りも①と同様で問題にあげているｎの意味が十分につかめなかったことが原因である。

(2) 正解は65人。予想していたより誤答が多かった。１人の誤答者を除いて全員が1^2を３でわったときの余りが求められていない。余りを０と答えたものが５人、余りを０，１，としたものが２人、－２としたものが２人等である。

(3) 予想された推定がでている。文章表現も３年生になれば適確に要領よく述べている。

① ３の倍数の平方を３でわると余りが０になるが、その他の数の平方を３でわると余りがすべて１になる。 ………31人

② 平方数を３でわると余りは０か１になる。 ………５人

③ 平方数を３でわると余りが２になることはない。 ………２人

以上が正しい予想で計38人である。次に推定が一部のみなされているものをあげると

④ ３の倍数の平方を３でわると余りが０になる。 ………２人

⑤ ３の倍数以外の数の平方を３でわると余りはすべて１になる。 ………14人

また、異なったものとして

⑥ 平方数を３でわると余りが１，１，０，１，１，０，１，１，０，…の順序よくならんでいる。 ………17人(11人)

主な推定は以上のようなもので約半数の生徒が正しい予想をしていた。もう少し多くの生徒が正しい予想をしてくれるかと期待していた。慣れていないことも原因しているが③のような否定の文章表現に気づく生徒は少ない。余りが１，１，０，１，1,0….の順に順序よくならんでいると推定した17人のうち11人の生徒がこの事柄のみ推定している。このように帰納から本質的な価値ある予想をつかむことはやはりむずかしいようである。

(2) で1^2を３でわったときの余りをまちがえた生徒14人のおもな推定は次のようである。

① 余りを０と答えた生徒は

(ア) 0, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 1……というふうに０をはさみながら１のならぶ数が１つずつふえていく。

(イ) 0, 1, 0, 1, 0, 1, と順序よく 0, 1, が交互にならんでいる。

(ウ) 自然数の平方を３でわると余りが０か１である。

(エ) ３の約数及び３の倍数の平方を３でわると余りが０になる。

(ア)、(イ)、は与えられた資料から全体を推定したためにおこった誤りである。自分のたてた予想が正しいかどうか更に具体的に調べてみるという態度があればかんたんに気づくはずである。このような態度を日頃から養っていかなければならない。(オ)の推定はでてこない。１が３の倍数でないことよりこの推定の誤りに気づかねばならない。

② 余りを０，１としたり、－2 とした生徒は

(ア) ３の倍数の平方を３でわると余りが０になる。

(イ) ３の倍数の平方は３でわれるが、１を除いた３の倍数以外の数の平方を３でわると余りが１になる。この推定はえられた資料から忠実に細かい点まで考えたものでよい数学的態度である。

③　余りを2とした生徒は

3の倍数の平方を3でわると余りが0となるが、3より大きくて3の倍数以外の数の平方を3でわると余りが1となる。3より小さい数のときは3との差が余りになっている。

(4)　予想したことを検証するには証明が必要になってくる。(1)の結果を用いて正しく証明できた生徒は23人であった。また、(1)をまちがえたがしかし証明のできたものが5人いた。たとえば、Aに属する数をaとするとB、Cに属する数はそれぞれ$a+1$，$a+2$，または$a-2$，$a-1$と表わされる。a^2を3でわるとaは3の倍数。だからa^2を3でわると余りが0になる。

$(a+2)^2$を3でわるとき$(a+2)^2=a^2+4a+3+1$，aは3の倍数。だからa^2+4a+3は3の倍数ゆえに　余りが1になる。

$(a+1)^2$を3でわったときも同様に証明している。また

Bに属する数をnとする。n^2-1が3でわれることをいえばよい。$n^2-1=(n-1)(n+1)$

ここでnは3でわると1余る数であるから$n-1$は3でわれる。ゆえに　n^2-1は3でわれる。つまり　n^2を3でわると余りが1となる。cに属する数をnとするとnは3でわると2余る数だから$n+1$は3でわれる。ゆえに　n^2-1は3でわれる。つまり　n^2を3でわると余りが1となる。　一般性のかける証明をした生徒が3人いた。

$3^2=3\times3$，$6^2=6\times6$，$9^2=9\times9$のようにどの数も3の倍数。ゆえに　3^2，6^2，9^2はいずれも3でわれる。$4^2=4\times4$，$7^2=7\times7$のようなときは4も7も3でわると余りが1だから4^2，7^2を3でわったときの余りは1^2を3でわったときの余りになる。$5^2=5\times5$，$8^2=8\times8$，のようなときは5も8も3でわると余りが2。だから5^2，8^2を3でわったときの余りは2^2を3でわったときの余りに等しいから1となる。いつもこのようにいえるから予想は正しいといえる。

3の倍数以外の数の平方を3でわると余りが1になると推定した14人の生徒のうちで証明できたものが11人いた。そのうちの5人の生徒は3の倍数の平方は3でわると余りが0になることにふれているが推定のところでこの部分がぬけていた。この中の1人の生徒は

「nが3の倍数でないときn^2-1は3でわり切れる」をもとにして「ある整数aがnの倍数でないとき　$a^{n-1}-1$はnでわり切れる」という予想までたてていた。この生徒は数学に大変な興味をもち優秀な生徒である。翌日私のところに来てあの予想は誤りであった。反例がみつかったといいこの予想を修正してフェルマーの定理を作ってきた。本人はそんなことを知る由もないわけだが君のたてた予想は整数論にでてくるフェルマーの定理だ。すばらしい予想だと最大の賛辞を与えた。本人のよろこびようは大変なものだった。

⑥の推定のみした11人の生徒のうち半数のものが大体次のように述べている。

$(3n-2)^2=3(3n^2-4n+1)+1$，$(3n-1)^2=3(3n^2-2n)+1$，$(3n)^2=3(3n)$　となるからnを自然数とすると余りが1，1，0，1，1，0……となってくる。

帰納、類推の働きの特長は発見的であり創造的である点である。自分たちが工夫して作り出した法則，定理であるという意識をもたせ、発見、創造のよろこびを味合うことができるようにすることが大切である。また、自分は気がつかなかったが他の人の意見を聞くことによって数学的な見方、考え方を学ぶことができる点もすばらしいものである。なになにを証明せよという形式に流れるよりも結論を予想したり、仮定の一部をかえることによって結論がどうなるか予想させたりして、推測したことがらが正しいことを検証していくというプロセスが重要である。帰納から論証へのスラップや帰納から一般化へのステップにかなり抵抗があることが多い。

調査4

1. 次の㋐～㋓は2つの2けたの数とその積を示している。

㋐ 72 × 78 = 5616　㋑ 53 × 57 = 3021　㋒ 35 × 35 = 1225　㋓ 41 × 49 = 2009

(a) 上の2数の積は簡便な方法で求めたものである。どんな方法で求めたかかきなさい。

(b) 上の2数の間にはどんな関係があると思うか。

2.(a) 次の㋕～㋘の2数の積を求める簡便な方法をかきなさい。

㋕ 77 × 28　㋖ 88 × 37　㋗ 46 × 33　㋘ 19 × 55

(b) ㋕～㋘の各2数の特徴は何であると思うか。

この調査は、ある条件をもつ2けたの数の積を簡単な方法で求めることを推しはかることができるかどうか。また、どのように考えたかを知ろうとしたものである。

調査対象は1年生でこのような簡便法についての学習は今までにはない。この簡便法の証明には、3年で学習する多項式の積が必要であり、現段階では証明はできない。しかし1年生の段階でこの調査についてどのように反応するかを知りたいと思う。

1(a)の調査結果　（調査対象1年D組41人）

簡便法が読みとれる生徒数	37人
簡便法が読みとれない生徒数	4人

簡便法が読みとれる生徒が41人中37人だから殆どの生徒が方法を一応抽き出すことができる。4つの例題で適していると思われる。

調査問題の2(a)は1(a)で得た簡便法や2数の条件を手がかりにして、その簡便法を考えさせることにした。2数の積　即ち結果を示さないときはどうなるか　結果が示されているときと示されていないときでは推測のようすが異なると思われる。

2(a)の調査結果　（調査対象1年D組41人）

簡便法がつくり出せる生徒数	25人
簡便法がつくり出せない生徒数	16人

簡便法がつくり出せる生徒数は41人中25人である。1(a)の簡便法が読みとれる生徒数37人にくらべると少ないが、25人は予想をこえる数である。生徒の推察力は強いことがわかる。簡便法がつくり出せない生徒16人のうち、無答者が6人で誤答者が10人である。誤答については後に述べる。

簡便法はどのようにするのか次に示します。

1の簡便法

㋐

	7 2
×	7 8
5 6	1 6

7×(7+1)
＝7×8
＝56

2×8
＝16

㋑ 53×57＝3021　㋒ 35×35＝1225　㋓ 41×49＝2009

2の簡便法

㋕

	7 7
×	2 8
2 1	5 6

7×(2＋1)
＝7×3
＝21

7×8
＝56

㋖ 88×37＝3256　㋗ 46×33＝1518　㋘ 19×55＝1045

1の簡便法の証明

十の位の数が同じで、一の位の数の和が10である2つの2けたの数を10a＋b、10a＋cとする。

$(10a+b)(10a+c)$
$=100a^2+10ac+10ab+bc$
$=100a^2+10a(b+c)+bc$
　$b+c=10$だから
$=100a^2+100a+bc$
$=100a(a+1)+bc$

2の簡便法の証明

十の位と一の位の数が同じ2けたの数を、10a＋a、十の位の数と一の位の数の和が10である2けたの数を10b＋cとする。

$(10a+a)(10b+c)$
$=100ab+10ab+10ac+ac$
$=100ab+10a(b+c)+ac$
　$b+c=10$だから
$=100ab+100a+ac$
$=100a(b+1)+ac$

上の2つ式の（a＋1）　（b＋1）はともに乗数の十の位の数に1を加えることを示しており、簡便法の中で1を加える操作の理由である。

調査の対象は1年生だから上のような多項式を用いて証明することはできない。証明はぬきにして、簡便法はどんな方法で行なわれたか述べさせた。その調査2(1)(a)の結果をみる。

最も多かったのは次のような捉え方である。

㋐ 72×78＝5616

千、百の位については（7×7＋7）＝49＋7＝56　とするものである。

41人中19人である。生徒は7×7に7を加えるという捉え方をする。勿論証明ぬきのことだから、4つの例題からうつし出されることであればどのようであってもよいわけである。教師には既成の7×（7＋1）がぬき切れないので意外に思った。勿論7×（7＋1）　と捉えた生徒はおり、41人中11人である。

それ以外の考えでは　72×78＝70×（2＋78）＋2×8

70の（２＋78）倍、つまり70が（２＋78）個あるとする考えである。これは２＋８＝10の条件をよく用いていると思う。他には　２＋８＝10をどちらかの数の＋の位に加え、80×70＝5600をつくると考えている。また他には四捨五入して72×78＝70×80＋２×８　と考え、同じ２数35×35についてはどちらか一方を切り捨て、他方を切り上げてと補って説明している。

次に示すのはよく考えたものである。

$$
\begin{aligned}
72\times78 &= (70+2)\times(70+8)\\
&= 70^2+\underbrace{70\times(2+8)}+2\times8\\
&= 7^2\times100+7\times100+2\times8\\
&= 100\times(7^2+7)+2\times8
\end{aligned}
$$

この生徒は一般的な証明を知っていて、具体例72×78＝5616　の簡便法の理由を述べたのかどうかわからない。とてもよく考える生徒であるから、㋐の計算のしくみを考えて述べたものと思う。理由の中の　70×（２＋８）には工夫がみられる。左のかけ算の筆算形式から　70×２＋70×８　をよみ　70の（２＋８）倍が生ずることを見ぬいていると思う。この生徒の他にも、前述の（７×７＋７）を用いた19人、７×（７＋１）を用いた11人の中にも、説明の中に70の（２＋８）倍の考えを使っている生徒がいる。このことから思いあたることは日常　72×78の計算は左の(A)のように何の疑念もなく行なっているが、時には位取りや数の分解合成を視点として見直し(B)の形式をとらせるのも意義深く思う。(B)の考えは（70＋２）×（70＋８）で多項式の積の展開に通ずる。この簡便法は証明が３年で行なうということで１年２年では指導していないが上記のように理由を考えれば興味深く学習できると思う。

㋐
```
  7 2
× 7 8
-------
5 6 1 6
```

(A)
```
   7 2
 × 7 8
--------
  5 7 6
5 0 4
--------
5 6 1 6
```

(B)
```
   7 2
 × 7 8
--------
     16
    56
    14
   49
--------
  5616
```

2(a)の調査の結果　簡便法がつくり出せない生徒が16人いた。この中無答者が６人で誤答者が10人であった。この誤答者10人の中７人が問題㋕㋖については正しいが問題㋗㋘について誤っている点が目立っている。問題㋗㋘の誤り方はいろいろあり、全く模倣的なもの、読み切れないものがある。模倣的なものは次の㋗のように乗数の十の位の数③に１を加えて行なっている。

㋗
```
    4 6
 × ③ 3
--------
1 6 1 8
```

これは㋐～㋓、㋕、㋖がともに乗数の十の位の数に１を加えて行なっているので、それを単に模倣したものである。これらの生徒は学習態度に問題がある。㋗　46×33＝1518　は筆算形式で結果を求めれば自分の考えた結結果とくらべれば誤りに気づくはずである。逆に正しい結果を出してから、簡便法を推測する手順をとればよいと思う。十の位の数と一の位の数が同じである２けたの数が㋕、㋖では被乗数であり、㋗、㋘では乗数になっていることが抽き出せない、気づかない生徒である。

次に１(a)と２(a)の正答数と誤答数の結果を表にすると次のようである。１(a)、２(a)の簡便法を正しく考えられた生徒は23人で、ともにできなかった生徒は２人である。１(a)ができ、２(a)ができなかった生徒が14人である。この簡便法を素材にしての類推

１(a)　　２(a)	正答数	無答数、誤答数	計
正答数	２３	１４	３７
無答数、誤答数	２	２	４
計	２５	１６	４１

の状態は１年生では表の通りである。この状態がよいとか悪いとかを取り上げるのではなく、この種の問題では表のような状況になることを教師は知り、日々の学習指導に役立たせる資料にしたいと思う。

1(b) ㋐～㋓の２数の間には　どんな関係があると思うか。

調査の結果は次のようである。

項　　　目	度　　数
十の位が同じ数で 一の位の和が10	11
十の位が同じ数	12
一の位の和が10	4
２数の和が偶数	2
２数の差が偶数	1
偶数どうし奇数どうし	1
偶数どうし奇数どうしで 十の位が同じ	1
無　　答	9

2(b) ㋕～㋘の各２数の特徴は何であると思うか。

調査の結果は次のようである。

項　　　目	度　　数
十の位と一の位が同じ数で 十の位と一の位の数の和10	4
十の位と一の位が同じ数	12
一方が11の倍数	1
両方とも２けたの数	1
無　答	22

1(a) ㋐～㋓の簡便法ができるためには２数の十の位が同じで、かつ一の位の数の和が10でなければならない。生徒には証明をぬきにしているので、上の２つの条件を期待することは難しいと思う。しかし11人の生徒がそれに答え、その中には理由を述べている生徒がいる。十の位の数が同じであることが読みとれる生徒は12＋11＋１＝24(人)であり、一の位の和が10であることを読みとれる生徒　４＋11＝15(人)より多く、数が同じであることを見ぬくことは和を考えることより、よく働くことがわかる。２数の和、差が偶数、２数が偶数どうし、奇数どうしというように偶数、奇数に目をつけて見ようとしていることも数は少ないが考えさせられる。

2(b)の㋕～㋘の２数の特徴については　無答が22人で多い。十の位と一の位の数が同じであることを読みとる生徒は12＋１＋４＝17(人)であり、十の位と一の位の数の和が10であることを読みとる生徒４人より多い。

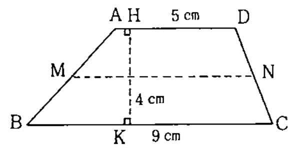
類推はその生徒の既習事項がいかに働くがよくわかる。この調査も簡便法の証明ができる３年生を対象にするとどのように反応するか。恐らく簡便法が使える理由を視点にして考えると思う。

そのような段階では更に次の㋚、㋛のように、３けたの数について簡便法はどうすればよいか考えさせてみる。また、㋜、㋝のように一の位の数が同じく、十の位の数の和が10である２けたの数について簡便法をつくらせてみることができる。

㋚　$\begin{array}{r} 104 \\ \times 106 \\ \hline \end{array}$　　㋛　$\begin{array}{r} 123 \\ \times 127 \\ \hline \end{array}$　　㋜　$\begin{array}{r} 27 \\ \times 87 \\ \hline \end{array}$　　㋝　$\begin{array}{r} 35 \\ \times 75 \\ \hline \end{array}$

調査５

1．台形ＡＢＣＤでＡＤ//ＢＣ、ＡＤ＝５cm、ＢＣ＝９cm
台形の高さＨＫ＝４cmである。



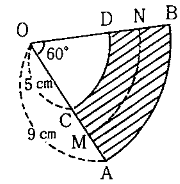
(1) 台形ＡＢＣＤの面積を求めなさい。

(2) 辺ＡＢ、辺ＣＤの中点をそれぞれM、Ｎとする。

㋐ 台形ＡＢＣＤの面積は線分MＮの長さと台形の高さＨＫとの積と考えてよいだろうか。

㋑ 上の問で「よい」と答えた人は　その理由をかきなさい。

2．中心角が60°のおうぎ形ＯＡＢとＯＣＤが右図に示してある。ＯＡ＝９cm、ＯＣ＝５cmである。



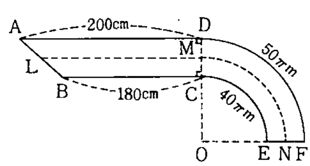
(1) 図の斜線の部分の面積を求めなさい。

(2) 線分ＡＣ、線分ＢＤの中点をそれぞれM、Ｎとする。
OMを半径とし、中心角∠MＯＮ＝60°のおうぎ形ＯMＮをつくる。

㋐ 図の斜線の部分の面積は弧MＮの長さと線分ＡＣの長さとの積と考えてよいだろうか。

㋑ 上の問で「よい」と答えた人は　その理由をかきなさい。

3．右の図はＡＤ//ＢＣ、∠Ｃ＝∠Ｄ＝90°の台形と中心角90°の２つのおうぎ形ＯＤＦとＯＣＥでできる図形ＣＥＦＤとの道路である。ＡＤ＝200ｍ、ＢＣ＝180ｍ、ＣＤ＝20ｍ、ＯＣ＝80ｍ、弧ＣＥ＝40 π ｍ、弧ＤＦ＝50 π ｍである。



(1) 道路ＡＢＣＥＦＤの面積を求めなさい。

(2) (1)の道路の面積は道路の中央線ＬMＮの長さと道路の幅ＣＤの長さとの積と考えてよいだろうか。

この調査では、台形の面積は線分MＮの長さと台形の高さとの積であることがわかるかどうか。次に、おうぎ形の斜線の部分の面積は弧MＮの長さと線分ＡＣとの積であることを考えるとき、上の台形での知識がどのように働くかを調べることにした。

調査対象は１年生（１年Ｄ組40人）で図形の計量についての学習は58年11月に行ない、この調査は59年３月に実施した。

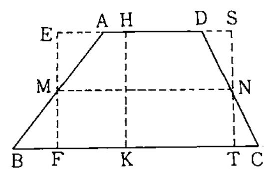
1(1)、(2)ア、2(1)、(2)アの調査の結果は次のようである。

	正答者数	誤答者数
1(1)　台形の面積　　28cm²	39	1
2(2)　扇形斜線部面積　$\frac{28}{3}\pi$ cm²	36	4

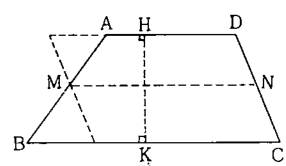
	よ　い	わるい
1(2)ア　台形の面積　MN×HK	37	3
2(2)ア　扇形斜線部面積　$\overset{\frown}{\mathrm{MN}}$×AC	30	10

台形の面積、扇形の斜線部の面積の正答者はそれぞれ40人中39人、36人で殆どの生徒が求められる。

「台形の面積をMN×HKで求めてよいか」という問いに対して「よい」と答えた生徒は40人中37人である。「よい」と答えた生徒のその理由について調べてみる。

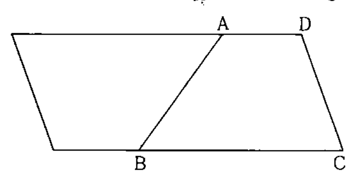


(A) 台形を長方形に変形し、2辺がMN、HKの長方形と考える生徒で22人である。△AEM＝△BFM、△DNS＝CNTを直観的にみとめている。合同を用いて理由を述べている生徒は2人である。



(B) 台形を平行四辺形に変形し、底辺の長さをMN、その底辺に対する高さをHKとして考える生徒が2名である。

(C) 台形の中点連結定理を知っているかどうかわからないけれど　$\mathrm{MN}=\frac{\mathrm{AD}+\mathrm{BC}}{2}$を用いて　台形の面積を求める公式を　$\mathrm{HK}\times\frac{\mathrm{AD}+\mathrm{BC}}{2}$として読み直している。この種の生徒3人で、よく考える生徒である。



(D) AD＝5cm、BC＝9cm　よりMN＝7cmとし、7×4＝28(cm²)　で　1(1)で求めた台形の面積28cm²と同じだから「よい」と答えている。6人の生徒である。
この考え方には問題がある。AD、BC、HKの長さに数値が与えられているのでその数値を用いたわけであるが理由の一般性を考えると不十分である。調査の対象が1年生だから数値を与えたので、このような考え方がでるのもやむをえないと思う。

(E) 理由がない、理由がはっきりしない生徒が4人である。

理由についての生徒数をまとめると　(A)　22人　(B)　2人　(C)　3人　(D)　6人　(E)　4人

「扇形の斜線部の面積を$\overset{\frown}{\mathrm{MN}}$×ACで求めてよいか」という問に対して「よい」と答えた生徒は40人中30人である。「よい」と答えた生徒の理由としていることを調べてみる。

(F) 扇形の斜線部を台形や長方形に変形して考えようとしているのが目立って多く、30人中20人である。

図1

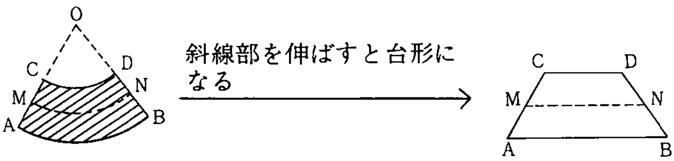


図2

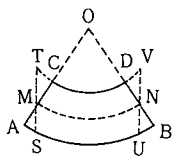


図3

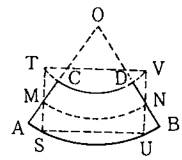
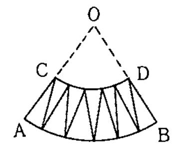


図4



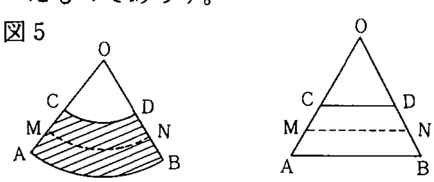
18人の生徒の理由を整理すると上の図のように代表される。これらの考え方は、一見正しそうであるが誤っている。図1では線分ＡＣは台形の高さにはならない。図2では図形ＡＳＭと図形ＣＴＭは等積にはならない。図3では弓形ＳＵと多形ＴＣＤＶが等積にはならない。

いずれも位相的にはよく考えられ、直覚的で1年生らしさがあふれている。1の問題で台形の面積について考えたので、これを手がかりに扇形について結果を推しはかろうとしている。

図4は、授業中の円の面積を求める学習から思いついたものであろう。

図5は、扇形の面積は（弧の長さ）×半径×$\frac{1}{2}$である。これは弧の長さを底辺とし、半径を高さとする三角形の面積と等しい。だから扇形斜線部ＡＢＤＣは台形ＡＢＤＣとなる。台形の面積はＭＮ×（台形の高さ）だから扇形斜線部の面積は

図5



$\overset{\frown}{MN}\times AC$　となる。これは扇形の面積は　$\frac{1}{2}(\overset{\frown}{AB}\times AO)$ で三角形の面積を求める公式$\frac{1}{2}$（底辺×高さ）と同型であることを適用したのである。

扇形斜線部の面積が$\overset{\frown}{MN}\times AC$と等しくなるかどうかを計算によって確かめる方法をとった生徒は6名であった。$\overset{\frown}{MN}=(7\times2)\pi\times\frac{1}{6}$、　$AC=4$　より　$\overset{\frown}{MN}\times AC=\frac{14}{6}\pi\times4=\frac{28}{3}\pi$ (cm²)

これは2(1)で求めた面積$\frac{28}{3}\pi$ (cm²) と等しいことを述べ理由としている。

理由についての生徒数をまとめると、

(F) 図形を変形して台形、平行四辺形にする生徒………20人

(G) 計算によって確かめる生徒　………6人

(H) 無答者　………4人

図形を変形して考える(F)の生徒が30人中20人いるのは目立っている。これは台形についての調査に引き続いて扇形についての調査だから、前者は後者を類推する手がかりになることは強い。両者を時間的に切りはなした時はどうなるであろうか。区分求積的な考えや扇形の面積＝$\frac{1}{2}\times$(弧の長さ)×(半径) を用いる生徒がふえるかどうであろうか。(D)、(G)からわかるように計算によって確かめる生徒が意外に少ない。生徒は図形による視覚を通して考えるようである。図1から図5まで、誤りはあるがよく考えている、また授業中での学習をいかして推理しようとしている。

3．おわりに

(1) 数学科の学習内容の中には帰納、類推によって思考をすすめていく場面が多い。時には一般化し、時には特殊化し、各々の内容や学年に応じて適宜この方法によって理解を深めていくことが必要であると思う。

(2) 生徒には類比、類推しようとする傾向はみられるが、まだ視覚的な類推の域にとどまっているものが多い。これは初期の段階として当然であるが、次第に論理的な思考の面にまで高めていくための練習と指導が必要である。

(3) 条件の一部を変えて類似の問題をつくるときは、仮定と結論の両方を類比させ、その関係をつかませ、更にその証明法をもくらべさせるとよい。

(4) 帰納、類推は発見的、創造的な学習であるから、自由な発想、直観力、洞察力を十分重んじた指導でなければならない。

(5) 帰納によって法則や定理を見出すとき誤まった推定がなされる場合がおこる。そのことが授業の展開で有効な場合が多いので、具体例をどの程度あげるか考慮する必要がある。

(6) 推定された事柄を論証によって検証に入る段階ではどうしても抵抗が大きい。どのように橋渡しをして証明を展開していけばよいか工夫を要するところである。

(7) 発見、創造のよろこびを与え、問題に対する興味、関心、意欲をもたせるには帰納、類推は非常に有効でかつ適切だと思う。したがって結論を与えず、結論を予測し、検証するという過程をできるだけ多くとり入れていくことが必要である。またそれに最も適した内容を検討、精選し、生徒のもっている素晴らしい芽を大切にして、このようなものの見方、考え方を伸ばしていきたいものである。