数学的思考力を深めるために

―― 間接証明法について ――

天　川　義　昭
池　田　克　己
蘭　森　正　栄

はじめに

中学校の図形の論証では直観的に真なるものを設定し、その上に論理的な推論を行う。さらには論理を通して部分的ではあるが体系化を指導する。しかし、中学生の心的発達を考えたとき、完全に論証が行われるわけではなく、図形の性質を直観的に把握することが多い。論証による性質把握と直観による性質把握が共存するところに図形指導の問題点がある。

現在中学校の図形の論証では直接証明法を指導している。間接証明法については殆ど指導していない。これには理由が考えられる。①中学校では直接証明法の指導だけ充分である。②中学校では間接証明法を用いる場が少ない。③間接証明法は難しく、生徒は理解しにくい。などがあげられる。

しかし、中学校の教材の中に間接証明を用いるとよいものもあり、また日常間接証明を無意識に使っていることもある。そこで間接証明について意識させることは中学生として学習の意義があると思う。

本校の生徒について、①日常のことがら　平易な教材を用いて、間接証明の素地があるかどうか実態調査をする。②間接証明法の指導事例について。③各社の教科書で間接証明法の取扱いがどのようになっているか調べる。

Ⅰ．調　　査

生徒が実際にどの程度間接的な説明を使うか、また使おうとしているかを調べるために次のような問題について調査した。問題の選択にあたっては次の点に留意した。

(1)　同一の問題で各学年の特長を比較したいため、極く平易な内容の問題にする。

(2)　一般に間接的な証明をすると思われる問題にする。

次のことがらが、すべて正しいわけを説明しなさい。

1．三角形で３つの内角のうち、２つの内角が鈍角になることはない。

2．２つの長方形の面積が異なれば、この２つの長方形は合同（重ね合わすことのできる２つの図形は合同であるという。）でない。

3．２つの自然数ａ、ｂの積が奇数ならば、ａ、ｂともに奇数である。

4．自然数ａの平方が偶数ならば、ａは偶数である。

5．２つの数 x 、ｙ の和が正の数ならば、x 、ｙ の少なくとも一方は正の数である。つまり $x+y>0$ ならば $x>0$ または $y>0$ である。

6．$ab=0$　ならば　$a=0$　または　$b=0$　である。

上記の問題についての調査を各学年について実施した結果、生徒の解答例は次のようである。ただし、用語の使い方で不充分であったり、証明として不完全なところがあったりしたが、大体の説明の方針だけをくみとって、生徒の書いたままの文で掲載した。

1．三角形で３つの内角のうち、２つの内角が鈍角になることはない。

(1)　間接的に考える。

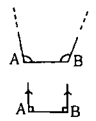
○　三角形の内角の和は180°である。２つの内角が90°より大きいならば、２つの角だけで180°をこえてしまうことになる。（あとの１つの角がなくなってしまう。マイナスになってしまう。）だから２つの内角が鈍角になる三角形はありえない。

(2)　作図から考える。

①　２つの角が90°より大きかったら最低四角形でないと成り立たぬ。

②　図のように∠Aと∠Bが鈍角だと３つの辺でかけなくなる。

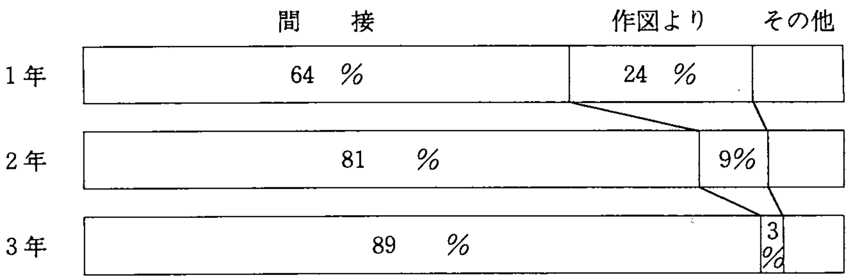
③　２つの角が最低90°と考えてみると平行になって三角形にならない。



(3)　そ の 他

①　三角形の内角の和は180°だから

②　２つの角が100°だとすると、２角で200°になってしまう。



2．２つの長方形の面積が異なれば、この２つの長方形は合同（重ね合わすことのできる２つの図形は合同であるという。）でない。

(1)　直接的に考える。

①　長方形の面積＝たて×よこ　である。面積がちがうという場合は、たて、よこのどちらか（あるいは両方）の長さが異なるときで、長さが異なれば当然２つの長方形は重ならない。すなわち合同でない。（２、３年）

②　面積が異なるということは、たて、よこの長さが異なってくるからであって、面積が異なる２つの長方形は合同にならない。（１、２、３年）

③　面積の大きい方を小さい方に合わせようとして、たてを合わせるとよこが異なり、よこを合わせようとするとたてが合わなくなるから重ならない。（１年）

④　同じ面積ならどんな形をしていても、ここをとりあそこにくっつけたり変形させて同じ形にして合同にすることができる。しかし、面積がちがえば大きい面積の方がだぶってきてしまい合同にならない。（１年）

(2) 間接的に考える。

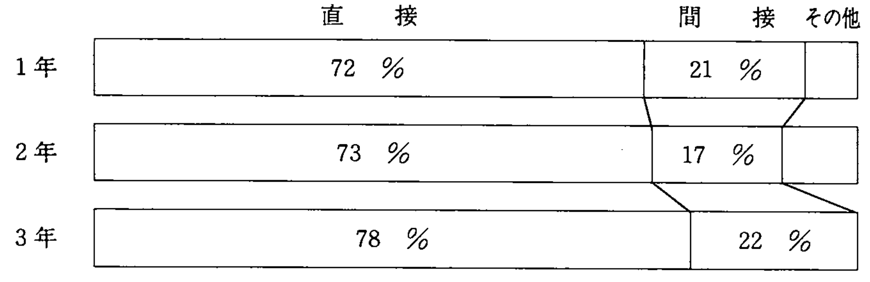
① もし合同だと面積が等しくなる。よって面積が異なれば合同といえない。（3年）

② 仮りに2つの長方形が合同だとすると、この2つのたてとよこの辺がそれぞれ等しくなる。よって面積が等しくなるはずだが、この場合は面積が等しくない。よって2つの長方形は合同でない。（2年）

③ 長方形の公式は、たて×よこ。合同になるには2つの長方形のたてとよこが同じ長さでなくてはいけない。たてとよこが同じ長さなら当然面積も等しい。だから合同になるには、面積が同じといいかえることができる。したがって面積がちがえば合同でないということが成り立つ。（1年）

(3) そ の 他

○ 面積が異なるということは形も変わってくるから合同でない。（1、2年）



3．2つの自然数a、bの積が奇数ならば、a、bともに奇数である。

(1) 間接的に考える。

① aまたはbが偶数だと、その積は偶数になる。

$a=2m$ なら $ab=2mb$、　$b=2n$ なら $ab=2an$

よって、積が奇数の場合はa、bともに奇数でなければならぬ。（3年）

② a×b＝奇数のとき、aが奇数でない、すなわちaを偶数とする。するとabは偶数のb倍で偶数となり、はじめの仮定と矛盾が生ずる。bについても同様。よってa、bとも偶数でない。よってa、bともに奇数である。（3年）

③ a、bともに奇数でないと、aとbの積は奇数にならないからである。（2年）

④ aかbに偶数が入れば、偶数をかけるということは2の倍数をかけるということだから必ず偶数になってしまい奇数にならない。だからa、bともに奇数でなければならぬ。（1年）

⑤ 偶数にどんな自然数をかけても偶数になる。だから奇数どうしかけないと答は奇数にならない。（1年）

⑥ 奇数を $2x+1$、偶数を $2y$ とおく。

奇数×偶数は　$(2x+1)\times 2y=4xy+2y=2(2xy+y)$　で偶数

偶数×偶数は　$2y\times 2y'=4yy'=2(2yy')$　で偶数

ところが、奇数×奇数は $(2x+1)(2x'+1)=4xx'+2x+2x'+1=2(2xx'+x+x')+1$ で奇数、よって積が奇数になるのは奇数×奇数のときしかない。（3年）

⑦ 偶数×偶数＝偶数、　偶数×奇数＝偶数、　奇数×奇数＝奇数

２つの自然数をかけるとき、上の３つの場合が考えられるが、そのうち積が奇数になるのは奇数×奇数のときだけである。(２年)

(2) 逆を考える。

① x、ｙを自然数とする。ａ＝２x＋１、　ｂ＝２ｙ＋１

$(2x+1)(2y+1)=4xy+2x+2y+1=2(2xy+x+y)+1$

奇数ａ、ｂの積は奇数になる。（３年）

② ａ、ｂが奇数のとき、ａ×ｂは奇数を奇数回加えることになり奇数になる。（２年）

③ ａ×ｂ＝(ａ－１)×ｂ＋ｂ　ａから１をひいて偶数にし、奇数ｂをかけると偶数になる。その偶数に奇数をたせば奇数になる。（１年）

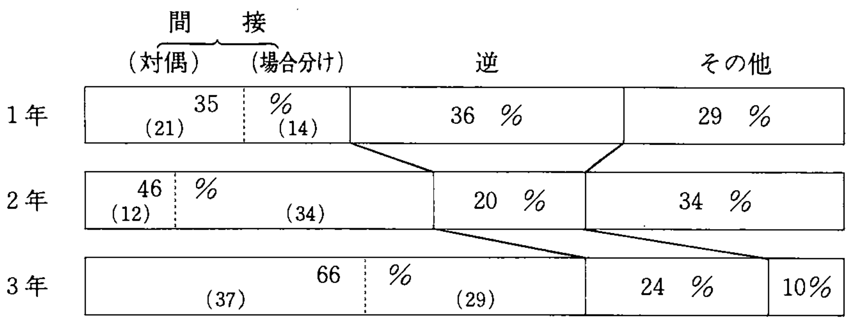
④ 奇数というのは、その値から１をひくと偶数になる。よって奇数に奇数をたすと半ぱの１と１が合わさって２となり偶数になる。だから奇数個たす（奇数倍する）ということは、偶数に奇数をたすことになり、１半ぱになるから、ａとｂが奇数なら積も奇数となる。(１年)

(3) そ の 他

① 偶数どうしの積は偶数、奇数どうしの積は奇数だから、ａ、ｂともに奇数である。(２年)

② 積が15　だとすると　どれも奇数どうしである。　(１年)

a	1	3	5	15
b	15	5	3	1



４．自然数ａの平方が偶数ならば、ａは偶数である。

(1) 直接的に考える。

① ２数の積が偶数になるのは、どちらかが偶数でなければならない。

偶数×偶数---------(1)　　偶数×奇数---------(2)　の通り

この場合平方だから２数は同じ数でなければならぬから(2)ではない。だから(1)の場合しかない。よってａの平方が偶数のときａは偶数である。（２、３年）

② 平方が偶数だから、自然数ａの平方の素因数に２が含まれている。ということは、もとの数ａにも素因数２があったといえる。だからａは偶数といえる。（１、２年）

(2) 間接的に考える。

① ａを奇数とすると、a^2 は奇数だから、仮定の a^2 は偶数と矛盾が生ずるので、はじめのａを奇数としたのがおかしいことになる。ゆえにａは偶数である。（３年）

② ａが偶数じゃないと、ａの平方が偶数にならないから、a^2 が偶数ならａは偶数である。

ａ×ａ＝ａ×(ａ－１)＋ａ＝奇数×(偶数)＋奇数＝奇数　（２年）

③　aが奇数だとすると、その平方は奇数×奇数＝奇数　になってしまう。
だからaの平方が偶数になるということは、aも偶数になるということだ。（１年）

④　aが奇数ならば　$a = 2t + 1$　で表わされ、

$a^2 = (2t + 1)^2 = 4t^2 + 4t + 1 = 2(2t^2 + 2t) + 1$　と奇数になる。

aが偶数なら　$a = 2t$　で表わされ　$a^2 = (2t)^2 = 2 \times 2t^2$　で偶数になる。

aは奇数か偶数の２通りで、平方も２通りしかない。
よってa^2が偶数なら、aは偶数である。（３年）

⑤　偶数の平方は　偶数×偶数＝偶数、　奇数の平方は　奇数×奇数＝奇数　だけである。
つまり、平方が偶数になるのは、もとの数aが偶数でないと成り立たぬ。（１、２年）

(3)　逆あるいは裏を考える。

①　$a = 2n$　とすれば、$a^2 = (2n)^2 = 4n^2 = 2 \cdot 2n^2$　すなわち、偶数の平方は偶数（３年）

②　aの平方が奇数の場合、aは奇数だから、のこるaの平方が偶数の場合はaは偶数であることが成り立つ。（３年）

③　偶数に偶数をかければ偶数になるから、aの平方が偶数ならaは偶数である。（２、３年）

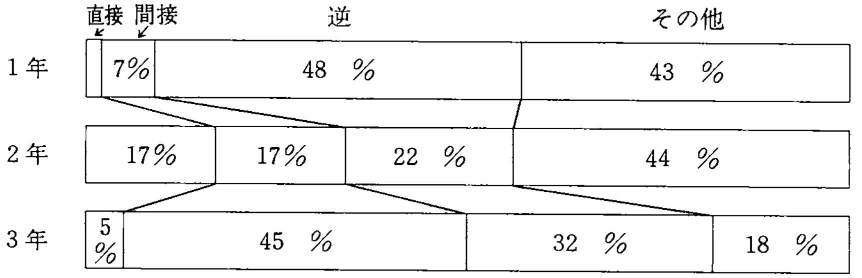
④　偶数と偶数とかけると偶数になるにきまっている。（１年）

(4)　そ の 他

①　aが$\sqrt{4}$なら２、$\sqrt{9}$なら３、つまり偶数なら偶数、奇数なら奇数。これと同じでaの平方が偶数ならaは偶数である。（３年）

②　$a^2 = 16$　とすると$a = 4$、$a^2 = 9$とすると$a = 3$、同様にa^2が偶数ならaは偶数。（２年）

③　$a = 4$　とすると$a \times a = 4 + 4 + 4 + 4$　（１年）



５．２つの数x、yの和が正の数ならば、x、yの少なくとも一方は正の数である。つまり
$x + y > 0$　ならば$x > 0$またはy > 0である。

（$x > 0$　または　$y > 0$　の否定命題は　$x \leqq 0$　かつ　$y \leqq 0$　であるが、大部分は$x < 0$　かつ　$y < 0$　と考えて答えている。厳密性に欠け不完全であるが、その考え方だけとり上げて、そのままで掲載してある。）

(1)　直接的に考える。

①　x、yともに正の数ならば　$x + y > 0$

yがもし　$y < 0$ならば　$x + y > 0$　だから　$0 > y > 0 - x$

すなわち　$0 > -x$　となり　そのxを移項して　$x > 0$　となる。

もし　$x < 0$　ならば　同じように　$y > 0$　となる。

よって、yが正か、xが正か、xとyともに正の数でなければならぬ。（３年）

② $x+y>0$　でたとえば　xが-2だと、あと一方のyはxの絶対値より大きい正の数でなければ0より大きい数にならないから、yは正の数
もちろん２数が正の数でもよいから、どちらかは正数である。（１、２年）

(2) 間接的に考える。

① もし両方とも０以下のとき　$x\leqq 0$……(1)　　$y\leqq 0$……(2)
(1)の両辺にyを加える。$x+y\leqq y$　ところが　(2)より$y\leqq 0$　だから
$x+y\leqq y\leqq 0$　となり　$x+y$は０以下となって仮定にあわない。
ゆえにxとyの少なくとも一方は正の数となる。（３年）

② $x+y>0$　ならば$x>0$または　$y>0$　にならないと仮定すると、$x\leqq 0$、$y\leqq 0$
$x=0$　のとき　$0+y>0$　$\therefore y>0$
$x<0$　のとき　$x+y>0$　だから　$y>-x>0$　$\therefore y>0$
$y=0$　のとき　$x+0>0$　$\therefore x>0$
$y<0$　のとき　$x+y>0$　だから　$x>-y>0$　$\therefore x>0$
よって、どれもこの仮定が成り立たないから　$x+y>0$　なら　$x>0$または$y>0$（３年）

③ どちらか一方が正の数でないと、負の数つまり両方とも負の数だったら、ぜったいにその和は負の数になってしまうから。（２年）

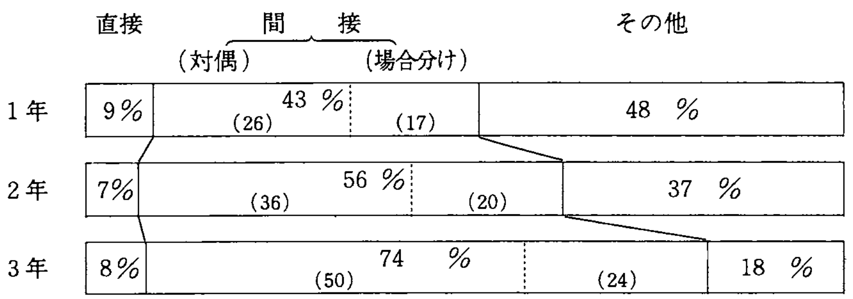
④ xが(－)、yも(－)だと、(－)＋(－)は正の数にならない。したがって、x、yの少なくてもどちらかが正の数でないといけない。（１年）

⑤ もし、x、yの両方が負の数だったら、負の記号のまま絶対値をたすため正の数になれるはずがない。それもどちらか一方が正の数のとき、その数の絶対値が、もう一方の負の数の絶対値より大きければ正の数になれる。（１年）

⑥ ２つの数x、yが、$x>0$　かつ　$y>0$　ならば　$x+y>0$
$x<0$　かつ　$y<0$　ならば　$x+y<0$
$x>0$　かつ　$y<0$　かつ　$|x|>|y|$　ならば　$x+y>0$
$x<0$　かつ　$y>0$　かつ　$|x|<|y|$　ならば　$x+y>0$
上のことから　$x+y>0$　ならば　$x>0$　または　$y>0$　（３年）

⑦ 両方とも負の数だったら　$(-2)+(-1)=-3$　のように負になる。
一方が正で、もう一方が負のとき、　$2+(-1)=1$　のように正になる。
ただし、正の数の絶対値が負の数の絶対値より大きくないとだめ!!
両方とも正の数だったら　$2+2=4$　のように正になる。
だから、２数の和が正の数だと、一方か両方が正の数になる。（１年）

(3) そ の 他



6．ab＝0　ならば　a＝0　または　b＝0　である。

(1)　直接的に考える。

○　bが0以外の数のとき　$a=\frac{0}{b}=0$　だからa＝0。同様にaが0以外の数のときも、b＝0となる。　だから　ab＝0　のときa＝0またはb＝0　（3年）

(2)　間接的に考える。

①　a≠0、b≠0　とすると、ab≠0　となり矛盾が生ずるので、a≠0、b≠0　ではないことになる。よって　a＝0またはb＝0　である。（3年）

②　aもbも0でないとすると、aでわったときとbでわったとき、左辺がbとaになるはずである。ところがab＝0　より　$\frac{ab}{a}=\frac{0}{a}$、$\frac{ab}{b}=\frac{0}{b}$　となってどちらも右辺は0で固定されている。だからこのことはおかしく、どちらかが0か、またはどちらも0でなければならぬ。（2年）

③　負の数または正の数をどんなにくみ合わせてかけても0にはならない。だから、どちらかが0でないと　ab＝0　にならない。（1年）

④　どんな数でも、0をかけないと積は0にならない。（2年）

⑤　a、bともに正の数か負の数だと、かけたら0にならない。どちらかが0であれば、もう一方がどんな数であっても積は0になる。つまり最低でも、どちらかが0でなくてはならない。（1、2年）

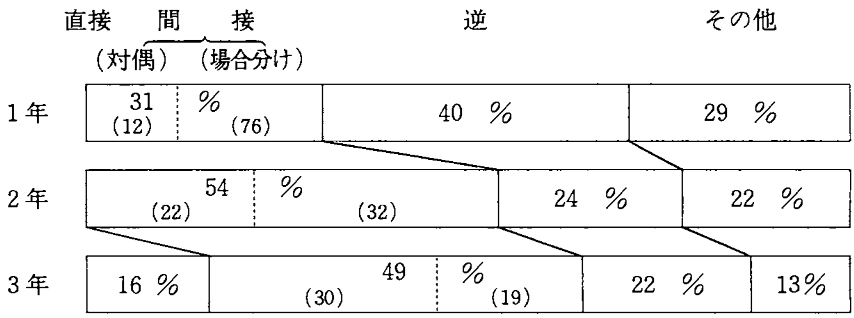
(3)　逆を考える。

①　a、bのうち、少なくとも一方が0であれば　ab＝0が成り立つ。（3年）

②　0にどんな数をかけても積は0になるから。（1、2年）

(4)　そ の 他

○　ab＝0　になるのは、片方に0をかけた場合に0になる。



どの学年でも考えられるように極く平易な内容からえらんだために、生徒にとっては、平生よく用いているが、あらたまって証明しようと思ったことのない自明のことでまごついていた。

当然のことであろうが、考え方は同じでも、1年では具体的な数値を用いたり、図を通して説明しようとし、3年では数式を用いて説明しようとする傾向がある。そのことで却って、根本的に考え方が間違っているのに厳密な証明をしたと思いちがいしている生徒も少なくない。

生徒の解答をみただけでは、対偶が真であることを述べようとしているのか、転換法による考え方をしているのか区別しかねるものが多いが、それは1、2年で特にその指導がなされていな

いので当然のことである。しかし、生徒は無意識のうちに間接的な説明をしようとしている。まだ論理的に不完全ではあるが、その芽生えがみられ、学習する素地はあると思われる。

逆も成り立つ内容の問では、順と逆の区別が不充分であり、それだけに、これらの点についての今後の指導が必要であると思われる。

II．２年指導内容より

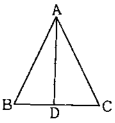
２年生になって始めて論証によって図形の性質を調べていく方法を学び、いろいろな四角形のもつ性質が終わる頃には、論証の必要性やよさが大体理解されてくるように思われる。２年で扱う定理の多くは、三角形の合同条件を用いて直接証明で証明されるものばかりであるが、その中でも考え方のむずかしいものや推論の誤りのおかし易いものがいくつかある。たとえば、

「二等辺三角形の両底角は等しい。」この定理を証明するときに生徒が考える補助線に次の４つがあげられる。

(1)頂角の二等分線をひく　(2)頂点から底辺に垂線をひく

(3)頂点から中線をひく　(4)底辺の垂直二等分線をひく

(4)の補助線をひいて証明を考えた生徒の全員が推論の誤りをおかしている。たとえば次のような証明がある。略証で示すと



(ｱ) $AD=AD$、$BD=CD$、$AB=AC$　$\therefore \triangle ABD \equiv \triangle ACD$　$\therefore \angle B=\angle C$

(ｲ) $AD=AD$、$BD=CD$、$\angle BDA=\angle CDA$　$\therefore \triangle ABD \equiv \triangle ACD$　$\therefore \angle B=\angle C$

(ｱ)、(ｲ)の証明のどこが誤りか気づく生徒が少ない、論証の初期の段階であるから当然考えられる誤りであるがその原因に次のことが考えられる。

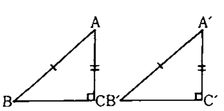
①正しくかかれた図に左右されて当然成りたつと考える。

②直観幾何の段階で習った既有の知識を必要に応じて勝手に用いる。

③証明ではどの程度までのことを述べなければならないか明確につかんでいない。

こういった誤りは初期の段階でなくても生徒のよくおかす誤りであり図形の論証のむづかしさでもある。「斜辺と他の１辺がそれぞれ等しい２つの直角三角形は合同である。」

この定理の証明は特殊な考え方をするので作為的な臭いがしてかなり抵抗を示す証明である。指導にあたってはかなり工夫を要する定理である。授業記録の一部をのせる。



①題意にあった図をかかせる（作図がうまくできない生徒約３割）

②文章でのべられた定理を記号化させる（ほとんど全員正解）

$\triangle ABC$ と $\triangle A'B'C'$ で $AB=A'B'$、$AC=A'C'$、　$\angle C=\angle C'=90°$　ならば

$\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$ である。

③仮定、結論をのべる（ほとんど全員が把握）

④Tは教師、P_1、P_2…は生徒を示す。

T　$\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$ がいえるためにはあとなにが等しいといえるとよいか

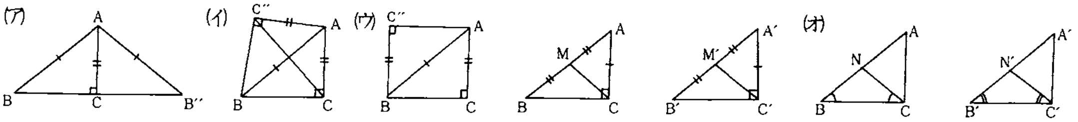
P_1　$BC=B'C'$ か $\angle A=\angle A'$　　T　まだほかにないだろうか　　P_2　$\angle B=\angle B'$

T　$BC=B'C'$ か $\angle A=\angle A'$ か $\angle B=\angle B'$　のどれかがいえたら、それぞれの場合どの合同条件にあてはまるか。$BC=B'C'$ がいえたら　　P_3　三辺相等　　T　$\angle A=\angle A'$ がいえたら

P_4 二辺夾角相等

T $\angle B=\angle B'$ がいえたら　P_5　斜辺と一鋭角相等（ここまでは大変スムーズで余り抵抗なし。）

T　$BC=B'C'$ か $\angle A=\angle A'$ か $\angle B=\angle B'$ を証明するのにどうしたらよいか。（各自考えさせる）



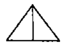
2つの直角三角形を組みあわせて(ア)、(イ)、(ウ)のように1つの図形を作って考えようとしているグループと(エ)、(オ)のように補助線を入れて考えようとしているグループとがあった。(ウ)がもっとも多く、つづいて(イ)、(ア)の順になり(エ)、(オ)はきわめて少ない。

T　図(ア)でできた△ABB″はどんな三角形か。P_6　二等辺三角形である。T　なぜか。

P_7　仮定よりAB＝A′B′、またA′B′＝AB″　ゆえにAB＝AB″

T　△ABB″が二等辺三角形であることがいえたからなにが等しいといえるか。

P_8　∠B＝∠B″がいえる　P_9　BC＝B″Cがいえる

T　∠B＝∠B″がいえたら∠B＝∠B′がBC＝B″CがいえたらBC＝B′C′がいえることになって、この定理の証明ができたことになる。これでは満点の証明にはなっていない。どこに欠点があると思うか。（すでに気づいている生徒もいるが多くはここでなぜだろうかと考えこむ。）P_{10}　∠ACB＝90°、∠ACB″＝∠ACB′＝90°　ゆえに∠ACB＋∠ACB″＝180°よって3点B、C、B″は一直線上にある。Tよくできました。図(ア)のように2つの直角三角形をおいたとき   のようにはならないで必ず  になることを証明しておかねばならない。そのために仮定の∠C＝∠C′＝90°が生きてこれによって3点B、C、B″が同一直線上にあることが保証されていることを押える。以下各自証明を完成し発表させる。

いろいろな四角形の性質までの指導の過程をへて次第に論証による扱いが深まり高められてきてはいるものの間接証明の導入の時期となると大変むづかしい。

生徒の心的発達をふまえて生徒にとってふさわしい無理のない内容としてどんなものを考えて行けばよいか十分に検討してとりあげることにした。

三角形の内角の和を指導したところで「三角形で3つの内角のうちで2つの内角が鈍角になることはない。」「直線ℓ外の1点からℓに垂線は1本しかひけない。」等を扱い多角形の内角の和、外角の和を指導したところで「n角形のn個内角のうちで4つ以上の内角が鈍角になることはない。」をとりあげた。この例のように「------でない。」という形で与えられた命題の証明では背理法という意識はなくても生徒から比較的素直に「------だとすると」という見方が出てくる。つまり2つの内角が鈍角だとするとか、垂線がもし2本ひけたとするとといったように考えて既習の定理と矛盾してくるからこれはおかしいことになると気づく。そしてごまかされたとか、わかりにくいとかいった不安感がほとんどみられない。だから程度が高いとか中学生には無理だという心配はないと思う。

「二等辺三角形の両底角が等しい」を証明するとき補助線として底辺の垂直二等分線をひいてする生徒がいるが全員が誤った推論をしている。誤りがどこか、つまり底辺の垂直二等分線が頂角の頂点を通るということを暗黙のうちに認めているところに問題があることに気づかせていかねばならない。△ABCでAB≒ACのときBCの垂直二等分線は頂点Aを通らないことを確認し、なぜAB＝ACのときに限ってBCの垂直二等分線が頂点Aを通るのだろうか。論証のごく初期の段階で遭遇する抵抗の大きいところである。各組で7、8名の生徒がこの方法で証明しているが、その誤りをみんなで検討し誤りがどこかを納得させるだけでよいだろうか。この補助線を用いて正しく証明できないのかという意欲にやはり答えていかねばならない。必要にせまられて間接証明をとりあげていくことになる。中線をひく方法でこの定理の証明もしているのでここから発展して頂点AからひいたA中線AMが底辺BCに垂直であることを証明することによってAMは

底辺の垂直二等分線となることは容易に理解できる。一方底辺ＢＣの垂直二等分線はただ１つしかないから、ＡＭとＢＣの垂直二等分線は同じ直線であるということで底辺の垂直二等分線は頂点Ａを通ることが証明されたことになる。

「二等辺三角形の底辺の垂直二等分線は頂角の頂点を通る」　この定理をＰ

「二等辺三角形の底辺の中点と頂角の頂点を結ぶ直線は底辺の垂直二等分線である」この定理をＱとするとＱはＰの逆定理で上にのべた証明はＱの証明であるが、底辺ＢＣの垂直二等分線は「ただ１つしか存在しない」ことからＰも同時に証明されたことになるのである。

次に「線分ＡＢの垂直二等分線上の点ＰはＡ、Ｂから等しい距離にある。」を指導したならば、更に点Ｐがこの垂直二等分線上にないとき、つまりＰが垂直二等分線に関してＡと同じ側またはＡと反対側にあるときＡＰとＢＰの関係はどうなるかというように点Ｐの位置のすべての場合について調べる。この様な考え方、見方を導入することによって新しい図形の性質が見出されることになり、生徒は積極的に問題にとりくむようになる。相等関係ばかりでなく自然な姿で不等関係もとり入れることができ学習を多彩なものにすることになる。これらの逆の成立することは、理屈ぬきで転換法をわざわざもち出さなくてもきわめて自然に理解するようである。３年生になって転換法を明確にとりあげていけばよい。この種の内容としてはこの外に三角形の辺と角の大小関係があげられる。二等辺三角形の両底角が等しいを指導したあと、ＡＢ≒ＡＣならば∠Ｂと∠Ｃの関係はどうなるか、これを一度指導したいと思っている。

相似に入って「△ABC の二辺AB、AC を同じ比にわける点をＤ、ＥとすればＤＥ∥ＢＣである。」を扱う。この定理の証明は三角形の相似条件を用いて直接証明で指導されている。ここで更に一歩進めて別証として同一法による証明をとり入れ新しい証明の仕方を指導する。以前ならばここにくるまでに三角形の内心、外心で同一法という用語を用いないがそれを扱って来ている。点Ｄを通って辺ＢＣに平行線をひくという発想には到底気づかない。ここは教師の方から与えていくしかないと思う。Ｄから辺ＢＣに平行線をひいたとき辺ＡＣとの交点をＥとするわけにはいかない。その交点はＥと異なる点(Ｆ)でなければならないということはほゞ理解できる。そしてＤＥとＤＦは実は同じ直線つまりＥとＦは同じ点であることを証明すればよいのだというところまでは気づいてくれる。ＥとＦが同じ点になることをどう証明すればよいか。そのためにどう方針をたてるかが問題である。ＡＥ＝ＡＦがいえるとよい。ＡＥ、ＡＦはともにＡＣのどれだけにあたるか等と生徒と一緒に考察しながら方針をたてていく。そして証明したあとこの証明の要点をしっかり押えておかねばならない。

このあと次のような問題を３題与えてその反応を調べてみた。

問題１①ＡＤ∥ＢＣの台形ＡＢＣＤで辺ＡＢ上の１点Ｅより辺ＢＣに平行線をひき辺ＣＤとの交点をＦとするとＡＥ：ＥＢ＝ＤＦ：ＦＣであることを証明せよ。

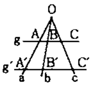
正答率は約93％で補助線として対角線ＡＣ(またはＢＤ)をひいたものは正解者の77.5％、点Ａ(またはＤ)より辺ＤＣ(または辺ＡＢ)に平行線をひいたものは正解者の17.5％、ＡＦと辺ＢＣの延長との交点をとったものが正解者の５％という状態であった。

②ＡＤ∥ＢＣの台形ＡＢＣＤで辺ＡＢ上に点Ｅ、辺ＣＤ上に点Ｆを
ＡＥ：ＥＢ＝ＤＦ：ＦＣとなるようにとるとＥＦ∥ＢＣである。

この定理の証明では順定理の証明で用いた対角線をひく方法やＡより辺ＤＣに平行線をひく方法を用いるとすればかなりむづかしくなる。事実この方法で証明した生徒のほとんどはまちがっていた。順定理の証明で僅か２名の生徒しか見出せなかった補助線を与えて証明させたところ正

答率は約91％であった。逆定理の証明で順定理の証明で用いた補助線がそのまま用いることができれば大変都合がよいわけだが、そういかない場合があるので面倒である。次に、三角形の場合どのような考え方で証明したかその要点を復習しこれを参考にしていまの場合どんな補助線をひけばよいかを考えよというヒントで証明を完成させたところ正答率は約88％であった。ヒントも何も与えずにこの定理を証明させたとすれば正答率は低下しかつ同一法を用いた証明をする生徒はおそらく僅かであろう。

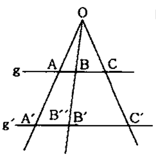
問題２①１点Ｏで交わる３つの直線ａ、ｂ、ｃと点Ｏを通らない２つの平行な直線ｇ、ｇ′がある。



ｇとａ、ｂ、ｃの交点をそれぞれＡ、Ｂ、Ｃとしｇ′とａ、ｂ、ｃとの交点をそれぞれＡ′、Ｂ′、Ｃ′とするとＡＢ：Ａ′Ｂ′＝ＢＣ：Ｂ′Ｃ′　である。（正答率は約90％）

②２つの平行な直線ｇ、ｇ′がある。ｇ上に３点Ａ、Ｂ、Ｃ、ｇ′上に３点Ａ′、Ｂ′、Ｃ′をＡＢ：ＢＣ＝Ａ′Ｂ′：Ｂ′Ｃ′となるようにとると３つの直線ＡＡ′、ＢＢ′、ＣＣ′は１点Ｏで交わる。

この証明は間接証明を用いなければならないので抵抗が大きい。正答率も約63％であった。それもある程度ヒントを与えてのうえである。まずこの問題の難点は結論の部分である。つまり３つの直線が１点Ｏで交わることをどんな風に証明すればよいかその方針がたてにくい点である。これは始めての経験である。３つの直線ＡＡ′、ＢＢ′、ＣＣ′が１点で交わることを証明するには２つの直線ＡＡ′とＣＣ′の交点をＯとしたときもう１つの直線ＢＢ′が点Ｏを通ることをいえばよいわけだがＢＢ′がＯを通ることをどう証明すればよいかが問題になる。そこで、ＡＡ′とＣＣ′の交点をＯとし２点Ｏ、Ｂを通る直線が点Ｂ′を通ることが証明できればＢＢ′がＯを通ることが証明できたことになる。２点Ｏ、Ｂを通る直線がｇ′と交わる点をＢ″として証明させたところ次のような誤答があった。



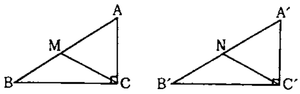
(1) ＡＣ∥Ａ′Ｃ′　∴ＯＣ：ＯＣ′＝ＯＢ：ＯＢ″
ＡＣ∥Ａ′Ｃ′　∴ＯＣ：ＯＣ′＝ＯＢ：ＯＢ′
∴ＯＢ：ＯＢ″＝ＯＢ：ＯＢ′
∴ＯＢ″＝ＯＢ′
よって、Ｂ′とＢ″は重なる
したがってＡＡ′、ＢＢ′、ＣＣ′は１点Ｏで交わる

(2) 仮定よりＡＢ：ＢＣ＝Ａ′Ｂ′：Ｂ′Ｃ′—①
△ＯＡ′Ｂ″でＡＢ∥Ａ′Ｂ″だから
ＡＢ：Ａ′Ｂ″＝ＯＢ：ＯＢ″
△ＯＢ″Ｃ′でＢＣ∥Ｂ″Ｃ′だから
ＯＢ：ＯＢ″＝ＢＣ：Ｂ″Ｃ′
∴ＡＢ：Ａ′Ｂ″＝ＢＣ：Ｂ″Ｃ′—②
ここからあとどうすればよいかわからず空白になっている

(3) ∠ＡＯＢは共通だから△ＯＡＢ∽△ＯＡ′Ｂ″
∴ＯＢ：ＢＢ″—①
∠ＢＯＣは共通だから△ＯＢＣ∽△ＯＢ′Ｃ′
∴ＯＢ：ＢＢ′—②
①、②でＯＢは共通　∴ＢＢ″＝ＢＢ′
ゆえに　Ｂ′とＢ″は同じ点である。
よってＡＡ′、ＢＢ′、ＣＣ′は１点Ｏで交わる。

問題３「直角三角形の斜辺の中点は３頂点から等しい距離にある」

この定理の証明はふつう中点連結定理を用いるか長方形の性質を用いて証明する。この２つの方法に加えて同一法を用いる証明を試みて両者の解答のようすを調べてみた。同一法をとり入れたのは次のような理由からである。前に述べた「斜辺と他の１辺が等しい２つの直角三角形は合同である」を証明するのに(エ)の補助線を用いて証明し発表した生徒がいた。その証明は次の通りである。

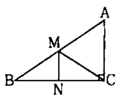


斜辺ＡＢ、Ａ′Ｂ′の中点をそれぞれＭ、ＮとするとＡＭ＝ＢＭ＝ＣＭ、Ａ′Ｎ＝Ｂ′Ｎ＝Ｃ′Ｎとなるから△ＡＭＣと△Ａ′ＮＣ′でＡＭ＝Ａ′Ｎ、ＭＣ＝ＮＣ′、ＡＣ＝Ａ′Ｃ′　∴△ＡＭＣ≡△Ａ′ＮＣ′

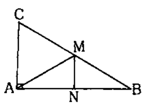
$\therefore \angle A=\angle A'$、$\triangle ABC$と$\triangle A'B'C'$で$\angle A=\angle A'$、$AB=A'B'$、$AC=A'C'$　$\therefore \triangle ABC\equiv\triangle A'B'C'$

すごいなあうまくやったなあと声を発するもの、もう一度始めから確認しているもの、一通りの説明でつかめなく頭をかしげているもの様々の反応があった。これでよいかな、もう一度みなおしてみなさいということでしばらく時間をとった。斜辺ＡＢの中点をＭとしたときＡＭ＝ＢＭ＝ＣＭであるという定理はまだ習っていない。証明されていない定理は使ってはいけないということに気づく生徒があらわれてきた。その点が不十分であることを全員が納得して授業が終った。ところが発表した生徒は次の時間に(オ)の補助線を用いてＭが３頂点から等しい距離にあることを同一法で証明してきた。

中点連結定理を指導したあと中点連結定理の利用としてこの定理をとりあげた。



中点連結定理を確認し、辺ＡＢの中点Ｍが与えられているから中点連結定理を用いるとすればどんな補助線をかけばよいだろうか。Ｍより辺ＡＣまたは辺ＢＣに平行線をひくと考えた生徒がもっとも多くて約４割、辺ＢＣまたは辺ＡＣの中点をとりＭと結ぶとした生徒が約３割、Ｍより辺ＢＣまたはＡＣに垂線をひくとした生徒が約１割という状態であった。無答は約７％で誤答例として次のようなものがあった。



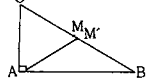
①　Ｍより辺ＣＡに平行線をひきＡＢとの交点をＮとする。
$\angle BNM=\angle BAC=90^\circ$—①　$\angle B$は共通　$\therefore \triangle BNM\backsim\triangle BAC$—②
$MN/\!/CA$で$BM=MC$なので$BN=NA$　②より$\angle BMN=\angle BCA$—③
$\triangle BMN$と$\triangle AMN$で ①、③ $MN=MN$より$\triangle BMN\equiv\triangle AMN$
$\therefore MB=MA$、　$\therefore MA=MB=MC$

②　仮定より　$CM=BM$—①　$CA/\!/MN$ だから$\angle MNB=\angle MNA=\angle R$—②
$\therefore$ $\triangle BMN\backsim\triangle AMN$　　$\therefore$ $\angle BMN=\angle AMN$—③
MNは共通、②、③より　$\triangle AMN\equiv\triangle BMN$　　ゆえに$\triangle AMB$は二等辺三角形
$\therefore AM=MB$—④　④と①より　$MA=MB=MC$

③　$CA/\!/MN$　$\therefore$ $\angle CAM=\angle AMN$—①　　$\therefore \angle MCA=\angle BMN$—②
また　$\triangle ABC$で $\angle A=90^\circ$、$MC=MB$　　$\therefore \angle NAM=\angle CMA=a$
ここで $\angle AMN=180^\circ-a-\angle BMN$、$\angle MCA=180^\circ-a-\angle CAM$　$\therefore \angle AMN=\angle MCA$、
$\therefore$ $\angle MAC=\angle MCA$　$\therefore MC=MA$—③　仮定より$MC=MB$　$\therefore MA=MB=MC$

④　点ＭはＢＣの中点である　$\therefore BM=CM$、　$\therefore BN=AN$、$\angle MNB=\angle MNA$、
ＭＮは共通　$\therefore \triangle MNB\equiv\triangle MNA$、　$\therefore MB=MA$

次に、さきほどのべた理由から全員に同一法による証明を試みた。図形の証明問題では仮定や結論からいかにして補助線を見出すかが大きな問題点である。同一法による筋道のたてかたができるかどうかがねらいであるのでつぎのように補助線を与えた。斜辺BC上に$\angle B=\angle BAM'$となるように点M′をとる。無答者は約11.6％で次のような誤答があった。



①　$\angle B=\angle M'AB$によって$\triangle AM'B$は二等辺三角形である　$\therefore M'A=M'B$
$180^\circ-\angle A=90^\circ=\angle C+\angle B$　$\therefore \angle C=90^\circ-\angle B$、$\angle M'AB=\angle B$
$\therefore$　$90^\circ-\angle M'AB=\angle M'AC=\angle C$　よって　$\triangle CM'A\equiv\triangle CMA$であり二等辺三角形である
$\therefore$　$CM=AM$、$AM'=AM$　$\therefore MA=MB=MC$である

②　仮定より $CM=BM$—①　$\triangle ABM'$で $\angle M'AB=\angle B$　　だから $\triangle ABM'$は二等辺三角形
よって　$M'A=M'B$—②　$\triangle MCA$で $\angle C$と$\angle MAC$でこの２つの角は90° から同じ角をひいたもので等しい　よって　$\triangle MCA$は二等辺三角形　$\therefore$　$CM=AM$

$\angle MBA = \angle B = \angle M'AB$ であるから　$MB = M'B$ —③

①、②、③より　$MA = MC = MB = M'B$　$\therefore MA = MB = MC$

③　$\angle B = \angle M'AB$　だから　$M'A = M'B$ —③　　$\angle M'AB = \angle M'BA = x$ とすると

$\angle CAM' = 90° - x$ —①　$\angle CM'A = 180° - 2x = 90° - x$ —②　①、②より $\angle CAM' = \angle CM'A'$

$\therefore CA = AM'$ —④　③、④より $BM' = CM'$　ところで $CM = MC$　$\therefore$ M と M′ は重なる—⑤

③、④、⑤より　$MA = MB = MC$ となる。

④　仮定より M は BC の中点　だから　$MB = MC$ —①　$\angle B = \angle M'AB$ だから $M'B = M'A$ —②

①、②より　$MC = M'A = M'B$　$\therefore$ M と M′ は一点になる　よって　$MA = MB = MC$

両方とも証明のできたものは約71.8%、前者のみできたものは約9.5%、後者のみできたものは約4.7%、両方ともできなかったものは約14.0%であった。

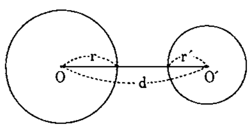
以上2年では同一法を主体にして間接証明をとり入れてみたが結果は心配したほどでなく、新しい証明法がほゞ理解されたと思われる。同一法によらねば証明のできぬ定理が少ないことゆえ、ある程度積極的にとり入れて定着をはからねばならない。また、同一法による証明をするとき補助線を生徒と一緒に見出す段階までヒントを与えているので正答率が高くでてきたが、考え方なり記述の仕方等については理解されたと思われる。今後直接法による証明ではむづかしくなったときにはたして何人の生徒が間接証明を積極的にとり入れてたち向っていってくれるか期待している。

III. 3年指導内容より

3年の指導内容からあげる。2円の位置関係については各教科書の展開は次のようである。

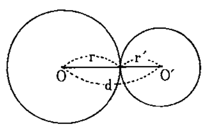
平面上の大小2つの円をそれぞれO、O′とし、半径を r、r′、中心間の距離を d とする。下の図のⓑ～ⓔは　ⓐの状態から、d をだんだん小さくしていったときの2円の位置関係を示したものである。

ⓐ　$d > r + r'$



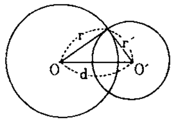
出あわない

ⓑ　$d = r + r'$



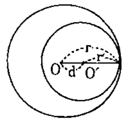
1点で出あう

ⓒ　$r - r' < d < r + r'$



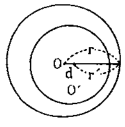
2点で交わる

ⓓ　$d = r - r'$



1点で出あう

ⓔ　$d < r - r'$

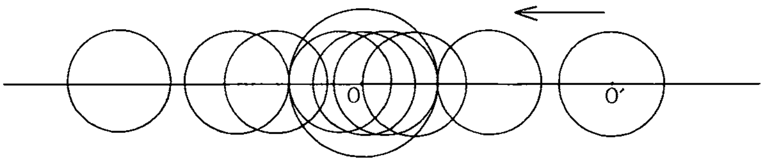


出あわない

ⓑ、ⓓのように、2円がただ1点で出あうとき、この2円は接するといい、その出あう点を接点という。いずれの場合も接点は2円の中心を通る直線上にある。

ⓑのような場合は外接するといい、ⓓのような場合は内接するという。ⓒは2円が交わる場合である。

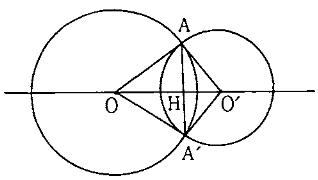
これは@の状態からdをだんだん小さくしていったとき、2円の位置関係がどのように変わるか。2円の共有点の数がどのように変わるか。一方の円が他の円を含むかどうかを考え、2円の位置関係を分類する方法をとっている。しかし全平面にわたって考えるには@のときの円O′を更に左方へ移動していかねばならない。



次に、「2円の接点が2円の中心線上にある。」について各教科書を調べると、このことを述べている教科書もあり、述べていない教科書もある。述べている教科書でも、その理由について考えさようとしているのと全くふれていないものがある。

次の(ア)から(エ)はその例である。

(ア) 円は、その中心を通る任意の直線について対称な図形である。したがって、中心が重なっていない2円を組にした図形は2円の中心を通る直線について対称である。とくに、2円が交わっているとき、2つの交点は2円の中心を通る直線について対称である。



円の対称性について述べているが共通弦と中心線の関係や、2円の接点と中心線の関係についてふれていない。

(イ) 上の図を示し、「2円の共通弦は中心線によって垂直二等分される。」ことを証明させている。

(ウ) (イ)より、さらに2円が接するように円O′を移動すると2円の接点はどうなるか考えさせている。

(エ)「2円O、O′が接するとき、接点で円Oに対して接線をひくと、それは円Oと円O′の共通接線になる。なぜか」という問を出している。

このように、教科書により取扱いが異なっている。上の(ア)、(イ)、(ウ)のように交わる2円を示しながらも、指導する内容を異にしている。教科書編集者の苦心や教育的配慮が伺われる。教科書のよしあしを云々するものではない。教師としては、生徒の学習状況を考え、心的発達状況、数学的思考能力、処理能力をふまえて、指導の内容を選ぶ。上の(エ)の発問は「2円の接点が中心線上にあるか」直接に問いかけていないが、生徒の解決能力を考えた工夫された発問であると思う。

「2円の接点が2円の中心線上にある。」ことは一見明白なことではあるが明白だと思われることがらについても問題意識をもたせる機会をつくることが必要であると思う。

$d = r + r'$ はrとr'の和がdであるという関係を示しているだけでなく、そこには2円の中心と接点が同一直線上にあるという3点の位置関係を内蔵していることを意識させねばならない。

「2円の接点がその2円の中心線上にある。」ことを指導して、生徒はどのように反応したかを述べる。

接する2円をかき、接点を中心線上にない位置に板書し、「この接点が2円の中心線上にあることを説明せよ」と云われたときはどうするか、と発問する。この発問に対して、

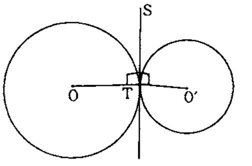
(ア) 円O′を円Oに近づけ接する位置まで移動する考えは予期していたが出なかった。

(イ)　2円の接点Tを通る共通接線STをひく。

$\angle OTS = 90^\circ$　$\angle O'TS = 90^\circ$ だから

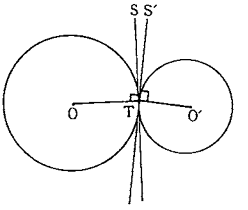
$\angle OTS + \angle O'TS = 180^\circ$

よって、O、T、O′は一直線上にある。



(イ)ではTを接点とする円Oの接線と円O′の接線が同じであると考えている。

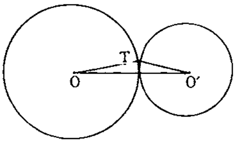
(ウ)　円Oの接線STと円O′の接線S′Tをひく。そこでSTとS′Tが重なるように移動すると1本の共通接線となり、そのときTは中心線OO′上にくる。



(エ)　2円の接点Tが2円の中心線上にないとすると

△OTO′ができ、$OO' < OT + O'T$ となる。

中心間の距離 $OO' = OT + O'T$　だから円O′が円Oと交わり、共有点が2個となり、2円が接しているとき接点が1つであることに反する。よって、2円の接点は2円の中心線上にある。

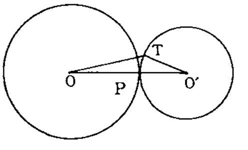


(オ)　2円の接点Tが2円の中心線上以外の円O′の周上にあるとする。3点O、T、O′が同一直線上にないから、△OTO′ができ

$OO' < OT + O'T$　となる。OO′は円Oの半径OPと円O′の半径O′Pの和だから　$OO' = OP + O'P$　円O′の半径より

$O'T = O'P$　よって　$OT < OP$　　OPは円Oの半径だから

点Tは円Oの外にある点であることがわかる。したがって点Tでは円Oと円O′は接していない。よって、Tは2円の中心線上にある。



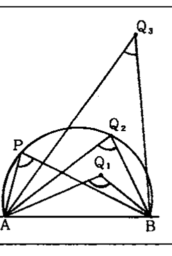
これは授業中および授業後4か月の調査の中から選んだ誤答例である。

(イ)や(ウ)では「円の接線は接点を通る半径に垂直である」ことを根拠にして説明している。しかし共通内接線が1本であることを黙認している。つまり接点が中心線上にあることを用いていることになる。(エ)や(オ)の説明は結論を否定し、矛盾を指摘する背理法の考えは充分にうかがえる。しかし、これも「中心間の距離は2円の半径の和である」こと、つまり接点が中心線上にあることを用いている。

これらの誤答例は多くの生徒が考えることであるから、一度は経過させねばならぬ学習過程であると思う。

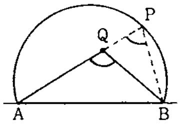
転換法について教科書で取扱っているのは2社で展開例をみる。

弓形について、次の定理が成り立つ。

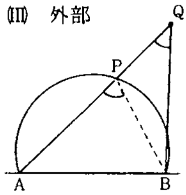
> 定理　∠APBを線分ABを弦とする弓形の角とし、Qを直線ABについて、弓形と同じ側にある点とする。
>
> (I)　点Qが弓形の内部にあれば、$\angle AQB > \angle APB$
>
> (II)　点Qが弓形の弧上にあれば　$\angle AQB = \angle APB$
>
> (III)　点Qが弓形の外部にあれば　$\angle AQB < \angle APB$
>
> 
>

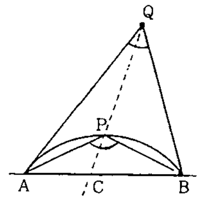
問　上の定理の(I)、(III)を次の図を使って証明せよ。

(I)　内部



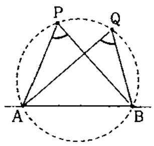
(III)　外部





上の定理の(II)は、円周角の定理から明らかである。この逆は次のように述べられる。

> 定理　２点Ａ、Ｂを通る直線の同じ側に点Ｐ、Ｑがあって、
> ∠ＡＰＢ＝∠ＡＱＢ　ならば、４点Ａ、Ｂ、Ｐ、Ｑは１つの
> 円周上にある。



証明　４点のうち、Ａ、Ｂ、Ｐは１つの円周上にある。もし、
ＱがＰと直線ＡＢの同じ側にあって、∠ＡＱＢ＝∠ＡＰＢ　なのに
この円周上にないとすると、Ｑは次のどちらかにある。

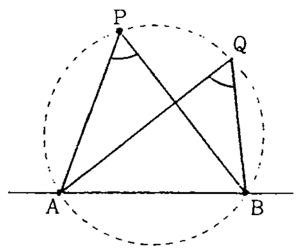
(ア)　弓形ＡＰＢの内部　　　(イ)　弓形ＡＰＢの外部

ところが、前の定理(I)、(III)によって、

(I)Ｑが(ア)にあれば　∠ＡＱＢ＞∠ＡＰＢ

(III)Ｑが(イ)にあれば　∠ＡＱＢ＜∠ＡＰＢ

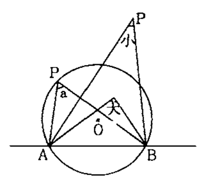
となって、どちらにしても仮定∠ＡＱＢ＝∠ＡＰＢに反する。



したがって、Ｑは弓形の内部にも外部にもないから、$\overset{\frown}{\mathrm{APB}}$上になければならない。

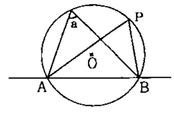
このように、転換法の考え方や記述がはっきり述べられている。転換法を用いない教科書では次のようである。

> 円Ｏの$\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$に対する円周角の大きさをａとし、
> 直線ＡＢについて$\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$と反対側に１点Ｐをとる。
> (I)　Ｐが円Ｏの周上にあれば　∠ＡＰＢ＝ａ
> (II)　Ｐが円Ｏの内部にあれば　∠ＡＰＢ＞ａ
> (III)　Ｐが円Ｏの外部にあれば　∠ＡＰＢ＜ａ



このことから、∠ＡＰＢ＝ａ　ならば、点Ｐが円Ｏの周上にあることがわかる。

> 円Ｏの$\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$に対する円周角をａとし、直線ＡＢについて
> $\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$と反対側に点Ｐをとるとき、∠ＡＰＢ＝ａ　であれば
> Ｐは円Ｏの周上にある。



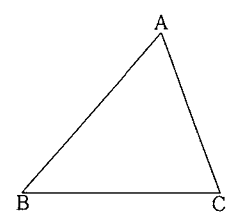
このような取扱いをする教科書は４社である。転換法を用いることについては意見のわかれるところである。後者は命題の仮定、点Ｐが円Ｏの周上にあるとき、円Ｏの内部にあるとき、円Ｏの外部にあるとき　とすべての場合をつくしており、結論はそれぞれ異なっている。(I)、(II)、(III)の三者を一覧すれば　∠ＡＰＢ＝ａ　のときは、Ｐは円Ｏの周上のときであることは明らかであ

ると推理する。証明の必要はないとする立場である。この立場は命題の逆を考える意識がうすくなる恐れがある。中学生の段階では、命題の順と逆が混然として生徒もいるから機会をとらえて分化する必要があると思う。

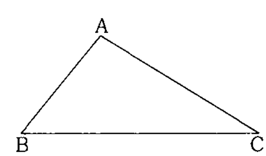
実際指導しての感想は　①逆をつくったとき、「∠ＡＰＢ＞ａ　ならばＰが円Ｏの内部にある。」となるが結論のＰが円Ｏの内部にあることを述べるにはどうすればよいか。生徒は今までは２つの線分の長さが等しいとか、２つの角の大きさが等しいという結論を証明することになれていたが点が円の内部にあるという結論には、はじめてである。②結論を否定し、Ｐが円Ｏの内部にないとすると、どうなるか　問すると生徒はその矛盾を指摘する。③上の定理(II)の逆が証明できると、(I)や(III)の逆の証明は容易にできる。④直接結論を証明できないとき、間接的に証明することやそのしくみを指導する機会であると思う。

上の定理を指導したのは、57年10月はじめであった。その後58年１月末に同じ問題で調査したところ、正答者は１学級42人中26人であった。また、次の問題で調査を行なった。

問題１　△ＡＢＣで
(ア)　ＡＢ＞ＡＣ　ならば　∠Ｃ＞∠Ｂ　である。
(イ)　ＡＢ＝ＡＣ　ならば　∠Ｃ＝∠Ｂ　である。
(ウ)　ＡＢ＜ＡＣ　ならば　∠Ｃ＜∠Ｂ　である。
上の(ア)、(イ)、(ウ)は正しいことがらである。
(ア)の逆を書きなさい。また、それを証明しなさい。

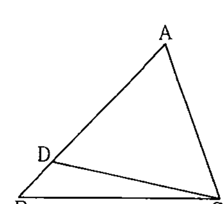


問題２　△ＡＢＣで
(ア)　∠Ａが鋭角ならば　$AB^2+AC^2>BC^2$　である。
(イ)　∠Ａが直角ならば　$AB^2+AC^2=BC^2$　である。
(ウ)　∠Ａが鈍角ならば　$AB^2+AC^2<BC^2$　である。
上の(ア)、(イ)、(ウ)は正しいことがらである。
(ウ)の逆を書きなさい。また、それを証明しなさい。



問題１の正答者は１学級42人中14人であった。誤答は直接証明法を用いている。辺ＡＢ上にＡＤ＝ＡＣ　なる点Ｄをとり、補助線ＣＤをひき証明をしようとしている。その一例を示す。

ＡＢ上に　ＡＤ＝ＡＣ　なる点Ｄをとると　∠ＡＤＣ＝∠ＡＣＤ……①
△ＤＢＣで　∠ＡＤＣ＝∠ＤＢＣ＋∠ＤＣＢ　より
∠ＡＤＣ＞∠ＤＢＣ……②
△ＡＢＣで　∠ＡＣＢ＝∠ＡＣＤ＋＜ＤＣＢ　より
∠ＡＣＢ＞∠ＡＣＤ……③
①、②、③より　∠ＡＣＢ＞∠ＡＢＣ
点ＤはＡＢ上にあるので　ＡＢ＞ＡＤ



問題２についても、直接証明法で考えようとしている。直接証明法に習熟していると思考が、その方に向くのであろう。問題２の正答者は14人で、問題１の正答者と同じである。

この調査より、転換法の指導を集中的にできると、より効果があがり関心も深まるであろう。

おわりに

結論として、次のようなことが考えられる。

(1) 命題の結論を否定したとき、不合理なことが生ずるという考え方ができるから、背理法による推論の素地はある。

(2) 背理法による推論の素地はあるが、推論の過程や方法に混沌としたところ、未分化、未発達な点があるので指導すべきである。

(3) 同一法、背理法、転換法を指導する教材が少なく、また、集中的でないので学習効果、定着が難しい。

(4) 転換法を用いる教材は図形の基本的性質が多く、説明するまでもなく明白なことがらが多いので中学生は興味関心をもたぬ面もあるが、反面明白と思われることがらにも理をつくす学習をする機会でもある。

(5) 転換法は証明の方法が定型化するので一度理解すれば証明の難しさがない。したがって発展的に考えるとか思考力を練る面は少ない。

以上のことを念頭におき、今後は中学校の段階として、間接的証明法についての教材、指導の時期、方法について、さらに考えたいと思う。