空間図形の指導について

藺森　正栄
池田　克己
天川　義昭

平面図形についての知識があり、論証がよくできる生徒でも、空間図形の構成や性質の洞察力がきわめて劣ることがある。しかしこれは生徒に限らず多くの人にあてはまることである。

身のまわりのものをみると平面的なものよりも空間的なものが非常に多い。しかしいざ数学の学習ということになると逆に平面図形に関することに殆どの時間を費している。空間図形では、ある断面を考えればそれは平面図形だから、平面図形で学習したことは、すぐ空間図形にも適用できるという安易な考えから空間図形の指導は軽視されがちである。

学習指導内容の移り変わりをみると、昭和44年度の改訂では、学習指導内容の現代化ということでいくつかのことを統合的に把握し考えることが強調された。例えば方程式と不等式を統合的にみる。図形の合同相似を広く変換ということで考察するよう指導した。統合的にみることは価値の高いことであり、数学の学習の大きなねらいである。ところが改訂された内容が実施されると全国的にみて指導上の困難、内容の多岐、理解の度合等反省される点があげられた。統合的にみる前段階である個々の内容や基本的な内容についての学習にもつと重点をおくべきであるということになった。これらの反省に基づいて昭和56年度の改訂では、図形について１年では「図形をいろいろの操作を通して考察し、空間図形についての理解を深める。」ということが重点の１つにあげられた。

そこで本校では空間図形の指導について今後どのようにすればよいか試みることにした。

研究の目標として

(1)　空間図形に関する新学習指導内容の充実をはかるとともに、さらに豊かにするにはどうすればよいか、指導の内容、程度を全学年にわたって研究する。

(2)　指導上の問題点として予想されるものをあげる。一部実施したものについては問題点を、考察する。

直線や平面の位置関係

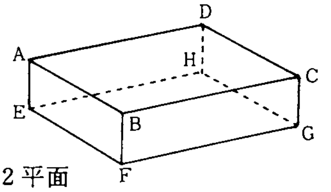
(ｱ)　直線や平面の平行　(ｲ)　ねじれの位置　(ｳ)　直線や平面の交わり　(ｴ)　直線、平面の決定　(ｵ)　直線や平面の垂直　(ｶ)　２平面のなす角　(ｷ)　平行な２平面と垂線

空間における直線や平面の位置関係については小学校でも直方体に関連して取扱っている。中学ではこれを足場に学習を進める。直方体の辺や面を通して、無限にのびている直線、無限に広がっている平面という抽象化された図形の見方が必要である。また中学校では柱体、錐体、正多面体について学習するが、これらの立体についても直線や平面の位置関係の理解を深める。

直線や平面の位置関係の指導は空間図形の指導のはじめに行なわれ、その後指導をおろそかにしがちである。わかりやすく簡単なことだからという安易さによると思うが、これは数学の学習の重要な道具であり、思考、考察の眼である。多面体の学習、平面図形の運動による空間図形の構成、空間図形の切断、投影及び展開の指導と密接に関連させながら指導し、空間図形の理解を

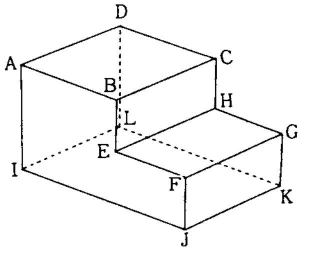
深めるべきである。

1．次の各組の直線や平面はそれぞれ平行であるといえるか、図の直方体の見取図を参考にせよ。平行でないときは反例をあげよ。



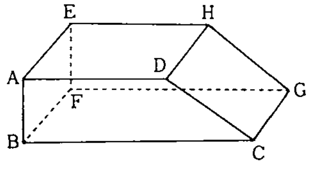
(1)　１つの平面に平行な２直線　　(5)　１つの直線に平行な２平面
(2)　１つの平面に垂直な２直線　　(6)　１つの直線に垂直な２平面
(3)　１つの直線に平行な２直線　　(7)　１つの平面に平行な２平面
(4)　１つの直線に垂直な２直線　　(8)　１つの平面に垂直な２平面

2．空間内の異なる３直線 ℓ、m、n と異なる３平面Ｐ、Ｑ、Ｒがある。次のことがらで正しいものはどれか、正しくないものは図を参考にして反例をあげよ。



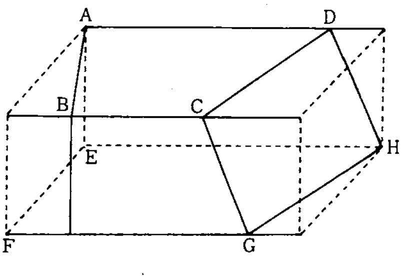
(1)　$\ell \perp m$、$m /\!/ P$ ならば $\ell \perp P$
(2)　$\ell /\!/ P$、$\ell \perp Q$ ならば $P \perp Q$
(3)　$\ell \perp m$、$m \perp P$ ならば $\ell /\!/ P$
(4)　$\ell \perp m$、$n \perp m$ ならば $\ell /\!/ n$

3．右の図は直方体をななめに切った立体でＡＤＨＥは正方形である。



(1)　辺ＡＥに平行な辺はどれか。
(2)　辺ＤＨと直交する辺はどれか。
(3)　辺ＢＦに垂直な平面はどれか。
(4)　平面ＡＢＣＤに平行な辺、垂直な平面はどれか。
(5)　辺ＤＣとねじれの位置にある辺はどれか。

4．右の図は直方体を２つの平面で切ってつくられた立体ＡＢＣＤ－ＥＦＧＨを示している。
　この立体の辺と面について次のものをかけ。あてはまるものがないときはなしと答えよ。



(1)　(ア)　ＦＧと平行な辺
　　(イ)　ＤＨと平行な辺
(2)　(ア)　ＦＧと平行な面
　　(イ)　ＤＨと平行な面
(3)　(ア)　ＦＧと垂直に交わる辺
　　(イ)　ＤＨと垂直に交わる辺
(4)　ＦＧとねじれの位置にあり、かつＤＨともねじれの位置にある辺

多　面　体

(ア)正多面体の意味と種類を理解する。

(イ)正多面体の展開図をつくり、正多面体をつくる。

(ウ)正多面体の頂点の数、辺の数、面の数を調べる。

展開図より正多面体をつくり、生徒が各自正多面体を手にすることにより、向かい合った面の位置、辺の位置関係を考えることができる。また頂点、辺の数を調べるのに好都合である。正多面体の頂点、辺の数を単にかぞえるにとどまらないで正多面体の特徴をいかしてかぞえる。

(エ)正多面体は面対称図形である。調和的な美しさをもっている。その対称面による立体の切り口の図形について考察させ、対称面の数をかぞえることを考える。これは煩雑で難しく思われるがそれだけに生徒は興味をもつ。正多面体の特徴を活かし、かぞえ方のきまりを見つけさせる。

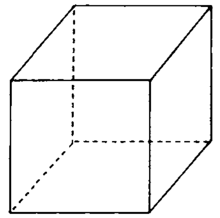
(オ)多面体の定理（オイラーの定理）について指導する。これは今度の改訂で削除された内容内容であり逆行することになるが生徒にとって興味のある有意義な内容である。驚きや不思議さが中学生の学習意欲を一層高める。

この定理の説明をどの程度にするか、切断を用いて多面体の１つの頂点を切り落したときの、頂点の数、辺の数、面の数がどのように変わるかを考える。あるいは逆に多面体に１つの頂点を加えると、辺の数、面の数がどのように変わるかを考える。

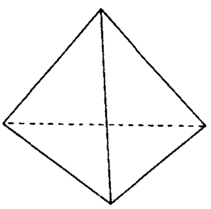
(カ)正六面体と正八面体では面の数と頂点の数に双対性がある。また正十二面体と正二十面体についても同様の関係がある。正四面体ではどうか。

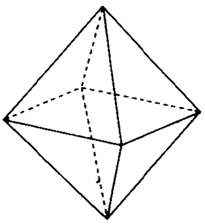
(キ)辺、面の位置関係、切断による切り口の図形を考えるとき論証への前段階としての指導に留意する。

1.　正六面体の辺の数、頂点の数はいくつか。



2.　正四面体、正八面体の辺の数、頂点の数はいくつか。



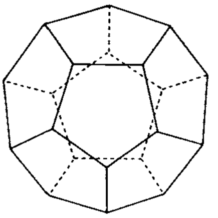


3. 正十二面体の辺の数はいくつか。

正五角形が12個あるから辺の数は　5×12

１つの辺を２回かぞえているから　$\frac{5\times12}{2}=30$

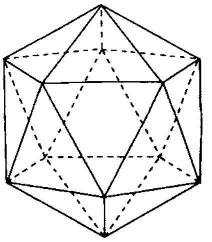
辺の数は　30



4. 正十二面体の頂点の数はいくつか。

正五角形が12個あるから頂点の数は　5×12

１つの頂点を３回かぞえているから　$\frac{5\times12}{3}=20$



5. 正二十面体の辺の数、頂点の数はいくつか。

辺の数は　$\frac{3\times20}{2}=30$

頂点の数は　$\frac{3\times20}{5}=12$

6. 上の１～６の立体の面、頂点、辺の数を表に示せ。

7. 右の表よりどんなことがわかるか。

(ア)正六面体と正八面体では面の数と頂点の数が入れかわり、辺の数は等しい。

(イ)正十二面体と正二十面体も同様なことがいえる。

(ウ)正四面体では面の数と辺の数は等しい。

(エ)(面の数)＋(頂点の数)－(辺の数)＝２を導く。

$F + V - E = 2$

	面の数 F	頂点の数 V	辺の数 E
正四面体	4	4	6
正六面体	6	8	12
正八面体	8	6	12
正十二面体	12	20	30
正二十面体	20	12	30

8. 正多面体でF＋V－E＝２の関係をえたが他の多面体についてはこの関係があるだろうか。次の多面体で考えてみよ。

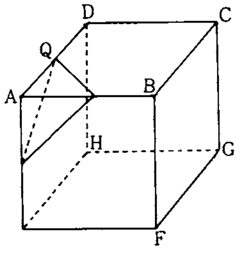
四角すい　　四角すい台　　六角すい

六角柱　　八角柱

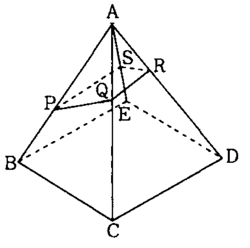
	面の数 F	頂点の数 V	辺の数 E
四角すい	5	5	8
四角すい台	6	8	12
六角すい	7	7	12
六角柱	8	12	18
八角柱	10	16	24

9．次の立体を１つの平面で切り、頂点Ａを切り落とすときＡを含まない立体ともとの立体との間で面の数頂点の数、辺の数はどう変わるか。

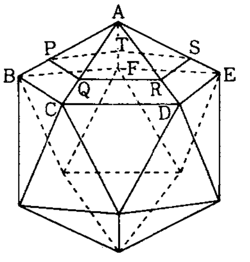
正六面体



四角すい



正二十面体



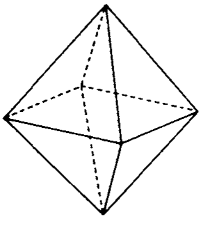
	面の数増減	頂点のお増減	辺の数増減
正 六 面 体	＋１	＋２	＋３
四 角 す い	＋１	＋３	＋４
正二十面体	＋１	＋４	＋５

10．正八面体の各面の中心（正三角形の外接円の中心）を頂点とする立体を考える。

(1)　この立体の頂点はいくつか。

(2)　この立体の各面はどんな図形か。

(3)　この立体は何という図形か。

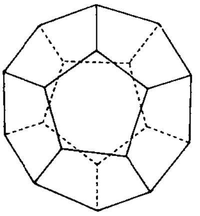


11．正十二面体の各面の中心（正五角形の外接円の中心）を頂点とする立体を考える。

(1)　この立体の頂点はいくつか。

(2)　この立体の各面はどんな図形か。

(3)　この立体は何という図形か。

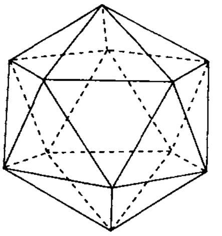


12．正二十面体の各面の中心（正三角形の外接円の中心）を頂点とする立体を考える。

(1)　この立体の頂点はいくつか。

(2)　この立体の各面はどんな図形か。

(3)　この立体は何という図形か。

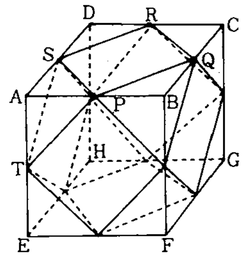


13．立方体の頂点Ａを辺にもつ３辺ＡＢ、ＡＤ、ＡＥの中点をそれぞれＰ、Ｓ、Ｔとする。３点Ｐ、Ｓ、Ｔを含む平面でＡを含む立方体のかどを切り落とす。同じように立方体のかどを落としてできる立体について次の問に答えよ。

(1)　この立体の面の数はいくつか。

(2)　この立体の各面の形はどんな図形か。

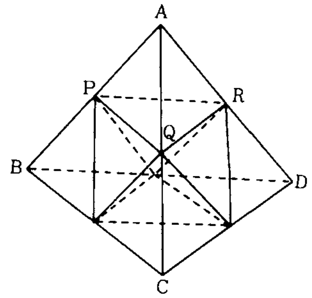
(3)　この立体の頂点の数、辺の数はいくつか。



14．正四面体の頂点Ａを辺にもつ３辺ＡＢ、ＡＣ、ＡＤの中点をそれぞれＰ、Ｑ、Ｒとする。３点Ｐ、Ｑ、Ｒを含む平面でＡを含む正四面体のかどを切に落とす。同じように正四面体のかどを落としてできる立体について次の問いに答えよ。

(1)　この立体の面の数はいくつか。

(2)　この立体の各面の形はどんな図形か、この立体を何というか。

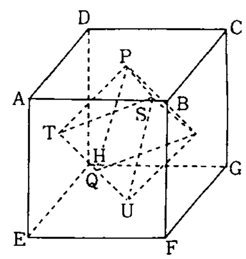


15．立方体の１つ面ＡＢＣＤの対角線の交点をＰとする。同じように他の各面にそれぞれ点Ｑ、Ｒ、Ｓ、Ｔ、Ｕをとる。これらの点を頂点とする立体について次の問に答えよ。

(1)　この立体の頂点はいくつあるか。

(2)　この立体の面の数はいくつか。また各面はどんな図形か。

(3)　この立体は何という図形か。



16．立方体（正六面体）の対称面の数はいくつか。

(ア)対称面を１つ１つ数える。

(イ)対称面による立体の切り口の形（正方形、長方形）に気づかせて数える。

(ウ)切り口の正方形は立方体の面の対称軸、ＰＱ、ＱＲ、ＲＳ、ＳＰを辺にしているから。

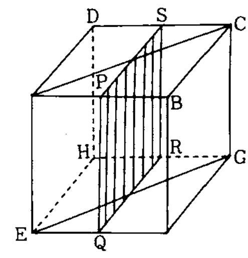
12÷４＝３（面）

切り口が長方形になるものは立方体の面の対角線を２本を辺にしているから

切り口が長方形になるものは

12÷２＝６（面）

対称面の数は　３＋６＝９（面）

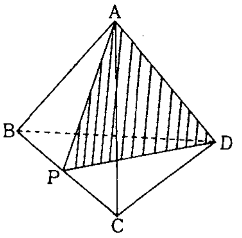


17．正四面体の対称面の数はいくつか。

(ア)対称面による立体の切り口は立体の１辺と正三角形の中線２つからできる二等辺三角形である。

対称面の数は辺の数と同数で６面

または　３×４÷２＝６（面）



18．正八面体の対称面の数はいくつか。

(ア)対称面による立体の切り口の線を各自の立体に記入させる。

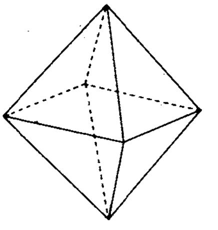
(イ)切り口の図形は何か。（正方形、ひし形）

(ウ)切り口の図形の辺はどんな線分からできているか。

(エ)正方形のもの　12÷４＝３（面）

ひし形のもの　３×８÷４＝６（面）

よって、対称面の数は　３＋６＝９（面）



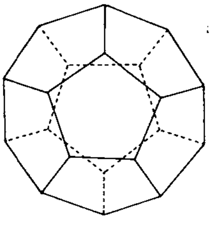
19．正十二面体の対称面の数はいくつか。

対称面による立体の切り口の図形は立体の辺２つと正五角形の対称軸を４本を辺にしているから

５×12÷４＝15（面）

または

30÷２＝15（面）



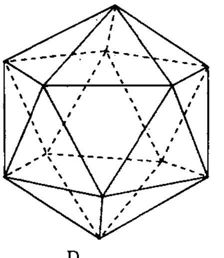
20．正二十面体の対称面の数はいくつか。

対称面による立体の切り口の図形は立体の辺２つと正三角形の中線４本を辺にしているから

30÷２＝15（面）

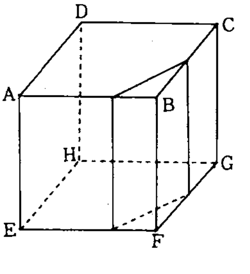
または

３×20÷４＝15（面）

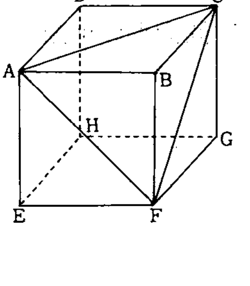


21．立方体を平面ＥＦＧＨに垂直な平面で切ったとき、切り口の図形はどんな図形になるか。

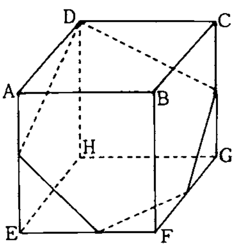
切り口の平面は立方体の辺と交わる点はいくつであるか。



22．立方体を３点Ａ、Ｆ、Ｃを通る平面で切ったとき、切り口の図形はどんな図形になるか。

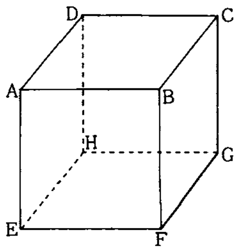


23．立方体を１つの平面で切ったとき切り口が五角形となることがあるか、あればその見取図をかけ。



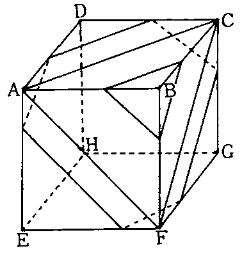
24．立方体を１つの平面で切ったとき切り口の多角形の辺の数がもっとも多い数を求めよ。

切り口の平面と立方体の辺との交点の数がもっとも多くなるときを考えよ。



25．立方体を３点Ａ、Ｆ、Ｃを通る平行な平面で切ったときの切り口はどんな図形ができるか。

点Ｂと切り口の平面との距離により切り口の図形はどのように変わるか。



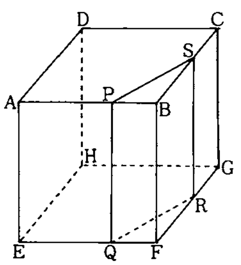
26．立方体を平面ＥＦＧＨに垂直な平面で切る。

(1)　切り口の図形ＰＱＲＳはどんな図形か。

(2)　∠ＰＱＲは何度か、そのわけを述べよ。

(3)　∠ＳＰＱは何度か、そのわけを述べよ。

(4)　線分ＰＳと線分ＱＲは平行であるわけを述べよ。



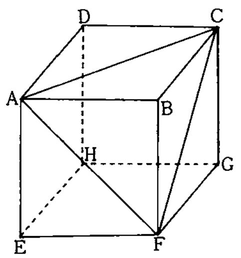
27．立方体を３点Ａ、Ｆ、Ｃを通る平面で切る。

(1)　切り口の図形ＡＦＣはどんな図形か。

(2)　∠ＣＡＦは何度か、そのわけを述べよ。

(3)　∠ＡＣＦは何度か、そのわけを述べよ。

(4)　∠ＣＡＥ、∠ＣＢＦは何度か。



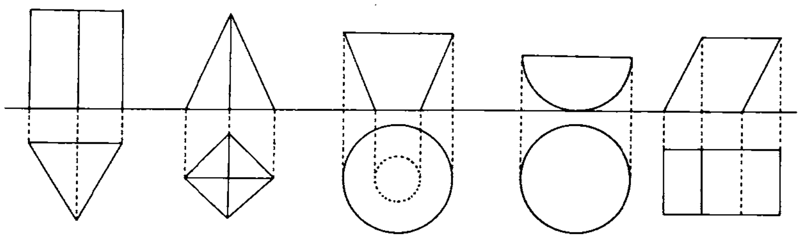
空間図形の切断、投影及び展開

空間図形の切断、投影や展開を考えるときには、具体的な操作が学習にとり入れられ、１年生にとっては興味深く学習できる。小学校における操作的な活動、直観的な取扱いを引きつぎながら、空間図形の理解、空間的な把握を養い、また論証への素地を養う。

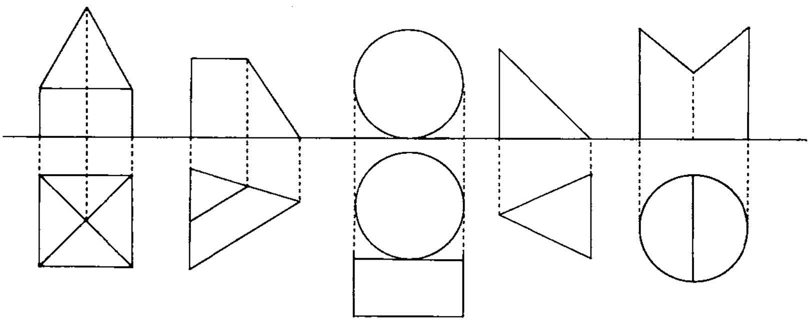
(ア)立体を平面で切ったとき、その切り口がどんな図形になるか。

(イ)立体の見取図をかき、その立体や切り口の図形をつかむ。
(ウ)切り口の図形の辺や角について性質を説明し、論証への素地を養う。
(エ)立体の表現として投影を指導する。今度の改訂では、投影図の基本的な考え方や方法を理解させることに主眼をおき、技術的な面、応用的な面に深入りしないように示されている。しかし生徒の学習の関心をもたせ、必要性を高めることも大切である。
(オ)立体の展開図をつくり、立体をつくる。
(カ)立体とその展開図のつながりを理解する。

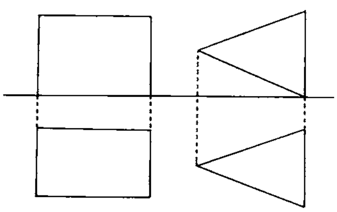
1. 次の投影図はどんな立体を表わしているか。



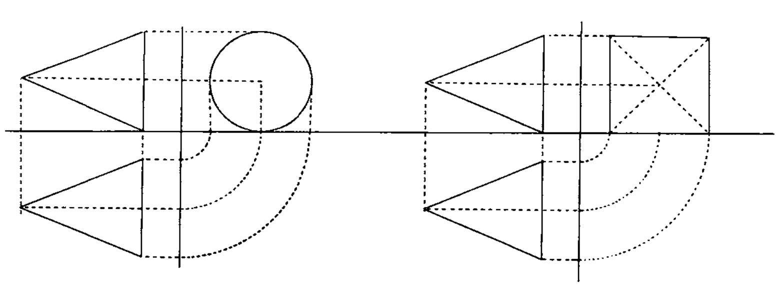
2. 次の投影図で示された立体の見取図をかけ。



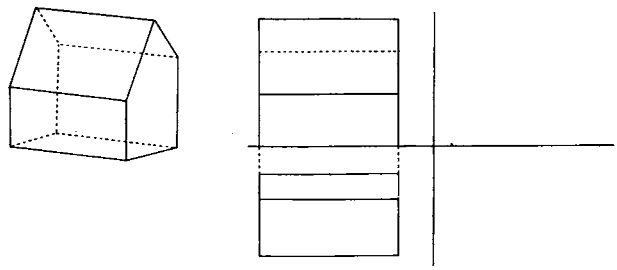
3. 次の投影図から考えられる立体の見取図をかけ。



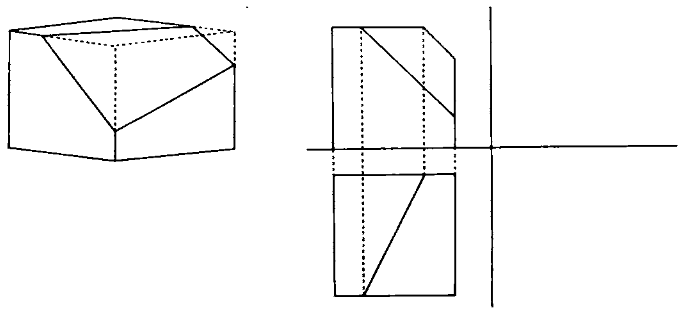
4. 次の投影図はどんな立体を表しているか。



5.　下の見取図の立体の側面図をかけ。

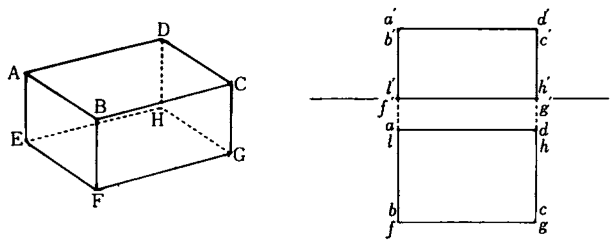


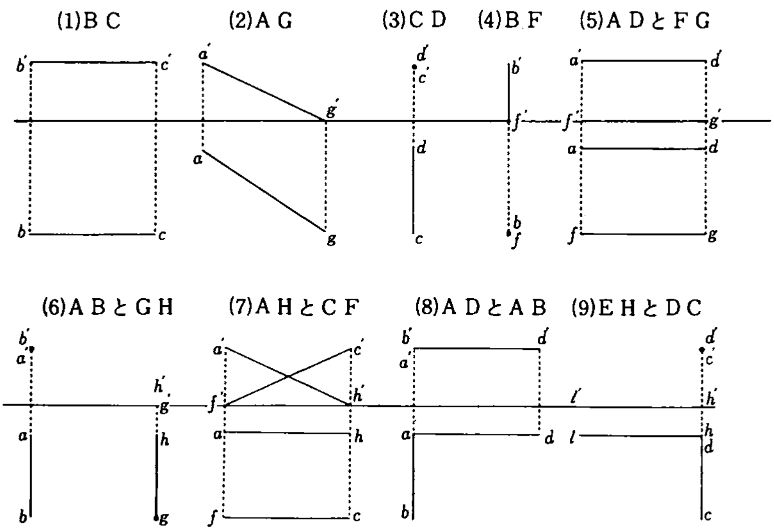
6.　下の見取図の立体は立方体を１つの平面で切ったものである。この立体の側面図をかけ。



7.　次の線分の投影図をかけ。

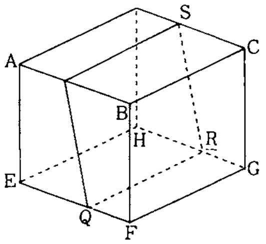
(1)ＢＣ、　(2)ＡＧ、　(3)ＣＤ、　(4)ＢＦ、　(5)ＡＤとＦＧ、　(6)ＡＢとＧＨ、　(7)ＡＨとＣＦ、
(8)ＡＤとＡＢ、　(9)ＥＨとＤＣ

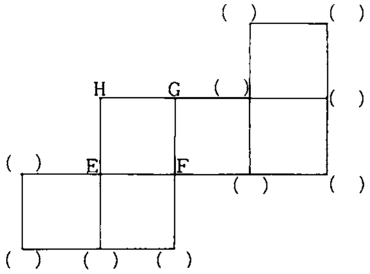




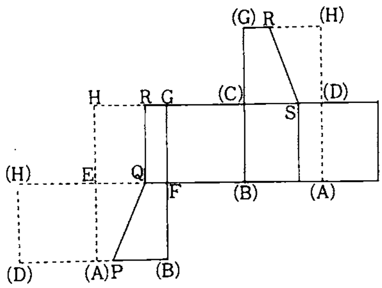
8．下の見取図は１辺３cmの立方体である。この立方体を１つの平面ＰＱＲＳで切る。ただし
ＡＰ＝ＤＳ＝ＦＱ＝ＧＲ＝１cmである。

(1)　右下の図はこの立方体の展開図である。（　）の中へ頂点の記号を入れよ。

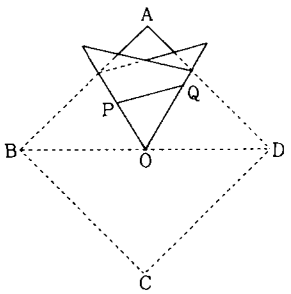


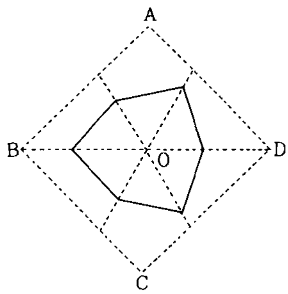


(2)　立方体を平面ＰＱＲＳで切ったときの切り口の線を展開図の中へかけ。また、２つにわけた立体のうちＢを含んでいる立体の展開図をかけ。

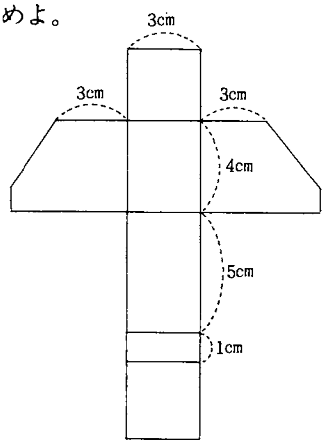


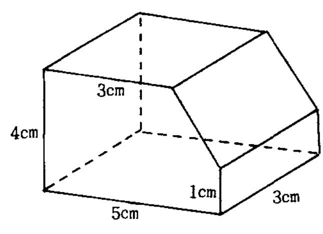
9．下の図は正方形の紙ＡＢＣＤを順に折りまげたところです。ＣをＡに重ねるように折りまげ、次に∠ＢＯＤを三等分する線を折り目として折りまげます。
図に示する線分ＰＱをはさみで切り、点Ｏを含む側をひろげるとどんな図形になるか、下の図にかけ。



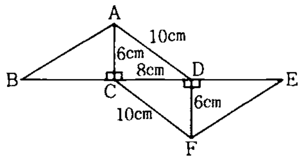


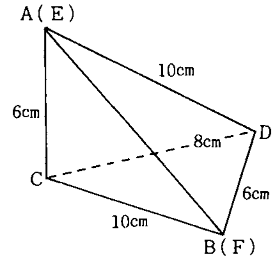
10．右の図は五角柱の展開図である。この立体の見取図をかけ。
またこの立体の体積を求めよ。





11．下の図は三角錐の展開図である。この立体の見取図をかけ。
また、この立体の表面積と体積を求めよ。





12．1辺10cmの正方形ＡＢＣＤの辺ＢＣ、ＣＤの中点をそれぞれＥ、Ｆとし、ＡＥ、ＡＦ、ＥＦを折り目として折り曲げて三角錐をつくる。

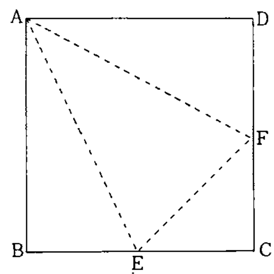
(1)　この立体の見取図をかけ。

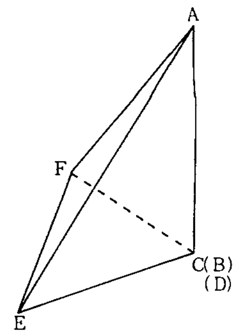
(2)　△ＣＥＦを底面としたとき、この三角錐の高さを求めよ。

(3)　この三角錐の体積を求めよ。

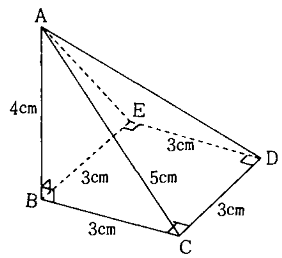
(4)　△ＡＥＦの面積を求めよ。

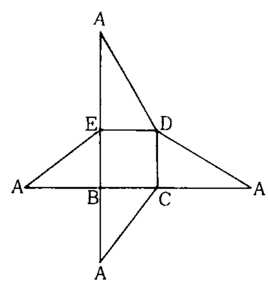
(5)　△ＡＥＦを底面としたとき、この三角錐の高さを求めよ。





13．下の図は四角錐の見取図である。この四角錐の展開図をかけ。また、この四角錐の表面積を求めよ。

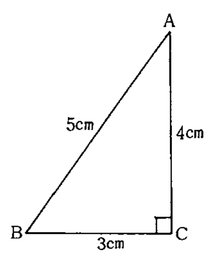




14．下の図のような直角三角形ＡＢＣがある。

(1)　ＡＣを軸として回転してできる円錐の見取図と展開図をかけ。
　また、この円錐の表面積、体積を求めよ。

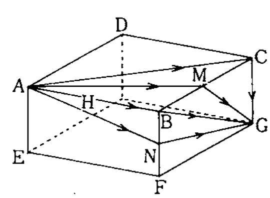
(2)　ＡＢを軸として回転してできる立体の見取図、展開図をかけ。



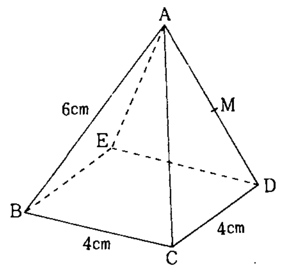
15．右の図の直方体で点Ａから点Ｇまで直方体の表面上を通って行くとき次の各問に答えよ。ただし、ＢＭ＝ＭＣ、ＢＮ＝ＮＦ

(1)　図の矢印で示される４つの道のうち、いちばん短い道はどれか。

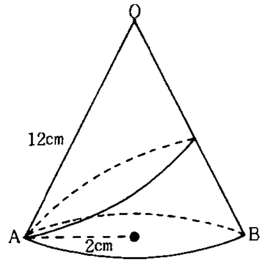
(2)　図の４つの道のほかにもっとも短い道はあるか。



16．右の図は正四角錐である。ＡＤ上にＭをとり、ＡＭ＝ＭD である。この立体の表面上を通って点Ｂから点Ｍまで行くもっとも短い道を展開図上に示せ。

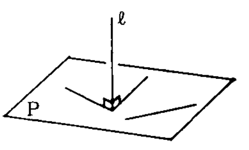


17．母線の長さ12cm、底面の円の半径２cmの円錐がある。底面の円周上の点Ａから側面をひとまわりして点Ａにもどる線をひくとき、もつとも短い線の長さはいくらか、また、点Ａから側面を２まわりして点Ａにもどるもつとも短い線の長さをその展開図上で示せ。

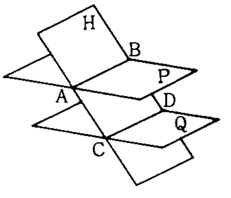


合同、相以

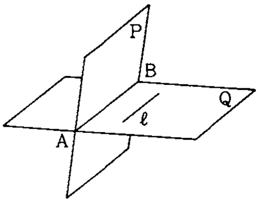
直線 ℓ が平面Ｐ上の交わる２直線に垂直であるとき、直線 ℓ は平面Ｐに垂直であるという。
また、直線 ℓ が平面Ｐに垂直であるとき、直線 ℓ は平面Ｐ上のすべての直線に垂直である。



平行な２平面Ｐ、Ｑと、これらに交わる平面Ｈがあるとき、その交線ＡＢとＣＤは平行である。
平面Ｐ∥平面Ｑ　だから　ＡＢとＣＤは交わらない。
またＡＢとＣＤは同じ平面Ｈ上の直線である。
よって２直線ＡＢとＣＤは平行である。



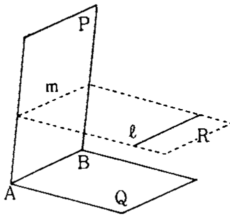
平面Ｐが直線 ℓ と平行であるとき、直線 ℓ をふくむ平面Ｑと平面Ｐとの交線ＡＢは直線 ℓ に平行である。
平面Ｐ∥直線 ℓ　だから　ＡＢと ℓ は交わらない。
またＡＢと ℓ は同じ平面Ｑ上の直線である。
よって２直線ＡＢと ℓ は平行である。



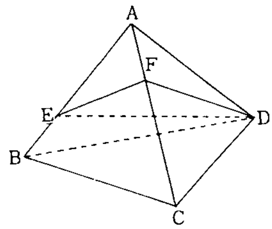
平面Ｐと平面Ｑがともに直線ℓに平行で、その２平面が交わるとき、その交線ＡＢは直線ℓに平行である。

直線ℓをふくみ平面Ｑと平行な平面Ｒを考えて、２平面Ｐ、Ｒの交線をｍとすれば、平面Ｐ∥直線ℓ　だから　ｍ∥ℓ

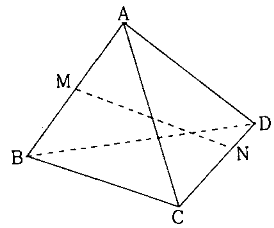
また、平面Ｑ∥平面Ｒ　だから　ｍ∥ＡＢよって直線ＡＢは直線ℓに平行である。



1．正四面体Ａ－ＢＣＤで辺ＡＢ、ＡＣ上に点Ｅ、ＦをとりＢＥ＝ＡＦ、ならば△ＤＥＦは二等辺三角形となることを証明せよ。

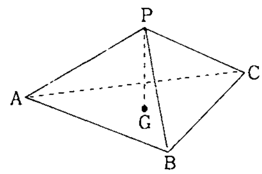


2．正四面体Ａ－ＢＣＤで辺ＡＢの中点をＭとすれば、その対辺ＣＤ上の任意の点Ｎについて、ＭＮ⊥ＡＢが成り立つことを証明せよ。

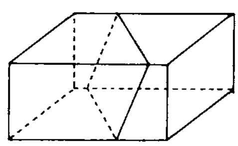


3．正三角形ＡＢＣの重心（外心、内心と一致）Ｇを通り面ＡＢＣに垂直な直線上に点Ｐをとるとき、ＰＡ＝ＰＢ＝ＰＣとなることを証明せよ。

（このときＰ－ＡＢＣは正三角すいとなる）



4．直方体をその４つの平行な辺と交わるような平面で切るとき、その切り口は平行四辺形となることを証明せよ。

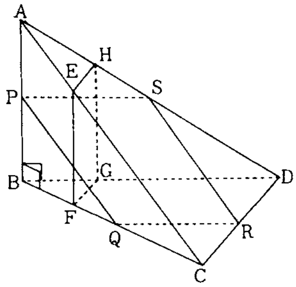


5．右図のような三角すいＡ－ＢＣＤがあり、ＡＢ＝ＣＤ＝12cm、ＡＣ＝ＢＤ＝20cm、∠ＡＢＣ＝∠ＡＢＤ＝90°である。このとき次の各問いに答えよ。

(1) ∠ＢＣＤ＝90°となることを証明せよ。

(2) 辺ＤＣが面ＡＢＣに垂直であることを証明せよ。

(3) 辺ＡＢに平行で、かつ辺ＣＤにも平行な平面でこの三角すいを切るとき、他の４辺ＡＣ、ＣＢ、ＢＤ、ＤＡと交わる点をそれぞれＥ、Ｆ、Ｇ、Ｈとする。



㋐四角形ＥＦＧＨはどんな形になるか。

㋑ＡＥ＝５㎝として四角形ＥＦＧＨの周と面積を求めよ。

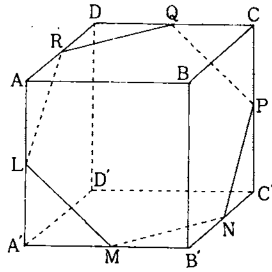
(4) 辺ＡＣに平行で、かつ辺ＢＤにも平行な平面でこの三角すいを切るとき、他の４辺ＡＢ、ＢＣ、ＣＤ、ＤＡと交わる点をそれぞれＰ、Ｑ、Ｒ、Ｓとする。

㋐四角形ＰＱＲＳはどんな形になるか。

㋑ＡＰ＝ｘ㎝として、ＰＱ、ＰＳの長さをｘを用いた式で表わせ。

㋒四角形ＰＱＲＳの周は点Ｐの位置に関係なく一定であることを証明せよ。

6．立方体ＡＢＣＤ－Ａ′Ｂ′Ｃ′Ｄ′において、辺ＡＡ′、Ａ′Ｂ′、Ｂ′Ｃ′、Ｃ′Ｃ、ＣＤ、ＤＡの中点をそれぞれＬ、Ｍ、Ｎ、Ｐ、Ｑ、Ｒとする。



(1) 次の各々を証明せよ。

㋐ＡＣ$\underline{\parallel}$ＬＰ、　　㋑ＲＱ∥ＬＰ、

㋒ＲＱ＝ＬＲ＝ＱＰ＝$\frac{1}{2}$ＬＰ

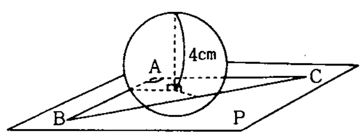
(2) ∠ＬＲＱ、∠ＲＱＰの大きさは何度か、またそのわけをいえ。

(3) 四角形ＭＱＲＬはどんな形か。

(4) 六角形ＬＭＮＰＱＲは正六角形であるといってよいか。

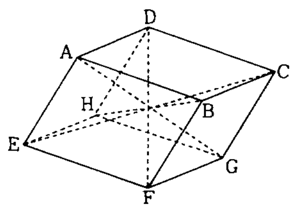
(5) 六角形ＬＭＮＰＱＲの面積は三角形ＡＢ′Ｃの面積の何倍か。

7．△ＡＢＣ（ＡＢ＝６㎝、ＢＣ＝10㎝、ＣＡ＝８㎝、∠Ａ＝90°）の穴があいた板Ｐを水平において、球を上からはめこんだら板の面から球の最も高い点まで距離が４㎝となった。この球の半径を求めよ。



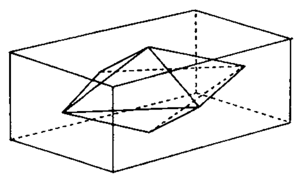
8．平行六面体ＡＢＣＤ－ＥＦＧＨがある。

４本の対角線ＡＧ、ＢＨ、ＣＥ、ＤＦはすべて１点で交わり、かつ、その点はそれぞれの中点であることを証明せよ。

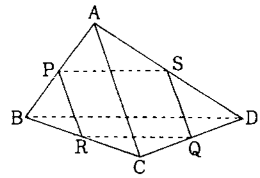


9．直方体の各面（長方形）の対角線の交点を頂点とする立体を図のようにつくるとき、この立体の体積はもとの直方体の体積の何分のいくつになるか。

また、直方体を一般に平行六面体に変えたとき、各面（平行四辺形）の対角線の交点を頂点とする立体をつくるとどうか。



10．四面体Ａ－ＢＣＤの２組の向か合った辺ＡＢとＣＤ、およびＢＣとＤＡの各中点をそれぞれＰ、Ｑ、Ｒ、Ｓとするとき、四角形ＰＲＱＳは平行四辺形となることを証明せよ。



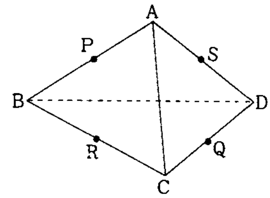
11．前問で、Ａ－ＢＣＤが正四面体であるとき、次の順序で四角形ＰＲＱＳが正方形となることを証明せよ。

(1)　四角形ＰＲＱＳがひし形であることを証明せよ。

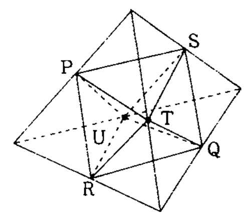
(2)　△ＡＢＱ≡△ＡＤＲを証明せよ。

(3)　ＰＱ＝ＳＲを証明せよ。

(4)　四角形ＰＲＱＳが正方形となることを証明せよ。

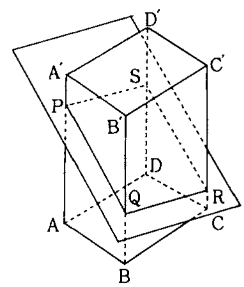


12．正四面体で６個の辺の各中点をＰ、Ｑ、Ｒ、Ｓ、Ｔ、Ｕとするとき、これらの６個の点を頂点とする立体はどんな立体になるか。



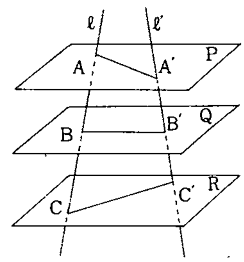
13．長方形ＡＢＣＤでＡＢ＝３cm、ＢＣ＝４cmとする。この長方形ＡＢＣＤを底面とする四角柱ＡＢＣＤ－Ａ′Ｂ′Ｃ′Ｄ′をある平面で切るとき、AA′、BB′、CC′、DD′ と交わる点をＰ、Ｑ、Ｒ、Ｓとし、ＰＡ＝５cm、ＲＣ＝１cmとなった。

ＱＢとＳＤの間にどんな関係が成り立つか。ＱＢ＝ｘcm、ＳＤ＝ｙcmとして、ｘ、ｙの関係式をつくってみよ。



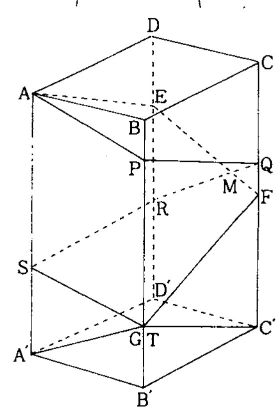
14．２直線ℓ、ℓ' が平行な３平面Ｐ、Ｑ、Ｒと交わる点をそれぞれＡ、Ｂ、Ｃ、およびＡ′、Ｂ′、Ｃ′ とするとき、

$\dfrac{AB}{BC}=\dfrac{A'B'}{B'C'}$　、　$\dfrac{AB}{A'B'}=\dfrac{BC}{B'C'}$　を証明せよ。



15．直方体ＡＢＣＤ－Ａ′Ｂ′Ｃ′Ｄ′ でAB＝２cm　ＢＣ＝３cm　AA′＝10cmとする。頂点ＡからＡ′まで糸をひと巻きして強く引張ったときの糸のあとがＡ－Ｅ－Ｆ－Ｇ－Ａ′、また頂点Ａから前と反対側に糸をひと巻き半して頂点Ｃ′まで強く引張ったときの糸のあとがＡ－Ｐ－Ｑ－Ｒ－Ｓ－Ｔ－Ｃ′である。次の各問いに答えよ。

(1)　ＤＥ、ＣＦ、ＢＧの長さを求めよ。



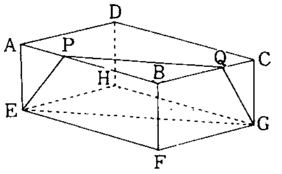
(2)　ＢＰ、ＣＱ、ＤＲ、ＡＳの長さを求めよ。

(3)　２つの糸が辺ＢＢ′を通るときの点ＧとＴは一致することを証明せよ。

(4)　２つの糸が面ＣＤＤ′Ｃ′上で交わる点Ｍは辺ＣＤから何cm離れたところにあるか。

16．右の図の直方体ＡＢＣＤ－ＥＦＧＨにおいて、ＡＢ＝８cm ＡＤ＝６cm、ＡＥ＝３cm、ＥＧ＝10cmである。

辺ＡＢ上に点Ｐをとり、３点Ｐ、Ｅ、Ｇを通る平面でこの直方体を切ったところ、その切り口が四角形ＰＥＧＱとなった。ＡＰ＝２cmのとき次の各問いに答えよ。



(1)　四角形ＡＥＧＣが長方形であることを証明せよ。

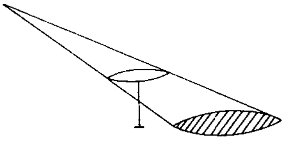
(2)　四角形ＰＥＧＱが台形であることを証明せよ。

(3)　ＰＱ：ＥＧ＝ＰＢ：ＥＦを証明せよ。

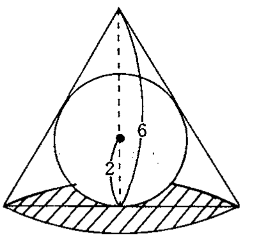
(4)　ＰＱの長さを求めよ。

(5)　立体ＰＢＱ－ＥＦＧの名前をいえ。またその体積を求めよ。

17．円形のテーブルが床面に水平におかれている。電燈の点光源によって、テーブルの面が床面に投ずる影の形はテーブルの位置によってどう変わるか。

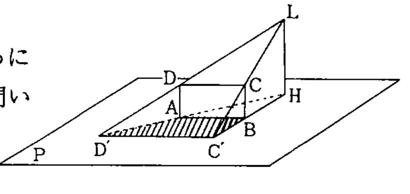


18．半径２の球が床面におかれている。その球の真上で床からの高さ６の所にある点光源によって床にうつる球の影の面積を求めよ。



19．右の図のように、たてＡＤ＝40cm、よこＡＢ＝70cmの長方形の板ＡＢＣＤが水平面Ｐに垂直に立っている。

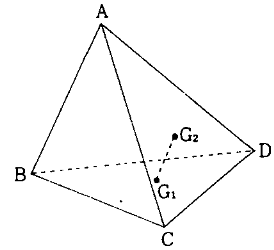
また点光源Ｌが平面Ｐから90cmの高さ（ＬＨ）のところにある。いま板ＡＢＣＤの影をＡＢＣ′Ｄ′とするとき次の問いに答えよ。



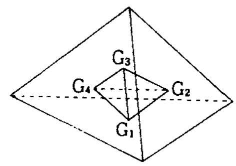
(1)　Ｃ′Ｄ′の長さを求めよ。

(2)　影ＡＢＣ′Ｄ′の面積を板の面積の３倍にするには、Ｌの真下の点Ｈから板までの距離をいくらにすればよいか。

20. 三角すいの２つの頂点Ａ、Ｂとそれぞれに対する面ＢＣＤ、ＣＤＡの重心をG_1、G_2、とする。G_1G_2 ∥ ＡＢ を証明せよ。また、AG_1、BG_2 はたがいにどんな比に内分し合っているか。



21. 正四面体のそれぞれの面の重心（G_1、G_2、G_3、G_4）を頂点とする四面体は、はじめの正四面体の体積の何倍か。

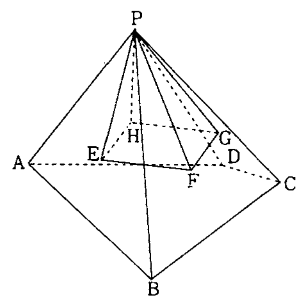


22. 四角すいＰ－ＡＢＣＤの４つの側面ＰＡＢ、ＰＢＣ、ＰＣＤ、ＰＤＡ、の各重心をＥ、Ｆ、Ｇ、Ｈとする。

(1) 四角形ＥＦＧＨは平行四辺形となることを証明せよ。

(2) 四角形ＥＦＧＨと四角形ＡＢＣＤの面積比を求めよ。

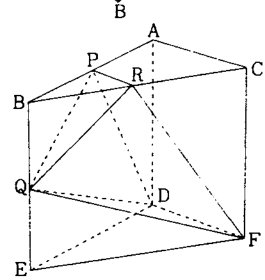
(3) 四角すいＰ－ＥＦＧＨと四角すいＰ－ＡＢＣＤの体積比を求めよ。



23. 右の図で、点Ｐ、Ｑ、Ｒは三角柱の辺ＡＢ、ＢＥ、ＢＣの中点である。

(1) Ｂを頂点とし、△ＰＱＲを底面とする三角すいの体積は、もとの三角すいの体積の何分のいくつか。

(2) 四角形ＰＤＦＲを底面とし、Ｑを頂点とする四角すいの体積はもとの三角柱の体積の何分のいくつか。



三平方の定理と球

1. 一辺が12cmの正四面体Ｖ－ＡＢＣがある。次の各問に答えよ。

(1) 表面積を求めよ。

(2) 頂点Ｖから底面ＡＢＣに垂線ＶＨをひいたとき、点Ｈは△ＡＢＣのどんな点になりますか。理由をつけて答えよ。

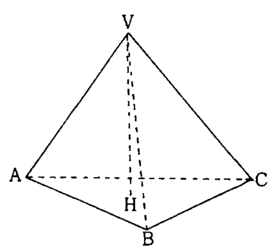
(3) 高さＶＨを求めよ。

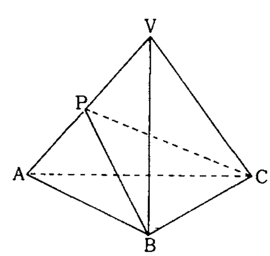
(4) 体積を求めよ。

(5) 正四面体の内部の一点から各面にひいた４つの垂線の長さの和は一定であることを証明せよ。

(6) 辺ＶＡの中点をＰとし、点Ｐと辺ＢＣで作くられる平面でこの正面体を切ったとき

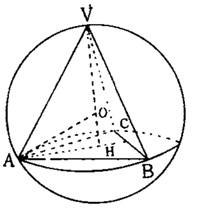
① 切り口の図形はどんな図形になるか。理由をつけて答えよ。





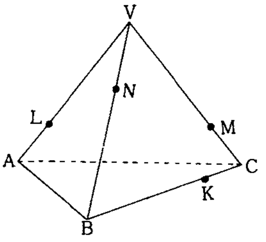
② 切り口の図形の面積を求めよ。

(7) ① 一つの球にこの正四面体を内接（4つの頂点V、A、B、C、が球面上にあるもの）させたときの球の半経を求めよ。



② この正四面体に内接する(球が各面に接しているもの)球の半経を求めよ。

(8) 辺VA、VC、BV、BCをそれぞれ2：1に内分する点をL、M、N、K、とする。



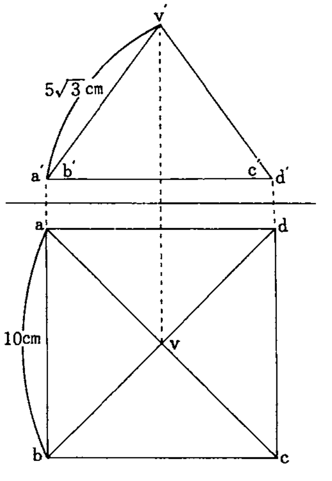
① 3点L、M、Kを通る平面でこの正四面体を切るとき切り口の図形はどんな図形になるか。理由をつけて答えよ。

② 線分LKの長さを求めよ。

③ 3点L、N、K、を通る平面でこの正四面体を切るとき切り口の図形はどんな図形になるか。理由をつけて答えよ。

④ ③でえられた図形の面積を求めよ。

2. 右図は正四角すいV－ABCDの投影図である。ab＝10cm、v′a′＝$5\sqrt{3}$cmである。次の各問に答えよ。



(1) 表面積を求めよ。

(2) 辺VAの長さを求めよ。

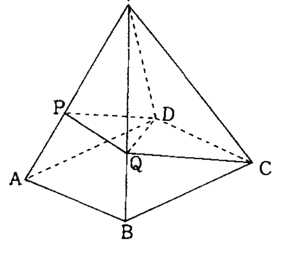
(3) 体積を求めよ。

(4) 辺VC、VDの中点をそれぞれE、Fとする。線分ABとEFで作られる平面でこの正四角すいを切ったとき

① 切り口の投影図をかき入れよ。

② 切り口の図形の面積を求めよ。

(5) この正四角すいを辺CDを含む平面で切ったときその平面が辺VA、VBと交わる点をそれぞれP、QとしたときPQ∥ABであった。またPQ＝x cmとする。



① ∠BVD＝90° であることを証明せよ。

② △VQDの面積をxの式で表わせ。

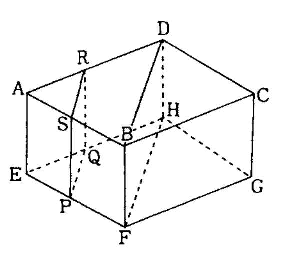
③ 三角すいC－VQDの体積をxの式で表わせ。

④ △VPQの面積をxの式で表わせ。

⑤ 三角すいD－VPQの体積をxの式で表わせ。

⑥ 平面CDPQでこの正四角すいの体積を二等分したい。このとき線分VPの長さを求めよ。

3. AB＝6cm、AD＝8cm、AE＝6cmの直方体ABCD－EFGHがある。点PがEを出発し点Fを通り点Gまで辺EF、FGを動くものとする。次の各問に答えよ。



(1) 対角線AGの長さを求めよ。

(2) 頂点Aから側面をひとまわりして頂点Eまで線をひくときもつとも短い線の長さを求めよ。

(3) ＥＰ＝４cmのとき△ＡＰＨの面積を求めよ。

(4) ＰがＦに一致したとき頂点Ｅより平面ＡＦＨまでの距離を求めよ。

(5) 点Ｐを通り平面ＢＦＨＤと平行な平面でこの直方体を切ったときＥＨ、ＡＤ、ＡＢとの交点をそれぞれＱ、Ｒ、Ｓ、とする。

① ＥＰ＝３cmのとき、四角すいＧ－ＢＦＨＤと四角すいＧ－ＰＱＲＳの体積の比を求めよ。

② ∠ＰＱＧ＝90°のとき

(ア) ＥＰの長さを求めよ。

(イ) ＧＱの長さを求めよ。

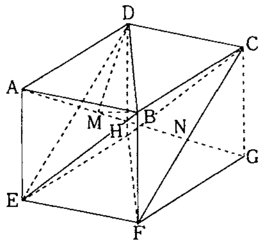
(ウ) 四角すいＧ－ＰＱＲＳの体積を求めよ。

(6) この直方体を１つの平面で切ったとき

(ア) その切り口が正三角形であるようにするときその切り口の最大面積を求めよ。

(イ) また切り口が正方形であるようにするときその切り口の最大面積を求めよ。

4. 一辺の長さが４cmの立方体ＡＢＣＤ－ＥＦＧＨがある。次の各問に答えよ。



(1) 対角線ＡＧの長さを求めよ。

(2) 頂点ＤよりＡＧに垂線ＤＭをひくときＡＭ、ＤＭの長さを求めよ。

(3) ＢＭ⊥ＡＧであることを証明せよ。

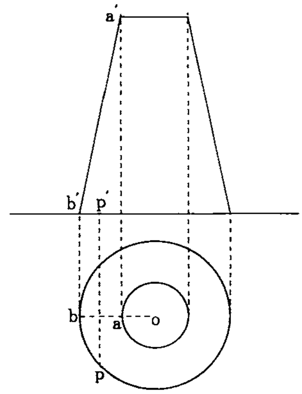
(4) ＡＧは平面ＢＤＥに垂直であることを証明せよ。

(5) 同様にしてＡＧは平面ＣＨＦに垂直であることがいえるから対角線ＡＧは平面ＢＤＥ、ＣＨＦによって三等分されることを証明せよ。

(6) 直方体の６個の頂点から４個の頂点をえらび順次結ぶと正四面体が作れる。

(ア) その４つの頂点を一組えらべ。

(イ) (ア)でえらんでできた正四面体の体積を求めよ。



5. 右図は円すい台の投影図である。oa＝１cm、ob＝３cm、a′b′＝12cmとする。次の各問に答えよ。

(1) この円すい台の体積を求めよ。

(2) この円すい台の展開図をかけ。

(3) この円すい台の点Ａから側面をひとまわりして点Ｂにいたるもっとも短かい線をひくとき

(ア) (2)でえられた展開図にその線をかき入れよ。

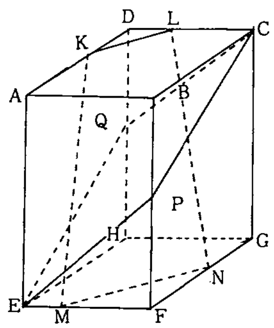
(イ) もっとも短かい線の長さを求めよ。

(4) この円すい台を横にして水平面上を側面がふれるようにおき、すべらないように転がしたら回転してもとの位置にかえった。このとき側面がふれた部分の面積を求めよ。

(5) (4)で求めた面積は円すい台の側面積に等しいといえるか。

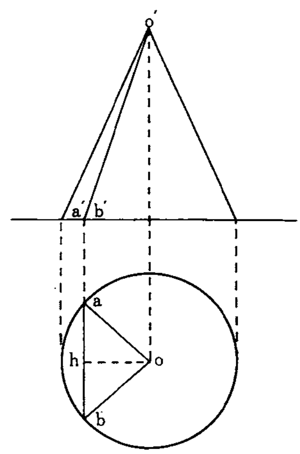
(6) 小さい円の周上に動かない点Aがある。大きい円の周上に動く点Pがある。Pが大きい円の周上を動くとき線分APがもっとも大きくなるときの長さを求めよ。

6. 右図のような正四角柱ABCD－EFGHがある。
FG＝6cm、CG＝12cmである。辺BF、DHの中点をそれぞれP、Q、とする。また辺DA、DCをそれぞれ1：2に内分する点をK、L、辺FE、FGをそれぞれ2：1に内分する点をM、N、とする。
次の各問に答えよ。



(1) 四辺形EPCQはどんな四角形になるか。理由をつけて答えよ。
(2) 四辺形EPCQの面積を求めよ。
(3) 四辺形KMNLはどんな四角形になるか。理由をつけて答答えよ。
(4) 四辺形KMNLの面積を求めよ。

7. 右図は円すいの投影図である。底面の円の半径は5cmで高さは12cmである。この円すいを頂点を通る平面で切ったときの切り口の投影図もかかれている。またoh＝4cmである。次の各問に答えよ。

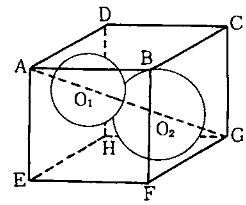


(1) 円すいの表面積を求めよ。
(2) 切り口の図形の面積を求めよ。
(3) この円すいに内接する球がある。
(ｱ) 球の半径を求めよ。
(ｲ) 球の表面積と円すいの表面積の比を求めよ。

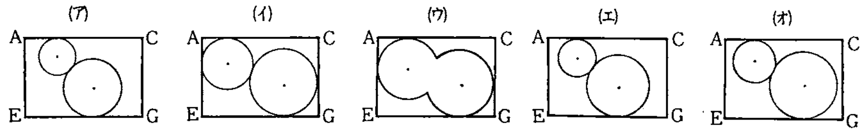
8. 円すいがあってその底面の半径はaで高さはその2倍である。これに高さが底面の半径の3倍であるような円柱を内接させたときこの円柱の体積を求めよ。

9. 平らな床上に半径10cmの相等しい三つの球が二つずつ互に接しておいてある。この上に半径5cmの球をもとの三つの球に接するようにのせたとき、小さい球の中心は床上何cmのところにあるか。

10. 右図は１辺の長さ２cmの立方体である。頂点Ａから最も遠い位置にある頂点をＧとする。この立方体の中に２つの球O_1、O_2を入れる。球O_1は頂点Ａを通る３つの面に接し、球O_2は頂点Ｇを通る３つの面に接しかつ２つの球はたがいに接している。このとき次の各問に答えよ。



(1) この立体をＡＥＧＣを通る平面で切ったときの断面図は次のどれか。(ア)から(オ)までの記号で答えよ。



(2) ２つの球の大きさが等しいとき、その半径を求めよ。

(3) ２つの球の大きさが異なるとき、２つの球の中心間の距離を求めよ。

(4) 球O_2の半径を１cmとしたとき、球O_1と球O_2の接点より平面ＥＦＧＨにひいた垂線の長さを求めよ。

11. １辺の長さが20cm、∠Ｂ＝60°のひし形ＡＢＣＤがある。辺ＡＢ、ＢＣの中点をそれぞれＥ、Ｆとし線ＤＥ、ＥＦ、ＦＤを折り目として△ＡＤＥ、△ＢＥＦ、△ＣＦＤをそれぞれ折りまげて立体を作るときこの立体の体積を求めよ。