関数教材の指導事例について

天川義昭
数学科　池田克己
藺森正栄

1 はじめに

授業中，生徒がどうも活気がない，目の輝きがない。と感じたとき，教師にとってこれほどいやなものはない。問題がやさしすぎて考えるに値しなかったのか，説明が的確でなく，どこかあいまいな点があったのかなど気になることがある。また，逆によく考えてくれ，気持ちよい授業のときもある。

何が活気をもたらすものなのか。一時間一時間が微妙に変わる。
指導の目標がはっきりしていて，指導展開されたか。
指導の素材が生徒の学習にぴったりしていたか。
説明が的確であったか。
教師，生徒が問題の解決，学習に意欲的であったか。

などいろいろ考え，思いあたるふしを探すのがつねである。授業は1人の先生が数十人の生徒と1つの教室で行う。そのためか教師にとっては，どうしても閉鎖的になり，指導の展開がこれでよいのかという不安がいつもつきまとう。もっとよい方法がないのか。どこか注意すべきところがぬけているのではないか心配である。

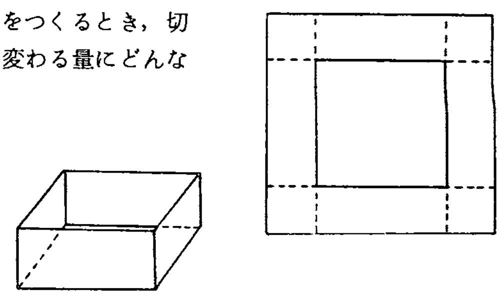
今年度は関数教材について，
(1)　3学年にわたって指導の流れをまとめてみよう。
(2)　生徒が興味をもって学習した問題にどんなものがあるか。
(3)　生徒の困難点はどこか。
の諸点についての試みを述べたいと思う。

2 指導事例

〔第1学年〕

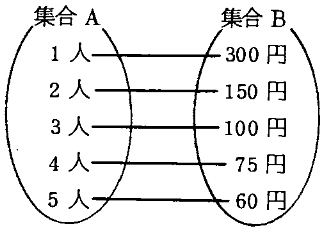
関　数

ともなって変わる量
(1)　5人乗りのタクシーで行くと300円かかるところを何人かで乗るとき，1人あたりの料金はいくらか。
(2)　1辺の長さ18cmの正方形の厚紙がある。4すみから同じ大きさの正方形を4つ切り取って図の破線にそって折りまげ，ふたのない箱をつくるとき，切り取る正方形の1辺の長さを変えると，それにともなって変わる量にどんなものが考えられるか。



集合から集合への対応

上の(1)では



集合 A の要素 a に対して集合 B の要素 b を対応させる。　a → b

対応の規則；b は人数が a のときの 1 人あたりの料金

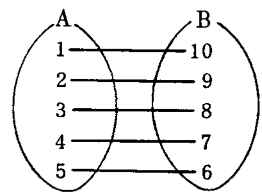
(3)　2 つの集合　A＝{ 1, 2, 3, 4, 5 } B＝{ 6, 7, 8, 9, 10 }　について，

①　A の要素 a に B の要素 b を

$a + 5 = b$

という規則で対応させてみよ。

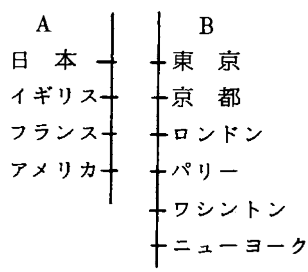
②　つぎのような対応をさせるとき，対応の規則をいえ。



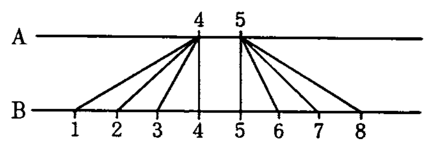
(4)　A に属する国に対し，

その国の都市である

という規則で B の要素を対応させよ。



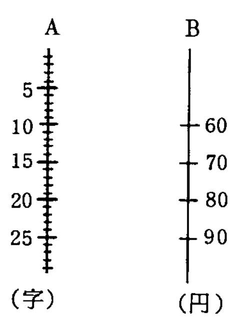
(5)　集合 A から集合 B への対応が右の図のように示されるとき，対応の規則をいえ。



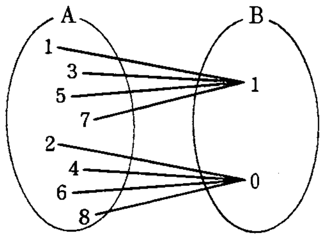
(6)　市外電報料金は下の表のようにきめられている。

この規則によって字数の集合 A の要素に料金の集合 B の要素を対応させよ。

字　数	料金
10 字まで	60 円
11 字から 15 字まで	70 円
16 字から 20 字まで	80 円
21 字から 25 字まで	90 円
…………	



(7)　AからBへの対応が右のように示されるとき，
対応の規則をいえ。



(8)　上の(3)〜(7)について

①　A，Bの各要素の対応のしかたにどのようなちがいがあるか。

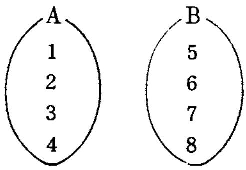
②　Aの各要素にBの1つの要素が対応しているが，Aの2つ以上の要素にBの1つの要素が対応することがあるとき，この対応を多：1の対応という。AからBへの対応が多：1の対応であるものはどれか。

③　Aの1つの要素にBの2つ以上の要素が対応することがあり，Aの2つ以上の要素がBの1つの要素に対応することがないとき，この対応を1：多の対応という。AからBへの対応が1：多の対応であるものはどれか。

④　Aの各要素にBの1つの要素が対応し，Bの各要素に対応したAの要素が1つのとき，この対応を1：1の対応という。AからBへの対応が1：1の対応であるものはどれか。

⑤　Aの各要素にBの1つの要素が対応しているとき，この対応を一意対応という。一意対応であるものはどれか。

(9)　A＝{ 1, 2, 3, 4 }　B＝{ 5, 6, 7, 8 }　のとき，Aの要素aにBの要素bを
　　bはaの倍数である
という規則で対応させてみよ。
　このとき，この対応を何といえばよいか。
（このような対応を多：多の対応ということがある）



関数

(1)で乗る人数がきまると1人あたりの料金がきまる。

一般に2つの集合X，Yがあって，Xのどの要素xに対しても，Yの要素yが1つだけ対応するとき，すなわち一意対応のとき，この対応を集合Xから集合Yへの関数という。

またこのとき，「yはxの関数である」といういいかたもする。

(10)　(1)で乗る人数をx人，そのときの1人あたりの料金をy円とするとき，

①　対応の規則を式で表わすとどうなるか。

②　変数xのとる値の集合，すなわち変域をいえ。
　また，変数yの変域をいえ。

このとき，集合Aから集合Bへの関数をつぎのように表わす。

$$x \longrightarrow \frac{300}{x}$$

または，$x \longrightarrow y$，$y = \dfrac{300}{x}$　　$x \in A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

そして，　yはxの関数である。

または，1人あたりの料金は乗る人数の関数であるともいう。

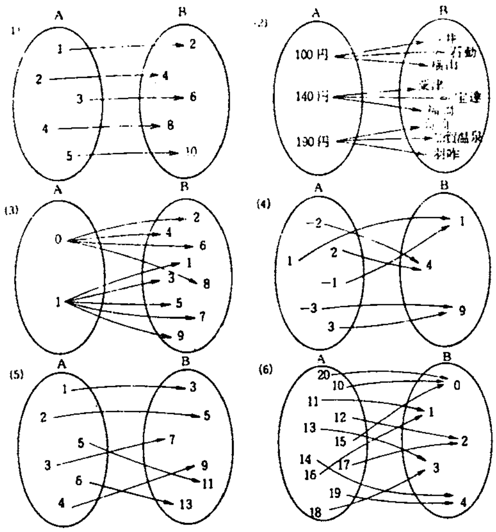
(11)　上の(2)〜(7)のうち，関数といえるものについて同様な表わし方をしてみよ。

練習

(1)　次の集合Aから集合Bへの対応を考えるとき，対応の規則を調べよ。

(2)　集合Aから集合Bへの対応が関数といえるものはどれか。

(3)　逆に集合Bから集合Aへの対応を考えるとき，一意対応であるものはどれか。



比例と反比例

比例（正比例）

(1) 次のことがらで正比例の関係にあるものはどれか，また y を x の式で表わせ。

① 円の半径（x cm）とその面積（y cm²）

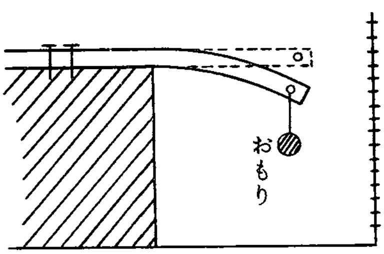
② 現在 15 才と 10 才の兄弟で，兄の年令（x 才）とそのときの弟の年令（y 才）

③ 時速 6 Kmの速さで歩くとき歩いた時間（x 時間）と歩いた距離（y Km）

④ 面積が 10 cm²の長方形のたての長さ（x cm）と横の長さ（y cm）

⑤ 正三角形の一辺の長さ（x cm）とその周の長さ（y cm）

(2) 下の図のような装置で板のたわみの実験をした。下の表はその結果を示している。



おもりの重さ（x g）とたわみの長さ（y cm）の関係を調べよ。

実験ではおもりは 25 g までとする。

おもりの重さ（x g）	5	10	15	20	25
たわみの長さ（y cm）	2.8	5.6	8.4	11.2	14.0

> 一般に 2 つの変数 x，y の間に
>
> $y = ax$　　　a は 0 でない定数
>
> という関係があるとき，y は x に比例するといい，a をその比例定数という。

(3) (1)の③⑤について

① 比例定数はいくつか，またそれはどんな意味をもった値か。

② x の値が 2 倍，3 倍，……n 倍になるとき，それに対応する y の値は，どのような変わり方をしているか。

③ x の値に対し，それに対応する y の値との比の値をいろいろとってくらべてみよ。

④ 2 つの x の値の比と，それぞれに対応する 2 つの y の値の比をくらべてみよ。

(4) ① $y=6x$ について，$x<0$ のとき，上のことを調べよ。

② $y=-6x$ について，上のことを調べよ。

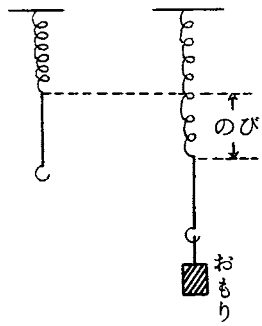
③ 一般に $y=ax$ （$a \fallingdotseq 0$） について，上のことを調べよ。

> $y=ax$ （$a \fallingdotseq 0$） で
>
> ① $x=1$ のとき $y=a$ …… 比例定数は $x=1$ に対応する y の値である。
>
> ② かってな2つの x の値 x_1，x_2 に対応する y の値を y_1，y_2 とすると，
>
> | x | x_1 | x_2 |
> |---|---|---|
> | y | y_1 | y_2 |
>
> $\dfrac{y_1}{x_1}=\dfrac{y_2}{x_2}=a$ …… $\dfrac{y}{x}=a$ （一定）
>
> $y_1 : y_2 = x_1 : x_2$ …… x が n 倍になると，y も n 倍になる。

(5) つる巻きばねにおもりを吊すとき，ばねののびの長さはおもりの重さに比例する。

いま，重さ6Kgまでのおもりを吊すことのできるつる巻きばねに重さ4Kgのおもりを吊したとき，ばねののびの長さが0.6 cmであった。

おもりの重さを x Kg，のびの長さを y mmとして，次の各問に答えよ。



① 変数 x の変域をかけ。

② x と y の関数関係を式で表わせ。

③ 重さ 1.4 Kgのおもりを吊したときのばねののびの長さを求めよ。

④ おもりの重さを2割増すとばねののびの長さは何割増すか。

⑤ ばねののびの長さが 0.36 cmのときのおもりの重さを求めよ。

⑥ ②の式を x について解け。この式から x は y に比例するといえるか，いえるならこのときの比例定数をいえ。

> $y=ax$（比例定数 a）ならば，$x=\dfrac{1}{a}y$（比例定数 $\dfrac{1}{a}$）
>
> y が x に比例するとき，x は y に比例する（比例定数はたがいに逆数）
>
> すなわち，x と y はたがいに比例する。

練習

① y が x に比例し，$x=6$ のとき $y=8$ である。y を x の式で表わせ。また，$x=-9$ のときの y の値および $y=-28$ のときの x の値を求めよ。

② y が x に比例し，x の値が1増すごとに y の値は 0.5 ずつ増すという。$x=4$ のときの y の値を求めよ。

③ 高さ 60 cmの円柱形の容器に 2 ℓの水を入れたら，水面の高さが 12 cmになった。この容器に x ℓの水を入れたときの水面の高さを y cmとして y を x の式で表わせ。また，0.7 ℓの水を入れたときの水面の高さを求めよ。

④ 時計の長針が回転する角度は，経過する時間に比例する。0時から1時までの間を考え，0時からの時間（x 分）とその間に長針が回転する角度（y 度）の関数関係を式で表わせ。

反比例

(6) 次のことがらで反比例の関係にあるものはどれか，また y を x の式で表わせ。

① 500頁の本を読むとき，読んだ頁数（x 頁）と残った頁数（y 頁）

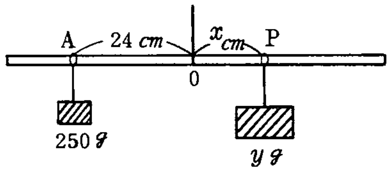
② 10 Kmの距離を行くときの時速（x Km／時）と，かかった時間（y 時間）

③ 1,000円札で1個50円のものを買うとき，その個数（x 個）とおつり（y 円）

④ 体積が 100 cm³の正四角柱で，その底面の正方形の一辺の長さ（x cm）と高さ（y cm）

⑤　120人をどの列も同人数になるように並べるとき，1列の人数（x人）と列の数（y列）

(7)　棒をその中央0でささえ，そこから左の方24 cmのところに250 gのおもりを吊した。そして0から右のいろいろの位置に物を吊して，つり合うようにしたとき，吊した位置の0からの距離（x cm）と，そのときつり合うような物の重さ（y g）を調べたら，つぎのようになった。この2つの量の関係を調べよ。



0Pの長さ（x cm）	5	10	15	20	25	30
吊した物の重さ（y g）	1,200	600	400	300	240	200

一般に2つの変数x，yの間に

$$y=\frac{a}{x}\quad（aは0でない定数）$$

という関係があるとき，yはxに反比例するといい，aをその比例定数という。

(8)　(1)の②⑤について

①　比例定数はいくつか，またそれはどんな意味をもった値か。

②　xの値がn倍になるとき，それに対応するyの値はどう変わるか。

③　xの値とそれに対応するyの値との積をいろいろとってくらべてみよ。

④　2つのxの値の比とそれぞれに対応する2つのyの値の比をくらべてみよ。

(9)①　$y=\frac{36}{x}$　について，$x<0$　のとき，上のことを調べよ。

②　$y=\frac{-36}{x}$について，上のことを調べよ。

③　一般に　$y=\frac{a}{x}$　（$a\fallingdotseq 0$）　について，上のことを調べよ。

$y=\frac{a}{x}$　（$a\fallingdotseq 0$）　で

①　$x=1$　のとき　$y=a$

②　かってな2つのxの値x_1，x_2に対応するyの値をy_1，y_2とすると，

x	x_1	x_2
y	y_1	y_2

$x_1\,y_1=x_2\,y_2=a$········$x\,y=a$（一定）

$y_1 : y_2=x_2 : x_1$········xがn倍になると，yは$\frac{1}{n}$倍になる。

(10)　歯数が25で毎分24回転する歯車Aがある。これとかみ合って回転する歯車Bの歯数をx，毎分の回転数をy回とするとき，yはxに反比例する。

①　変数xの変域をかけ。

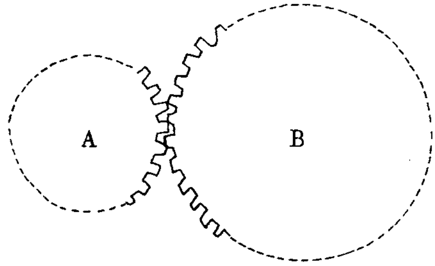
②　xとyの関数関係を式で表わせ。

③　Bの歯数が30のとき，毎分の回転数を求めよ。

④　Bの歯数を25%増すとその回転数は何%減るか。

⑤　Bの回転数を毎分5回にしたい。歯数をいくらにするとよいか。

⑥　歯車Bの歯数(x)は回転数(y)に反比例するといえるか，いえるならこのときの比例定数をいえ。



$y=\frac{a}{x}$　（比例定数a）　ならば　$x=\frac{a}{y}$　（比例定数a） yがxに反比例するとき，xはyに反比例する（比例定数は等しい） すなわち，xとyはたがいに反比例する。

練習

① yがxに反比例し，$x=8$のとき$y=\frac{3}{4}$であった。yをxの式で表わし，$x=\frac{2}{3}$のときのyの値，および$y=-12$のときのxの値を求めよ。

② 電流の強さは電圧が一定のとき，抵抗に反比例する。電圧を100ボルト，抵抗を12.5オームにしたとき，8アンペアの電流が流れたとする。10アンペアの電流を流すには抵抗をいくらにしたらよいか。

③ 面積が24 cm²の三角形である。この面積を変えないようにして底辺を20％だけ減らすと，高さは何％増すか。

(11) 次の①～⑩のうち，yがxに比例するもの，反比例するものをえらべ。また，そのときの比例定数をいえ。

① $y=-5x$　② $y=2x+3$　③ $xy=-6$　④ $\frac{x}{y}=\frac{2}{3}$　⑤ $y=3x^2$

⑥ $3x=4y$　⑦ $x=\frac{3}{2y}$　⑧ $\frac{x}{3}=\frac{y}{4}$　⑨ $\frac{x}{4}=\frac{5}{y}$　⑩ $y=\frac{3}{x}+2$

(12) ① 長方形のたてをx cm，横をy cm，その面積をz cm²とする。

○たての長さが一定のとき，横の長さと面積の関係をいえ。

面積が一定のとき，たての長さと横の長さの関係をいえ。

② 円柱の底面の円の半径をr cm，高さをh cm，側面積をS cm²とする。

○hが一定のときのSとrの関係。　○Sが一定のときのrとhの関係。

(13) ① yがxに反比例し，比例定数は60である。xの値が1，2，3，……のときのyの値を求めよ。また，それぞれのときの$\frac{1}{x}$の値を表に記入し，yと$\frac{1}{x}$の関係を調べよ。

② yがxに比例するとき，yと$\frac{1}{x}$の関係を調べよ。

x	1, 2, 3, 4, 5, 6
$\frac{1}{x}$	
y	

(14) 2つの変数x，yの間に　$y=2x-6$　が成り立つとき，

① yはxに比例するといえるか。

② $y=2(x-3)$　と変形し，yと$x-3$の関係を調べよ。

③ $y+6=2x$　と変形し，$y+6$とxの関係を調べよ。

(15) ① zはyに反比例し，yはxに比例する。$x=6$のとき$y=8$，$z=5$である。

(ア) zとxの関係を式で表わせ。

(イ) $z=4$のときのxの値を求めよ。

② zはyに比例し，yはxに比例する。$x=5$のとき$z=15$である。$x=2$のときzの値を求めよ。

練習

① 次の各式で（　）の中の文字を変数とし，その他の文字を定数とするとき，反比例の関係にあるものをいえ。

(ア) $S=\frac{1}{2}ah$（S，h）　(イ) $S=4\pi r^2$（S，r）　(ウ) $S=\frac{1}{2}(a+b)h$（S，h）

(エ) $\ell=2(a+b)$（ℓ，a）　(オ) $S=\pi\ell r$（ℓ，r）　(カ) $R=C\cdot\frac{\ell}{S}$（R，S）

② 次の場合，yとzはどんな関係か。

(ア) yがxに比例し，xがzに比例するとき。

(イ) yがxに比例し，xがzに反比例するとき。

(ウ) yがxに反比例し，xがzに反比例するとき。

③ (ア) $y+3$は$x-2$に比例し，$x=4$のとき$y=5$である。$y=-8$のときのxの値を求めよ。

(イ) $y=2x+8$ のとき，yは何に比例するといえるか。

(ウ) $y=3x+5$ のとき，$y+1$は何に比例するといえるか。

(エ) $y-4$が$x+3$に反比例し，比例定数が10である。$y=6$のときのxの値を求めよ。

いろいろな比例関係

2乗に比例

(1) 1辺の長さがx cmの立方体の表面積をy cm²とする。

① yをxの式で表わせ。

② 右の表を完成し，yとx^2の比例関係を調べよ。

③ $x^2=\mathrm{X}$とおいて，yとXの関係式をつくり，yとXの関係をいえ。

x	1,	2,	3,	4,	5, ……
x^2					
y					

④ xの値がn倍になるとき，yの値はどう変わっていくか。

⑤ 2つのxの値 x_1, x_2 の比とそれに対応する2つのyの値 y_1, y_2 の比をくらべてみよ。どんなことがいえるか。

一般に2つの変数x，yの間に

$$y=ax^2 \quad (a\text{は0でない定数})$$

という関係があるとき，yはxの2乗（平方）に比例するという。 a；比例定数

このとき，次のことがいえる。

◦ xの値がn倍になるとそれに対応するyの値はn^2倍になる。

◦ xの2つの値 x_1, x_2 とそれぞれに対応するyの値をy_1, y_2とする。

x	x_1	x_2
y	y_1	y_2

$$y_1 : y_2 = x_1^2 : x_2^2$$

(2) ダイヤモンドの値段はその重さの平方に比例する。4カラットの値段が320万円である。（1カラットは0.2 g）

重さxカラットのダイヤモンドの値段をy万円として

① xとyの関数関係を式で表わせ。

② 6カラットの値段はいくらか。

③ 4カラットのダイヤモンドをあやまって1カラットと3カラットの2つに割ってしまった。そのための損害はいくらか。

(3) 航空機が音速を超える速さで飛ぶとき，機体のうける抵抗は速さの2乗に比例する。速さが20%増加すると，抵抗は何%増加するか。

3乗に比例

(4) 3辺の比が1：2：4ときめられたとき，この直方体の最小の1辺の長さをx cm，体積をy cm³として，

① yをxの式で表わせ。

② 2乗に比例のときと同様に表をつくって，その比例関係を調べよ。

一般に２つの変数x，yの間に $y=ax^3$　（aは０でない定数） の関係があるとき，yはxの３乗（立方）に比例するという。　a；比例定数

このとき
xの値がn倍になるとそれに対応するyの値はn^3倍になる。

(5) 球状のタドンを作るとき，その重さは半径の３乗に比例する。半径を２cmにしたときの重さが120ｇだった。半径を３cmにすると，重さはいくらになるか。

２乗に反比例

(6) 体積が144cm³の正四角柱の底面の１辺の長さをx cm，高さをy cmとする。

① yをxの式で表わせ。

② ２乗に比例のときと同様に表をつくって，その比例関係を調べよ。

一般に２つの変数x，yの間に $y=\frac{a}{x^2}$　（aは０でない定数） の関係があるとき，yはxの２乗（平方）に反比例するという。　a：比例定数 このとき， ○xの値がn倍になるとそれに対応するyの値は$\frac{1}{n^2}$倍になる。 ○xの値x_1，x_2に対するyの値をy_1，y_2とすると， $\begin{array}{c\|cc} x & x_1 & x_2 \\ \hline y & y_1 & y_2 \end{array}$　　$y_1:y_2=\frac{1}{x_1^2}:\frac{1}{x_2^2}=x_2^2:x_1^2$

(7) ある点の明るさは光源の光度が一定のとき，光源からの距離の平方に反比例する。ある電燈から２mはなれた所の明るさが12.5ルックスであった。同じ電燈からx mはなれた所の明るさをyルックスとする。

① xとyの関数関係を式で表わせ。

② 同じ電燈から５mはなれた所の明るさはいくらか。

③ 同じ電燈からの距離を1.5倍にすると，明るさは何倍になるか。

練習

① ある飛行機が１時間飛ぶのに消費するガソリンの量は，だいたいその速さの平方に比例する。いま時速を300Kmから400Kmに増したとき，もとの何倍のガソリンを要する。

② ダイヤモンドの値段はその重さの平方に比例する。時価120万円のダイヤモンドを誤まって３つに割ってしまった。その重さの比が２：３：５のとき，このための損害はいくらか。

③ yはxの２乗に反比例し，$x=2$のとき$y=\frac{3}{4}$であった。$x=\frac{3}{5}$のときのyの値を求めよ。また，xの値が２割減少すると，yの値は何％増すか。

④ 同質の針金で長さが一定のとき，電気抵抗は切り口（円）の半径の２乗に反比例する。同質で長さが同じ針金A，Bがあって切り口の円の半径の比が４：５である。このとき，針金A，Bの電気抵抗の比を求めよ。

⑤ zはyの２乗に比例し，$y=2$のとき$z=8$である。また，yはxに反比例し，$x=-2$のとき$y=3$である。このときzとxの関係式をつくり，$x=-4$のときのzの値を求めよ。

⑥ 円すいで底面の円の半径をr cm，高さをh cmとするときの体積をV cm³とするとき，$V=\frac{1}{3}\pi r^2 h$の関

係がある。

(ア)　rが一定のとき，Vとhの関係をいえ。

(イ)　hが一定のとき，Vとrの関係をいえ。

(ウ)　Vが一定のとき，rとhの関係をいえ。

積に比例

(8)　高さが3 cmの直方体で底面のたての長さがx cm，横の長さがy cmのとき，その体積をz cm³とする。

①　zをxとyを用いた式で表わせ。

②　xとyの積$x\,y$を1つの変数とみたとき，zと$x\,y$の関係はどうなっているか。

　また，$x\,y=X$とおきかえて，zとXの関係から考えてみよ。

③　xの値をm倍，yの値をn倍にすると，zの値はどう変わるか。

④　xの値を一定にしたときのzとyの関係，またyの値を一定にしたときのzとxの関係はどうなっているか。

y \ x	1	2	3	4	x	
1	(　　)	(　　)	(　　)	(　　)		
2	(　　)	(　　)	(　　)	(　　)		
3	(　　)	(　　)	(　　)	(　　)		
4	(　　)	(　　)	(　　)	(　　)		
y					$(x\,y)$ z	

3つの変数x，y，zの間に

$$z=a\,x\,y\quad (a\text{は}0\text{でない定数})$$

という関係があるとき，zはxとyの積に比例するという。　a；比例定数

このとき，xの値をm倍，yの値をn倍にするとき，zの値はmn倍になる。

3つの変数x，y，zの間に

$$z=a\,x\,y\quad (a\fallingdotseq 0)\quad \text{が成り立つとき，}$$

xとzだけが変数で他のyが一定のとき，zはxに比例し，

yとzだけが変数で他のxが一定のとき，zはyに比例する。

このとき，zはxに比例し，yに比例するという。

(9)　3つの変数x，y，zの間に次の式が成り立つとき，zとx，yの関係をいえ。また，xの値をm倍，yの値をn倍にしたとき，zの値はどう変わるか。

①　$z=\dfrac{2y}{x}$　　②　$z=a\,x^2y$　　③　$z=a\cdot\dfrac{x}{y^2}$

(10)　お金を何年間か預けたときの利息は，預けた金額（元金）と期間の積に比例する。元金が10,000円で期間が2年のとき，利息は1,200円であった。

①　30,000円を5年間預けたときの利息を求めよ。

②　元金を40％増し，期間を半分にちぢめるとき，利息はどう変わるか。

(11)　ある点の明るさzルックスは，光源の燭光数x燭光に比例し，その光源からの距離y mの平方に反比例する。

1燭光の光源から1mはなれた所の明るさが1ルックスである。

①　x，y，zの関係を式で表わせ。

②　光源から2mはなれたところの明るさを20ルックスにしたいとき，光源を何燭光にするとよいか。

③　光源の燭光数が3倍になり，光源からの距離も3倍になると，明るさはもとの何倍になるか。

(12) 汽船が静水中を航行するときに要する重油の量は速さの 2 乗に比例し，航行時間に比例する。静水中を時速 20 Kmで航行するとき，1 時間に 500 ℓの重油を要する汽船である。

① この汽船が重油 3,000 ℓでは静水中を時速 30 Kmで航行できる時間はどれほどか。

② この汽船が流れの速さ 5 Km／時の川を 30 Kmはなれた地点まで 2 時 30 分かかって航行し，帰りは 30 Kmの所を 1 時間半で航行した。往復に要した重油の量を求めよ。

練習

① 風が平面に垂直にあたるとき平面がうける全圧力は，風速の 2 乗に比例し，平面の面積に比例する。風速が毎秒 15 mのとき，1 辺が 2 mの正方形の平面がうける全圧力が 108 Kgであった。風速が毎秒 30 mで平面の面積が 60 m²のとき，この平面がうける全圧力はいくらか。

② 気体の体積Vは絶対温度（セ氏の度数 t に 273 を加えたもの）に比例し，圧力Pに反比例する。温度がセ氏 12 度，圧力 6 気圧のとき 135 cm³の体積をもつ気体は，温度セ氏 31 度，圧力 4 気圧のとき，その体積はどれだけか。

③ 同質の針金で電気抵抗は長さに比例し，切り口（円）の半径の 2 乗に反比例する。同質の針金A，Bがあり，長さの比が 2 ： 3，切り口の円の半径の比が 4 ： 5 のとき，この針金A，Bの電気抵抗の比を求めよ。

④ 変数V，r，h の間に，$V=\frac{1}{3}\pi r^2 h$ の関係があるとき，

(ア) Vは r，h とどんな比例関係にあるか。

(イ) h はV，r とどんな比例関係にあるか。

(ウ) r を$\frac{1}{2}$倍，h を 6 倍にすると，Vは何倍になるか。

⑤ 半径 r cm，中心角 x 度のおうぎ形の面積を S cm²，おうぎ形の周の長さを ℓ cmとする。

(ア) S，r，x の関係式をつくれ。

(イ) 半径を 50 %増し，中心角を 50 %減らすと，面積はもとの何倍になるか。

(ウ) ℓ，r，x の関係式をつくれ。

(エ) 中心角が一定のとき，おうぎ形の周ℓは半径 r に比例するといえるか。

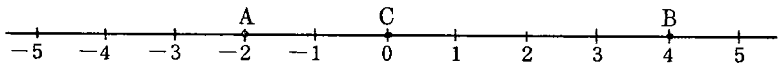
関数のグラフ

座標

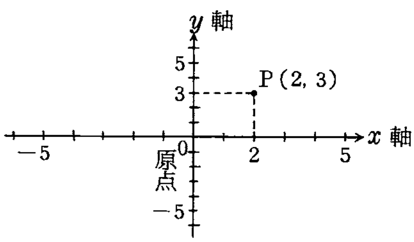
(1) 数直線上の点と正，負の数との対応は，1 対 1 対応である。すなわち，数直線上の点の位置は 1 つの数で示すことができる。この数をその点の座標という。

次の数直線で，① ＋ 2，－ 3.5 に対応する点をかけ。

② A，B，Cの座標をいえ。



(2) 平面上の点の位置を表わすのに，どんな方法が考えられるか。



P（2，3）

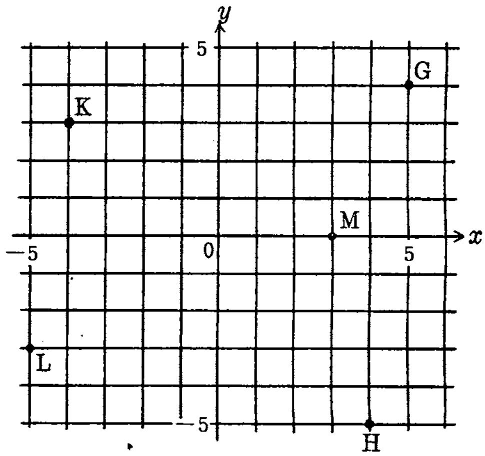
x 座標　y 座標

平面上の点は，順序をつけた２つの数の組（x，y）と１対１対応している。この数の組（x，y）をその点の座標という。

次の座標平面で，

① 次の点をかきこめ。　A（4，2）　B（5，−3）　C（−5，−5）　D（−3，4）　E（0，−2）　F（2，0）

② 次の点の座標を求めよ。　G，H，K，L，M



(3) 次の各点について

x 軸について対称な点

y 軸について対称な点

原点について対称な点

の座標を求めよ。

①（2，3）　②（−4，5）　③（a，b）

正比例のグラフ

(4) y が x に比例し，$y=2x$ が成り立つとき，

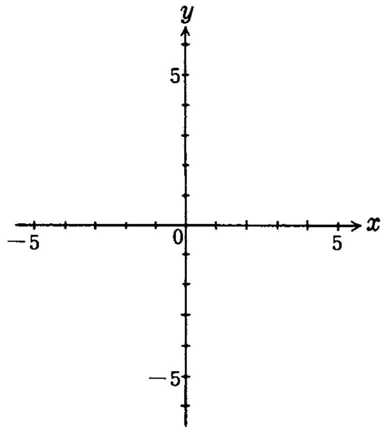
① x の値に対応する y の値を求め，x，y の値の組（x，y）を座標にする点をとってみよ。どのようなことがいえるか。

x	−3,	−2,	−1,	0,	1,	2,	3, ……·
y							

② x の値が−1から1まで0.1おきにとり，（x，y）を座標とする点をとってみよ。

③ これまでとった点はすべて直線上にならんでいる。

逆に直線上にかってな点をとり，その点の x 座標，y 座標の間には，どのような関係が成り立つか調べてみよ。



関数 $y=2x$ で対応する x，y の値の組を座標とする点の集合は直線となっている。この直線を関数 $y=2x$ のグラフという。

(5) 次の関数のグラフをかけ。

① $y=3x$　② $y=1.5x$　③ $y=-1.5x$　④ $y=-3x$

> 正比例　$y=ax$（$a \fallingdotseq 0$）のグラフは原点を通る直線で，
> $a>0$ では右上り，$a<0$ では右下りとなる。

反比例のグラフ

(6) y が x に反比例し，$y=\dfrac{12}{x}$ が成り立つとき，この関数のグラフをかいてみよ。

① x の値が2から4まで0.2おきにとり，（x，y）を座標とする点をとってみよ，どうなっているか。

② x の値が0.1，0.01，0.001，…… と正の値をとりながら0に近づくとき，これに対応する y の値はどうなるか。

また，負の値をとりながら0に近づくときはどうか。

(7) 次の関数のグラフをかけ。

① $y=\frac{24}{x}$　　② $y=-\frac{12}{x}$

> 反比例　$y=\frac{a}{x}$（$a \neq 0$）のグラフは，なめらかな曲線となる。
> この曲線を双曲線という。

いろいろな関数のグラフ

(8) 市内小包郵便では6Kgまでの荷物を送ることができ，その料金は2Kgまでは70円，2Kgをこえ4Kgまでは90円，4Kgをこえ6Kgまでは110円である。重さxKgの小包の料金をy円とするとき，

① 変数xの変域をいえ。

② yはxの関数といえるか。

③ yとxの関係を示すグラフをかけ。

④ yをxの式でかけ。

(9) 自然数xに，xを3でわったときの余りを対応させると，自然数の集合から集合{0, 1, 2}への関数がきまる。この関数のグラフをかけ。

(10) 関数　$y=|x|$　のグラフをかけ。

(11) 次の関数のグラフをかけ。

① $y=x^2$

② $y=x^3$

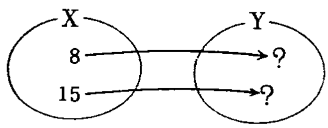
③ $y=\frac{12}{x^2}$

〔第2学年〕

関数とその記号

○ 多角形の辺の数(x)の集合をX，内角の和（∠R）を表わす数（y）の集合をYとする。

(1) 集合Xの要素8, 15に対応する集合Yの要素を求めよ。



8 →（　　）　　15 →（　　）

(2) 変数xの変域を求めよ。

(3) 集合Xから集合Yへの対応を表に示せ。

x	
y	

(4) yはxの関数といえるか。また，xはyの関数といえるか。また，それらの理由ものべよ。

(5) xとyの関係式を求めよ

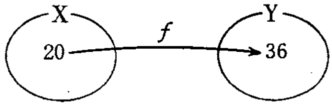
(6) この関数を矢印とことばを用いて下のように表わしたい。（　）に対応のしかたをことばで記入せよ。

$$x \xrightarrow{(\qquad\qquad)} y$$

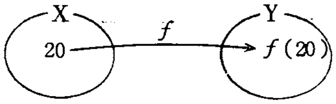
(7) 上の対応，つまり「2倍して4をひく」というしかたによる対応をたとえば記号fを用いて，この関数を　$f: x \longrightarrow 2x-4$ ($x \in X$)　または　$f: x \longrightarrow y$, $y=2x-4$ ($x \in X$)
と表わす。

関数を表わす記号としてf，g，h等が用いられるが，fがもっとも良く用いられる。

(8) 集合Xの要素20に対応する集合Yの要素を求めよ。



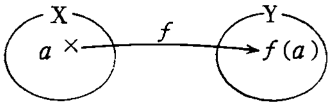
集合Xの要素20に対応する集合Yの要素を関数の記号fを用いて$f(20)$と表わす。



このように定めると，$f(20)=36$となる。

(9) $f(15)$，$f(24)$をそれぞれ求めよ。

(10) 一般に関数$f:x\rightarrow y$でfによって集合Xのある要素aに対応する集合Yの要素を$f(a)$と表わす。



(11) $f:x\rightarrow |2x-1|$のとき，$f(-2)$，$f(3)$，$f(t)$をそれぞれ求めよ。

(12) 関数$f:x\rightarrow y$において変数yの値は，すべて対応fによって変数xの各値に対応する値である。そして，変数xに対応する値をfを用いて$f(x)$と表わせる。だから，○の関数を$f(x)=2x-4$のようにかくこともある。

(13) ① 関数$f(x)=\frac{3}{4}x-6$で$f(8)$，$f(-4)$をそれぞれ求めよ。

② 関数$g(x)=|-x^2-2x+1|$のとき，$g(-3)$，$g(0)$をそれぞれ求めよ。

○ 2つの集合X＝{ 11, 12, 13,……,19, 20 }，Y＝{ 0, 1, 2, 3, 4 }がある。このとき，集合Xの要素xに集合Yの要素yをxを5でわったときの余りとなるように対応させる。

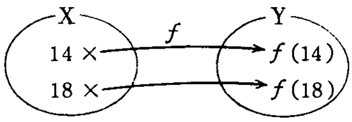
(1) 集合Xから集合Yへの対応は何対応か。

(2) この関数を矢印とことばを用いて表わしなさい。

$$x \xrightarrow{(\qquad\qquad)} y$$

(3) 上の対応，つまり「5でわったときの余り」というしかたによる対応を記号fを用いて表わしなさい。

(4) $f(14)$，$f(18)$をそれぞれ求めなさい。



(5) 集合Xのある要素aに対応する集合Yの要素をfを用いて表わしなさい。また，それはaの式で表わされますか，それとも表わされないか。

○ 下の表は 書籍小包の重さと料金の関係を示したものである

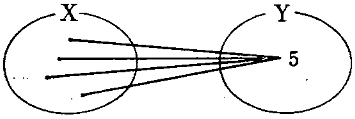
重 さ	料金
0.25 Kgまで	50 円
0.5 Kgまで	70 円
1 Kgまで	90 円
1.5 Kgまで	110 円
2 Kgまで	120 円

(1) 重さは料金の関数である。料金は重さの関数である。
どちらが正しいか，またその理由を述べよ。

(2) 重さをx Kg，料金をy円として，この関数関係をfを用いて表わしなさい。

(3) $f(0.8)$，$f(1.6)$をそれぞれ求めよ。

○　変数xの変域をすべての有理数と考える。xのすべての値に対して，つねにただ1つの数，たとえば5が対応する。



(1)　この対応は関数といえますか。

(2)　この関数を関数の記号fを用いて表わしなさい。

(3)　$f(-4)$，$f(\frac{2}{3})$，$f(a)$をそれぞれ求めなさい。

練習問題

1.　①　関数$f: x \to y$，$y=x^2-1$のとき，$f(1)$，$f(-\frac{1}{2})$，$f(0)$をそれぞれ求めよ。

　②　関数$f(x)=|-2x-4|$のとき，$f(-2)$，$f(0)$，$f(1)$をそれぞれ求めよ。

2.　自然数の集合をNとする。nをNを変域とする変数とし，nの各値にその約数の個数を対応させる関数を$y=f(x)$と表わす。このとき，$f(15)$，$f(16)$，$f(19)$をそれぞれ求めよ。

3.　X，Yをそれぞれ負でない有理数の集合とし，xの各値にその整数部分（つまり小数部分を切りすてる）の数を対応させる関数を$y=f(x)$とする。

　①　$f(1.05)$，$f(3)$，$f(2\frac{5}{6})$をそれぞれ求めよ。

　②　$f(x)=4$となるxの範囲を求めよ。

1次関数

○　次の各問でxとyの関係を表わす式を作りなさい。また，変数xの変域を求めなさい。

①　大気の温度は高さにともなってかわり，地上から10㎞までは1㎞の上昇について6℃の割合で下がるという。地上の気温が20°Cのとき，地上からx㎞の高さの地点の気温をy°Cとする。

②　タンクに3㎥だけ水が入っている。さらに毎分2㎥の割合で6分間水を加える。いま水を加えはじめてからx分後のタンクの水の量をy㎥とする。

③　円の半径x㎝の円周をy㎝とする。

(1)　上の①，②，③をそれぞれ関数の記号f，g，hを用いて表わしなさい。

$f: x \to y$，$y=20-6x$，$g: x \to y$，$y=2x+3$，$h: x \to y$，$y=2\pi x$　となって，それぞれyはxの1次式で表わされている。

このように

関数$f: x \to y$において，yがxの1次式，つまり $y=ax+b$（a，bは定数，$a \neq 0$） で表わされるとき，この関数をxの1次関数という。

(2)　上の①，②，③において，それぞれa，bの値をいいなさい。

1次関数$f: x \to y$，$y=ax+b$をかんたんに1次関数$y=ax+b$とかくことが多い。

(3)　上の③のように$a \neq 0$，$b=0$のときは，1次関数$y=ax+b$は$y=ax$となる。この関係を1年生のときに，どんな関係とならったか。

正比例は，1次関数の特別の場合である。

(4)　1次関数$f: x \to y$，$y=ax+b$（a，bは定数，$a \neq 0$）があって，$x=-2$のとき$y=7$，$x=2$のとき$y=-1$であるという。定数a，bの値を求めなさい。

(5)　上の①，②について，$y=-6x+20$における$-6x$，20はそれぞれ何を表わすか。

$y=2x+3$における$2x$，3はそれぞれ何を表わすか。

(6) $-6x$ と x との関係，$2x$ と x の関係を1年生のときにどんな関係とならったか。

(7) $y=-6x+20$ は x に比例する $-6x$ と定数20との和，$y=2x+3$ も x に比例する $2x$ と定数3との和からなっている。

このように

1次関数 $y=ax+b$ は x に比例する ax と定数 b の和の形で表わされる。 $y=\underbrace{ax}_{x\text{に比例する部分}}+\underbrace{b}_{\text{一定部分}}$

(8) ある都市の電話1台の1カ月の電話料金は，一定額の基本料金と通話回数に比例する料金との和で表わされるという。

ある家で，ある月に35回通話して945円，また他の月に40回通話して980円支払ったという。

① 通話回数 x 回のときの料金を y 円とすると，y は x のどんな式で表わされるか。

② 通話回数が64回のときの料金はいくらか。

③ 電話料金が1,260円のときの通話回数を求めなさい。

(9) 1次関数 $y=2x+3$ において，

① $y-3=2x$ と変形できるから，$y-3$ と x は1年生のときにどんな関係とならったか。

② $y=2\left(x+\frac{3}{2}\right)$ と変形できるから，y と $x+\frac{3}{2}$ は1年生のときにどんな関係とならったか。

③ $y+5=2(x+4)$ と変形できるから，$y+5$ と $x+4$ は1年生のときにどんな関係とならったか。

練習問題

1. ある機械をつかってコピーすると，コピーした枚数に比例した費用と枚数に関係しない一定の費用との合計の費用がかかる。80枚コピーしたときの合計の費用は700円で，120枚コピーしたときの合計の費用は900円であった。

① x 枚コピーしたときの合計の費用を y 円とすると，y は x のどんな式で表わされるか。

② 95枚コピーしたときの合計の費用はいくらか。

③ 合計の費用が1,550円のときのコピーした枚数を求めよ。

2. $y-5$ が $x-2$ に比例し，$x=1$ のとき $y=-5$ である。このときの x と y の関係を表わす式を作りなさい。

3. 1次関数 $y=-2x+10$ について，次の（　）内をうめなさい。

① $y=-2$（　　）　ゆえに y は（　　）に比例する。

② $y-$（　　）$=-2x$　ゆえに（　　）は x に比例する。

③ $y+2=-2$（　　）　ゆえに $y+2$ は（　　）に比例する。

1次関数のグラフ

(1) 1次関数 $y=2x+3$ で，x の変化に対して y はどのように変化するかしらべるために，どんな方法があったか。

(2) x の値として次のような場合にも，それらの点がいまかいた直線の上にあることをたしかめよ。

x	-2.5	1.5	3.4
y	-2	6	9.8

より　$(-2.5,\ -2)$，$(1.5,\ 6)$，$(3.4,\ 9.8)$

(3) 上の直線上にいくつかのかってな点をとり，それらの点の x 座標と y 座標との間にどんな関係があるかしらべてみなさい。

(4) この直線は，$y=2x+3$ の関係をみたす x，y の値を座標とする点全体の集合である。

つまり　$\boxed{\text{1次関数 } y=2x+3 \text{ のグラフは，集合 } \{(x,\ y) \mid y=2x+3\} \text{ である。}}$

(5) 次の1次関数のグラフをかきなさい。

① $y=5x-4$　　② $y=-\frac{1}{2}x+4$

(6) 次の各点のうちで，1次関数$y=\frac{2}{3}x+4$のグラフの上にあるものはどれか。

A（6, 8），B（-3, 1），C（$-\frac{3}{2}$, 2），D（$\frac{3}{4}$, $4\frac{1}{2}$）

(7) 次の各点が1次関数$y=-3x+4$の上にあるようにm，nの値を求めなさい。

P（-2, n）　Q（m, 3）

○ 変数x，yの間の関係が$y=2x$で表わされるとき，この関係を，1年のときはどういい表わしたか。また，そのグラフはどのようになったか。

$y=2x$ ―①のグラフと$y=2x+3$ ―②のグラフとの関係　$y=2x$ ―③のグラフと$y=2x-4$ ―④のグラフとの関係をしらべてみよう。

(1) xの同じ値に対する$2x$の値と$2x+3$の値を求めて表を作りなさい。また，そのグラフをかきなさい。

① 表から同じxの値に対応する①，②のyの値をくらべて，つねにどんなことがいえますか。

② グラフで同じx座標をもつ点P，P′を①，②のグラフ上にとり，PとP′をくらべてみると，つねにどんなことがいえますか。

③ 以上のことから，

$y=2x+3$のグラフと$y=2x$のグラフは，どんな関係にあるといえるか。

(2) (1)と同様にして，$y=2x-4$のグラフと$y=2x$のグラフとの関係をしらべてみなさい。

(3) $y=-2x+5$のグラフは，$y=-2x$のグラフをどのように移動したものか。

$y=\frac{2}{3}x-2$のグラフは，$y=\frac{2}{3}x$のグラフをどのように移動したものか。

一般に

1次関数$y=ax+b$のグラフは，$y=ax$のグラフをy軸の正の方向にbだけ平行移動した直線である。

$b>0$のときは，y軸の正の方向にb

$b<0$のときは，y軸の負の方向に$|b|$だけ平行移動することである。

1次関数$y=ax+b$のグラフは，点（0, b）を通り直線$y=ax$に平行な直線である。

○ 下の1次関数㋐～㋕のグラフを同じ座標平面上にかき，次の(1)～(2)のことがらをしらべてみよ。

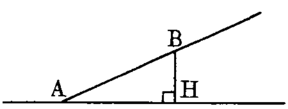
㋐ $y=\frac{1}{2}x+2$　㋑ $y=3x+2$　㋒ $y=6x+2$　㋓ $y=-2x+2$

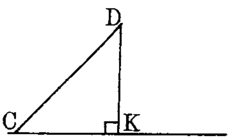
㋔ $y=-\frac{3}{4}x+2$　㋕ $y=-4x+2$

(1) $a>0$のときと$a<0$のときのグラフのちがい。

(2) $|a|$が大きくなるにつれてグラフはどのようにかわるか。

(3) 下の図のような2つの坂道AB，CDがある。みた目でCDの方が傾きが急であることがわかるが，傾きの度合を数値の大小で表わすにはどうすればよいか。





(4) (2)でしらべたように，㋐，㋑，㋒では㋒のグラフが傾きがもっとも急で，㋐のグラフの傾きがもっともゆるやかであることがわかった。(3)の考えを用いて数の大小で傾きの度合を表わすことを考えてみよう。

① 水平方向にどの方向をとればよいか。㋐，㋑，㋒について比べるのだから，どの点を基準にして考え

ると都合がよいか。

② 水平距離１に対して㋐，㋑，㋒それぞれについて，高さをグラフから求めなさい。

③ ㋐，㋑，㋒について，それぞれ $\dfrac{\text{高さ}}{\text{水平距離}}$ を求めよ。この結果から，どんなことがわかるか。

(5) ㋓，㋔，㋕についても，同じようにしらべてみよう。

① (4)の①と同じように，（0，２）から右へ１とることにしよう。

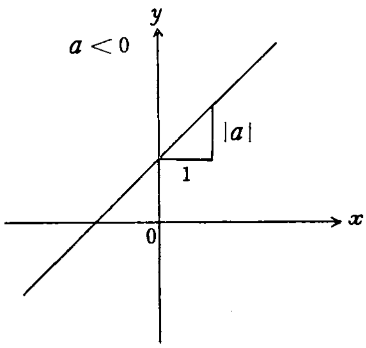
② 水平距離１に対して㋓，㋔，㋕それぞれについて，高さをグラフから求めよ。

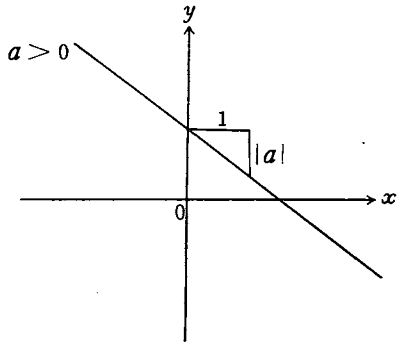
③ 高さに方向をつけてみると，(4)の②では高さはy軸の正の方向だが，いまの場合は高さはy軸の負の方向である。だからいまの場合，高さをどんな数で表わすのが適当か。

④ ㋓，㋔，㋕について，それぞれ $\dfrac{\text{高さ}}{\text{水平距離}}$ を求めよ。この結果から，どんなことがわかるか。

(6)

> １次関数$y=ax+b$のグラフで，
>
> bの役割：① $x=0$のとき$y=b$であるから，グラフがy軸と交わる点のy座標を表わしている。だから，bを直線$y=ax+b$の切片（y軸上の切片）という。
>
> ② $y=ax$のグラフをどの方向にどれだけ平行移動すればよいかを表わしている。
>
> aの役割：① $a>0$のときは右上がりの直線，$a<0$のときは右下がりの直線。
>
> ② aによって直線の方向がきまる。aを直線$y=ax+b$の傾き（こうばい）という。





(7) 次の１次関数のグラフの傾きと切片をいえ。

① $y=-\frac{5}{2}x+7$　　② $y=-x-3$　　③ $2y=x-4$　　④ $4y=-3x$

(8) 次の１次関数のグラフで，切片が等しいものはどれか

① $y=2x-3$　　② $y=\frac{3}{4}x+3$　　③ $y=-2x-3$　　④ $3y=-x+9$

⑤ $-y=-x+3$

練習問題

1. １次関数$y=\frac{1}{4}x$のグラフを次のように平行移動すると，どんな１次関数のグラフになるか，その式を求めよ。

① y軸の正の方向に６　　② y軸の負の方向に３

2. １次関数$y=-\frac{1}{2}x+2$のグラフを次のように平行移動すると，どんな１次関数のグラフになるか，その式を求めよ。

① y軸の正の方向に４　　② y軸の負の方向に５

1次関数の変化の割合

○　1次関数$y=2x+3$でxの値が増加するにつれてyの値はどう変わるか。

1次関数$y=-2x+4$でxの値が増加するにつれてyの値はどう変わるか。

このことについてもっとくわしく調べてみよう。

(1)　1次関数$y=2x+3$でxの値が1ずつますと，yの値はどのように変化しているか，表をつくってしらべてみよ。

(2)　xの値がある勝手な値から1ますとyの値はやはり2ますだろうか，たしかめてみよう。

x	2.2	3.2	$-3\frac{1}{2}$	$-2\frac{1}{2}$	100	101
y	(　)	(　)	(　)	(　)	(　)	(　)

(3)　いましらべたことを，一般的に説明することを考えてみよう。

①　xのある勝手な値をaとすると，そのときのyの値，つまり$f(a)$はどう表わされますか。

②　xの値aから1ましたときのxの値を求めよ。また，このときのyの値，つまり$f(a+1)$はどう表わされますか。

③

x	a	$a+1$
y	$2a+3$	$2(a+1)+3$

$\longrightarrow x$の増加した量を求めよ。

$\longrightarrow y$の増加した量を求めよ。

ここで，$a=2.2$，$-3\frac{1}{2}$，100にしたときが，(2)でしらべた場合である。

aをある整数値にしたときが，(1)でしらべた場合である。

以上のことから，xの値が1ますと，yの値は2ますことがわかった。

(4)　次にxの増加する幅をいろいろかえると，どのようになるかしらべてみよう。

①　xの値が2ずつましたとき，yの値はどう変化するか。

xの値が3ずつましたとき，yの値はどう変化するか。

xの値が4ずつましたとき，yの値はどう変化するか。

xの増加量とyの増加量の間にどんな関係があると考えられるか。

②　①でしらべたことをさらに一般的にしらべてみよう。

xの値が2.5から4ましたとすると，yの値はいくつからいくつまで変化したことになるか。

このときのxの増加量とyの増加量をそれぞれ求めよ。

x	2.5	6.5
y	8	16

$\longrightarrow x$の増加量　$6.5-2.5=4$　よって

$\longrightarrow y$の増加量　$16-8=8$　　$\dfrac{y\text{の増加量}}{x\text{の増加量}}=2$

③　②で考えたと同じように

xのある勝手な値をaとすると，$x=a$のときのyの値，つまり$f(a)$を求めよ。

xの値aからhましたときのxの値を求めよ。また，このときのyの値，つまり$f(a+\mathrm{h})$を求めよ。

xの増加量とyの増加量をそれぞれ求めよ。

x	a	$a+\mathrm{h}$
y	$2a+3$	$2(a+\mathrm{h})+3$

$\longrightarrow x$の増加量$a+\mathrm{h}-a=\mathrm{h}$

$\longrightarrow y$の増加量$2(a+\mathrm{h})+3-(2a+3)=2\mathrm{h}$

> 1次関数$y=2x+3$において$\dfrac{y\text{の増加量}}{x\text{の増加量}}=2$（$x$の係数，傾き）である。
> とくに，xの増加量が1のとき，yの増加量は2である。

(5)　1次関数$y=-2x+4$の場合についても同様にしらべてみよう。

①　xの値が1ずつますと，yの値はどのように変化しているか。

②　$x=a$から$x=a+1$と変化したとき，yの値はどのように変化しているか。

③　xの増加する幅をいろいろかえたときはどうなるだろうか。

④　$x=a$から$x=a+h$と変化したとき，yの値はどのように変化しているか。

1次関数$y=-2x+4$において$\dfrac{y\text{の増加量}}{x\text{の増加量}}=-2$（$x$の係数，傾き）である。 とくに，$x$の増加量が1のとき，$y$の増加量は$-2$である。

以上のことから

1次関数$y=ax+b$において， xの増加量に対するyの増加量の割合は一定でaに等しい。 つまり　$\dfrac{y\text{の増加量}}{x\text{の増加量}}=a$である。これを変化の割合（平均変化率）という。 とくに，xが1ましたときのyの増加量がaである。

(6)　1次関数$y=\frac{2}{3}x-4$と$y=-\frac{1}{2}x+1$について，次の各問に答えよ。

①　xの値が1ずつますと，yの値はどうかわるか。

②　xの値が4ますと，yの値はどうかわるか。また，xの値が6減少すると，yの値はどうかわるか。

③　xの値がいくつますと，yの値は4ますか。

(7)　つぎの条件をみたす1次関数を求めよ。

①　$x=-8$のとき$y=4$で，xの値が4ますとyの値が5ます。

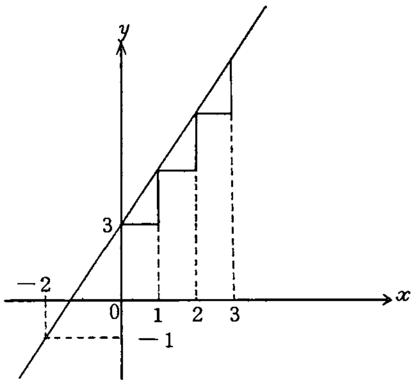
②　$f(7)=3$で，xが2増加するとyの値が3減少する。

○　1次関数$y=ax+b$のグラフ上で変化の割合は，どんなことをあらわすかしらべてみよう。

(1)　1次関数$y=2x+3$で，xの値が1ますごとにyの値はいくつましたか。

また，$\dfrac{y\text{の増加量}}{x\text{の増加量}}$の値はどれだけになるか。

1次関数$y=2x+3$のグラフの傾きをいえ。



(2)　1次関数$y=2x+3$のグラフと表を作りなさい。

(3)　傾きが2ということは，どの点からどの方向にいくつ進み，さらにどの方向にいくつ進むことであったか。

(4)　(0, 3)の点から右へ1進むということは，xの値が0から1増加したことを表わし，上へ2進むということは，yの値が3から2増加したことを示している。同じようにして，$(-2, -1)$，(3, 9)等の点を基準にしてしらべてみよ。

(5)　xの値が0から3ましたとき，yの値はいくつからいくつますか。このことは，グラフではどの点からどの方向にいくつ進み，さらにどの方向にいくつ進むことであるか。同じようにして，xの値が-3から4ましたとき，xの値が2.5から5ましたときについてしらべてみよ。

(6)　1次関数$y=-\frac{1}{2}x-3$で，xの値が1ますごとにyの値はいくつますか。

また，$\dfrac{y\text{の増加量}}{x\text{の増加量}}$の値はどれだけになるか。また，この関数のグラフの傾きをいえ。

(7)　傾きが$-\frac{1}{2}$ということは，どの点からどの方向にいくつ進み，さらにどの方向にいくつ進むことであるか。

(8) 右へ1進むということは，xの値が0から1ましたことを表わし，下へ$\frac{1}{2}$進むということは，yの値はいくつからいくつ減少したことを示している。

(9) xの値が0から4ましたとき，yの値はいくつからいくつますか。これはいくつ減少したことか。このことは，グラフではどの点からどの方向にいくつ進み，さらにどの方向にいくつ進むことであるか。同じようにして，xの値が-2から6ましたとき，$x=-4$から3ましたときについてしらべてみよ。

(10) 前に習った$\dfrac{\text{高さ}}{\text{水平距離}}$という見方は，実は$\dfrac{y\text{の増加量}}{x\text{の増加量}}=a$ということである。だから，変化の割合によって，このグラフの傾きぐあいがきまる。この意味でaのことを，そのグラフの傾きといったわけである。

○ これまで1次関数のグラフや1次関数の値の変化について考えてきたが，そこで調べたことをもとにしてグラフのかき方についてしらべてみよう。

(1) 1次関数$y=\frac{2}{3}x+3$のグラフはどんなグラフか。

(2) 直線だからいくつ点をとればよいか。どのような2点をとればよいか。

(3) 1次関数$y=\frac{2}{3}x+3$のグラフの傾きと切片をいえ。

(4) 傾きと切片を用いてグラフをかくにはどうすればよいか。

(5) 1次関数$y=-\frac{3}{4}x-2$のグラフについて，上でしらべたと同じようにしらべてみよう。

○ 上で調べたのはxの変域がすべての有理数であったが，xの変域に制限のある場合についてしらべてみよう。

(1) 時速4Kmの速さで20Kmはなれた町へ行くものとする。出発してからx時間後に残った距離をyKmとする。

① xとyの関数関係を式で表わせ。

② 変数xの変域をいえ。

③ xとyの関係を示すグラフをかきなさい。

(2) 1次関数$y=\frac{1}{4}x+2$（$-2<x<4$）について，

① 上の関数のグラフをかきなさい。

② (1)の場合の変域とくらべて異なっている点はなにか。

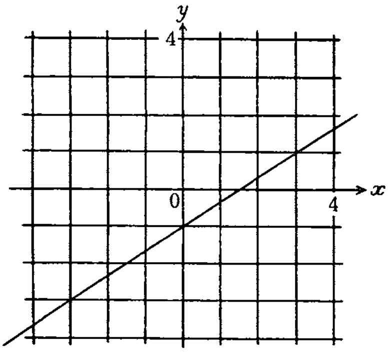
③ 上の違いをグラフではどのように表わしたらよいか。

1次関数を求めること

いろいろな条件があたえられたとき，その条件をみたす1次関数を求めることを考えよう。

○ 与えられたグラフから式を求めること

(1) x，yの関係をグラフに表わしたら下のようなった。



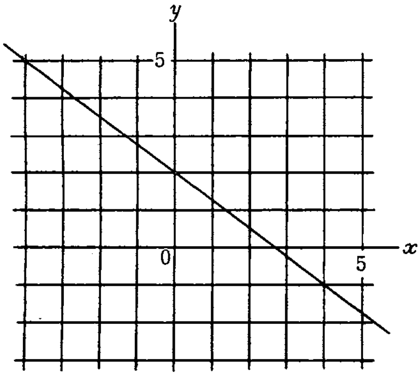
① xの値が-3，4のときのyの値を求めよ。

② yの値が1，-2のときのxの値を求めよ。

③ このグラフの表わす1次関数$y=f(x)$を求めよ。

④ この式を用いて$x=4$のときのyの値，$y=-2$のときのxの値を求めよ。

(2) x，y の関係をグラフに表わしたら下のような直線になった。



① x の値が4, -2 のときの y の値を求めよ。

② y の値が5, $-\frac{1}{2}$ のときの x の値を求めよ。

③ このグラフの表わす１次関数 $y=f(x)$ を求めよ。

④ この式を用いて $x=-2$ のときの y の値，$y=-\frac{1}{2}$ のときの x の値を求めよ

○ 組の x，y の値と変化の割合があたえられたとき，

(1) $x=4$ のとき $y=-2$ となり，x の値が２ますと y の値が３ます。このときの１次関数を求めよ。

① x の値が２ますと y の値が３ますことから，a の値はいくつになるか。

② ①より a の値がわかったから，次にどの値がわかれば１次関数がきまるか。

③ $x=4$ のとき $y=-2$ であるから，b についてどんな方程式がえられるか。

④ 以上のことから求める１次関数は，どんな形で表わされるか。

(2) ある１次関数のグラフは，傾きが -2 で点（1, 3）を通る直線である。この１次関数を求めよ。

① １次関数 $y=\frac{2}{3}x+4$ のグラフは，次のどの点を通るか。

$(-6,\ 0)$ 　　$(9,\ 9)$ 　　$(-12,\ -5)$

② １次関数 $y=\frac{2}{3}x+4$ のグラフが点（9, n），（m, −5）を通るようにm，nの値を求めよ。

③ １次関数 $y=\frac{2}{3}x+4$ のグラフが点（m, n）を通るとき，m，nの間にどんな関係が成りたつか。

④ 傾きが -2 であるから求める１次関数はどんな形で表わされるか。

⑤ １次関数 $y=-2x+b$ が点（1, 3）を通るから，b についてどんな方程式がえられるか。

⑥ この方程式をといて b の値を求めよ。

○ ２組の x，y の値が与えられたとき，

(1) １次関数 $y=ax+b$ があって，$x=2$ のとき $y=-1$, $x=-2$ のとき $y=-9$ である。この１次関数を求めよ。

(2) １次関数 $y=ax+b$ のグラフが２点（−1, 2），（2, −7）を通るという。この１次関数を求めよ。

① $y=ax+b$ のグラフが点（−1, 2）を通るから，a，b についてどんな方程式がえられるか。

② $y=ax+b$ のグラフが点（2, −7）を通るから，a，b についてどんな方程式がえられるか。

③ ①, ②でえられた連立方程式をといて a，b の値を求めよ。

④ ２点（−1, 2），（2, −7）を通る直線の傾きをまず求めよ。

⑤ 傾きが -3 となるから，あとは前で習った考え方で b の値を求めよ。

練習問題

1. 次の条件にあてはまる１次関数を求めよ。

① $f(-2)=4$，$f(3)=6$ 　　② $f(5)=3$，変化の割合が -0.4

2. １次関数のグラフが次の条件にあてはまるとき，その１次関数を求めよ。

① 直線 $y=-\frac{1}{2}x+3$ に平行で点（3, −1）を通るもの

② ２点（−1, 4），（2, −5）を通るもの

3. 点A（−8, 9）と点B（30, m）と点C（12, 4）が一直線上にあるようにmの値を求めよ。

1次関数の利用

○　A地からB地まで20Kmある。いまある人がA地を時速6Kmの速さでB地に向かって出発した。出発してから2時間たってから速さを毎時4Kmにかえて B地に到着しました。A地を出発してからx時間後にこの人の歩いた距離をy Kmとする。次のことがらについてしらべてみよう。

(1)　出発してから1時間30分後にこの人の歩いた距離は何Kmか。
　出発してから2時間45分後，3時間30分後にこの人の歩いた距離はそれぞれ何Kmか。

(2)　出発してから何時間後を境にして歩いた距離の求め方が異なるか。境になるのは出発してから何時間後か。

(3)　$0 \leqq x \leqq 2$のときのyとxの関係式を求めよ。

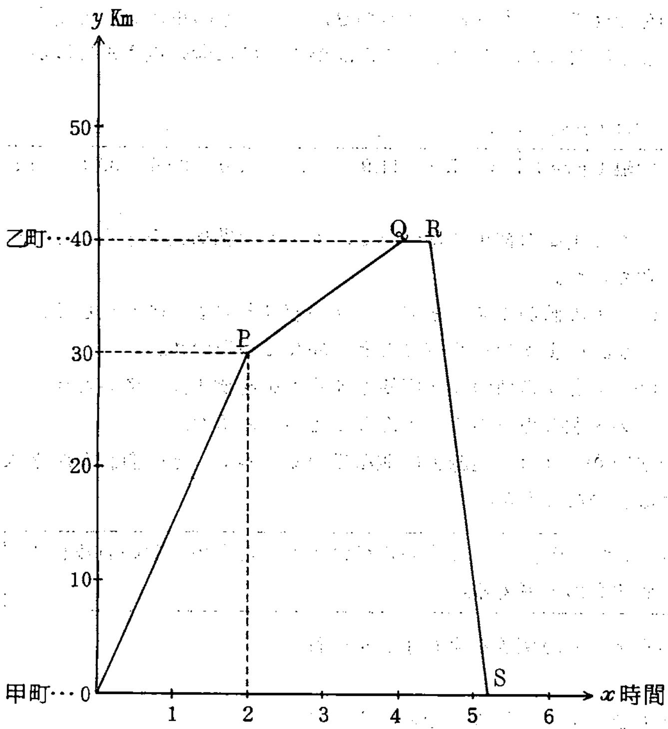
(4)　速さをかえてからの関係式を求めよ。また，そのときの変域を求めよ。

(5)　(3)，(4)の1次関数のグラフをかきなさい。

(6)　出発してから2時間30分後にこの人の歩いた距離をグラフを求めよ。また，関係式から求めよ。

(7)　この人の歩いた距離が10 Km，16 Kmになるのは出発してから何時間後か，グラフから求めよ。また，関係式から求めよ。

○　A君は，はじめ自転車で，途中から歩いて甲町より乙町まで行き，乙町で用事をすませ，時速60Kmの自動車で甲町にもどった。下のグラフはそのようすを表わしたものである。甲町を出発してx時間後に甲町からy Kmの地点にいるとして，(1)〜(9)までについてしらべてみよう。



(1)　自転車と徒歩の速さをそれぞれ求めよ。

(2)　乙町で用事に何分つかったか。

(3)　線分OP，PQ，RSの表わすxとyの関係式を求めよ。

(4)　甲町から16 Km，35 Kmの地点にいるのは出発してから何時間後か。

(5)　2時間45分，4時間50分たったとき，この人は甲町から何Kmの地点にいるか。

(6)　甲町にもどってきたのは，出発してから何時間何分後か。

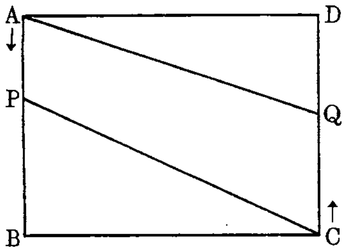
(7)　A君より1時間30分おくれて時速40 KmのバスでE甲町を出発し，乙町へ行ったB君の進行のようすを左の座標平面にかき入れ，かつ関数$f：x \longrightarrow y$の式を求めなさい。

(8)　A君とB君の距離の差が20Kmになるのは，A君が出発してから何時間後か。

(9)　A君とB君の出会った地点は，甲町から何Kmのところか。また，A君が出発してから何時間後か，グラフから求めよ。

○　AB＝18 cm，BC＝24 cmの長方形ABCDがある。この長方形の周にそって点PはAよりBを通ってCの方へ毎秒2 cmの速さで動き，点QはCよりDを通ってAまで毎秒3 cmの速さで同時に動き出します。動きはじめてからx秒後の四辺形APCQの面積をy cm^2とする。次のことをしらべてみよう。

(1)　同時に動き出してから4秒後，7秒後，12秒後の点P，Qの位置を示し，そのときの四辺形APCQの



面積を求めよ。

(2) 出発してから時間が経過するにつれて四辺形ＡＰＣＱの形はどのように変るか，場合わけをしてみなさい。

(3) 変数xの変域をどのようにわけて考えればよいか。

(4) 変数xのそれぞれの変域に対して関数f：$x \to y$の式を求め，かつそのグラフをかきなさい。

(5) 四辺形ＡＰＣＱの面積が長方形ＡＢＣＤの面積の$\frac{1}{2}$になるのは何秒後か。

○ 底面積が12㎠で，高さは時刻にともなってかわる４角すいがある。ある時刻からx秒後の体積がy㎤でyとxの関係式が$y = 2x + 20$という式で表わされている。

(1) 時刻をはかりはじめたときの体積は何㎤か。また，そのときの高さは何cmか。

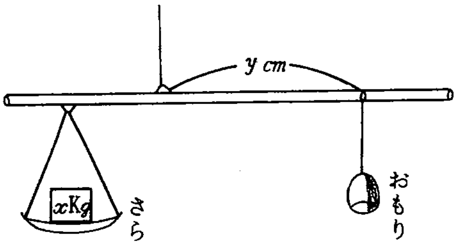
(2) xの値が１増加するごとにyの値はいくつずつ増加するか。

(3) (2)より高さは毎秒何cmの割合でのびているといえるか。

(4) x秒後の体積は（$2x + 20$）㎤であるから，高さをｈcmとするとｈはxのどんな式で表わされるか。

(5) (4)の結果を用いて，高さは毎秒何cmの割合でのびているといえるか。

○ さおばかりのさらに，いろいろな重さの物をのせて，おもりとつりあわせたとき，その重さxKgと支点からおもりまでの距離$y$cmとの関係が下の表のようになった。ただし，このはかりでは12Kgの重さまではかることができるものとする。



重さ（xKg）	0	1	2	3	4	5	6	7
距離（$y$cm）	3	7.5	11.9	16.5	21.0	25.6	30.1	34.5

この実測の結果に基づいて，yとxの関係式を求めることを考えよう。

(1) xの値が１ずつますと，yの値はどのように変化しているか。いままでしらべたことと異なる点をいえ。

(2) xとyの値の組を座標とする点を座標平面上に表わせ。この８個の点をみて，どんなことがいえるか。

(3) ８個の点はきちんと一直線上に並んでいないが，ほぼ一直線上に並んでいるとみて，その直線をかき入れてみよ。どんな点に注意して直線をひけばよいだろうか。

これらの点のなるべく近くを通る直線，これらの点からのくいちがいがもっとも少くない直線をひいて，この直線がx，yの関数関係を表わすものと考える。

(4) この直線の傾きと切片を求めよ。これからxとyの関係を表わす式を作れ。

(5) 変数xの変域をいえ。

(6) (4)の式から，$x = 2$，$x = 5$のときのyの値を求めて，表の値とくらべてみよ。
また，$x = 3.5$，$x = 10$のときのyの値を求めよ。

(7) $y = 18$のときのおもりの重さは，どれほどといえばよいか。

練習問題

1. ある水そうに水を入れるのに，はじめの30分間はＡ，Ｂ２管をつかって毎分２ℓずつ水を入れた。30分たった後はＢ管を閉じてＡ管だけで毎分1.5ℓずつ水を入れ，水を入れはじめてから50分間で満水した。

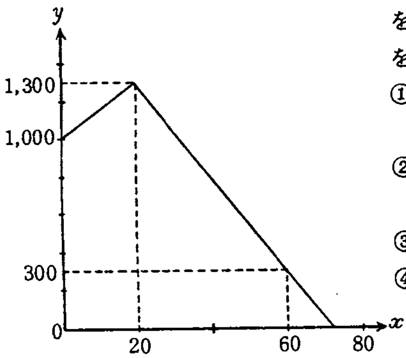
x 分間に入った水の量を y ℓとして次の各問に答えよ。

① x と y の関係式を求めよ。

② ①で求めた関係式のグラフをかけ。

③ 40 分間で入った水の量を求めよ。また，水の量が 80 ℓになるのは，水を入れはじめてから何分後か。

2. 毎分一定量の水を入れるA管と水を出すB管をとりつけた水そうがある。左のグラフは，はじめにA管を開き，20分たったときB管を開いたときの水そうの中の水の量の変化を示したものである。



① A管から流れこむ水の量は毎分何ℓか。また，B管から出る水の量は毎分何ℓか。

② A管から水を入れはじめてから水そうの中にある水がなくなるまでの x と y の関係式を作れ。

③ 水そうに 1,100 ℓの水があるのは何分後か。

④ もしはじめの20分間だけB管のみ開き，それからさらにA管を開いたときの水そうの水の量の変化を示すグラフを左図に記入せよ。またはじめから何分たったとき，水そうの水はなくなるか。

3. 高さ 8 cm，底辺の長さは時間にともなってかわる三角形がある。ある時刻から，x 秒後の面積 y cm²が $y = 2x + 24$ と表わされる。次の各問に答えよ。

① 時刻をはかりはじめたときの面積とそのときの底辺の長さを求めよ。

② 底辺の長さは毎秒何cmずつのびているか。

二元一次方程式 $ax + by = c$ のグラフ

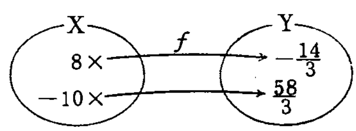
○ 二元一次方程式 $4x + 3y = 18$ のグラフは，どうなるかしらべてみよう。

(1) x，y についての二元一次方程式 $4x + 3y = 18$ を成立させる x，y の値の組，つまり解を求めよ。

(2) これらの値の組を座標にもつ点をとり，どんなことがわかるか。また，その理由を考えよ。

(3) $x = 8$ のときの y の値，$x = -10$ のときの y の値を求めよ。

このようにして，x の値を1つきめると，それに対応して y の値が1つきまる。だから，方程式 $4x + 3y = 18$ は 関数 $f : x \to y$ の対応を示す式とみることができる。



(4) x の値を1つきめたとき，y の値を求めるに都合のよい式に変形しなさい。

これを x，y の関数関係を表わすものとみれば，y は x の1次関数である。だから，$4x + 3y = 18$ のグラフと $y = -\frac{4}{3}x + 6$ のグラフは同じもの。つまり，傾きが $-\frac{4}{3}$ で切片が6の直線である。

> $4x + 3y = 18$ の解を座標とする点の集合は，直線ℓ上の点全体の集合である。
> この直線を方程式 $4x + 3y = 18$ のグラフという。
> また，$4x + 3y = 18$ を直線ℓの方程式（または直線ℓの式）ともいう。

○ 次に $ax + by = c$ で，a，b の一方が0である場合について考えてみよう。

(1) $a = 0$，$b \fallingdotseq 0$ の場合について，

① $a = 0$，$b = 2$，$c = 4$ とすると，$ax + by = c$ はどんな形で表わされるか。

② ①でえられた式を $0x + 2y = 4$ とみれば，これを成立させる x，y の値の組を表に示しなさい。これからどんなことがいえるか。

x	……−3	−2	−1	0	1	2	3	4……
y	…… 2	2	2	2	2	2	2	2……

③ これらのx，yの値の組を座標とする点を座標平面上にとると，どんなグラフになるか。

$y=2$の解を座標とする点の集合は，点（0，3）を通りx軸に平行な直線上の点全体の集合となる。

(2) $a\fallingdotseq 0$，$b=0$の場合について，

① $a=3$，$b=0$，$c=9$とすると，$ax+by=c$はどんな形で表わされるか。

② ①でえられた式を$3x+0y=9$とみれば，これを成立させるx，yの値の組を表に示しなさい。これからどんなことがいえるか。

x	…… 3	3	3	3	3	3	3 ……
y	……-3	-2	-1	0	1	2	3 ……

③ これらのx，yの値の組を座標とする点を座標平面上にとると，どんなグラフになるか。

$x=3$の解を座標とする点の集合は，（3，0）を通りy軸に平行な直線上の点全体の集合となる。

> 二元一次方程式$ax+by=c$（a，b，cは定数）のグラフは直線である。
> $a\fallingdotseq 0$，$b\fallingdotseq 0$ のときは $y=-\frac{a}{b}x+\frac{c}{b}$となるから傾きが$-\frac{a}{b}$で切片が$\frac{c}{b}$の直線
> $a=0$，$b\fallingdotseq 0$ のときは $y=\frac{c}{b}$ だから点（0，$\frac{c}{b}$）を通りx軸に平行な直線
> $a\fallingdotseq 0$，$b=0$ のときは $x=\frac{c}{a}$ だから点（$\frac{c}{a}$，0）を通りy軸に平行な直線である。

(3) a，b について上のように場合わけすると，あとどんな場合が考えられるか。その場合について考えてみよう。

① $a=b=0$，$c\fallingdotseq 0$のときはどうなるか。 ② $a=b=c=0$のときはどうなるか。

○ 2点（3，-4），（3，1）を通る直線の方程式を求めることを考えよう。

(1) 2点（3，-4），（-5，1）を通る直線の方程式を求めよ。

(2) (1)の要領で求めると，どんなことになったか。

(3) 座標平面上に2点（3，-4），（3，1）をとってグラフをかき，直線の方程式を求めよ。

(4) （3，-4），（3，1）の場合と（3，-4），（5，1）の場合を比べてどんなことに気がつくか。

○ 2点（4，-3），（-2，-3）を通る直線の方程式を求めてみよう。

(1) この問題を(1)の場合と同じようにして求めてみるとどうなるか。

(2) 座標平面上に2点（4，-3），（-2，-3）をとりグラフをかいて求めよ。

(3) （3，-4），（-5，1）の場合と（3，-4），（3，1）の場合と（4，-3），（-2，-3）の場合をくらべて，どんなことに気がつくか。

x軸にもy軸にも平行でない直線：$y=ax+b$（$a\fallingdotseq 0$，a，bは定数）

x軸に平行な直線：$y=$ h（hは定数）

y軸に平行な直線：$x=$ k（kは定数）

(4) 次の2点を通る直線の方程式を求めよ。

① （-3，4），（4，-1） ② （2，-4），（2，3） ③ （-4，-4），（3，-4）

練習問題

1. x，yについての二元一次方程式$ax+y=3$（aは定数）のグラフが点（2，4）を通るという。

① aの値を求めよ。

② この直線の傾きと切片を求む。

③ この直線は点（m，5）を通るという。mの値を求めよ。

2. 直線$y=3x-4$のy軸との交点を通り，x軸に平行な直線を求む。

直線$2x-5y=8$のx軸との交点を通り，y軸に平行な直線の方程式を求む。

連立二元一次方程式とグラフ

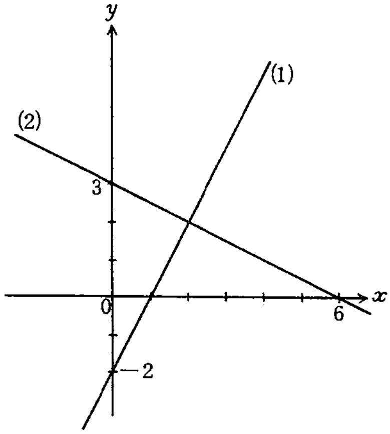
○ 次の連立方程式をグラフを用いて解くことをしらべてみよう。

$$\begin{cases} y=2x-2 & \text{———①} \\ x+2y=6 & \text{———②} \end{cases}$$

(1) ①の方程式の解の集合をAとし，Aを要素の性質をのべる方法であらわしなさい。
②の方程式の解の集合をBとし，Bを要素の性質をのべる方法であらわしなさい。

(2) (1)より上の連立方程式の解の集合をA，Bを用いて表わしなさい。

(3) 同じ座標軸を用いて方程式①，②のグラフをかき，その交点の座標をよみとれ。



(4) 方程式①の解の集合は，直線(1)上の点全体の集合で表わされる。
方程式②の解の集合は，直線(2)上の点全体の集合で表わされる。だから $A \cap B$ はグラフ上のどこであるか。

(5) (3)で求めた $(x, y)=(2, 2)$ がもとの連立方程式の解になっていることを，計算によってたしかめなさい。

(6) 連立方程式 $\begin{cases} 2x-y=3 \\ x-3y=-6 \end{cases}$ をグラフを用いて解きなさい。

○ 次の連立方程式をグラフを用いて解け。

① $\begin{cases} 3x-2y=4 \\ 3x-2y=-2 \end{cases}$　　② $\begin{cases} 3x-2y=4 \\ 6x-4y=8 \end{cases}$

(1) ①の2つの二元一次方程式のグラフをかき，その位置関係はどうなっているか。

(2) なぜ平行になったか，その理由をのべよ。

(3) $A=\{(x, y) \mid 3x-2y=4\}$，$B=\{(x, y) \mid 3x-2y=-2\}$ とすると，$A \cap B$ はどうみたらよいか。

(4) ①の連立方程式の解はどう答えればよいか。

(5) ②の2つの二元一次方程式のグラフの位置関係はどうなっているか。

(6) $A=\{(x, y) \mid 3x-2y=4\}$，$B=\{(x, y) \mid 6x-4y=8\}$ とすると，$A \cap B$ はどうなるか。

(7) ②の連立方程式の解はどう答えたらよいか。

連立方程式の解 ⟺ 2直線の交点の座標 2直線が平行ならば解なし 2直線が重なるならば解は無数

○ 次の3つの直線が1点で交わるように a，b の値を求めよ。ただし，③の直線の傾きは $-\frac{2}{3}$ である。

$3x-y=9$——①　　$ax+by=-5$——②　　$x+4y=-10$——③

(1) 3つの直線の交点の座標を求めるために，どれらの二元一次方程式を連立させるとよいか。

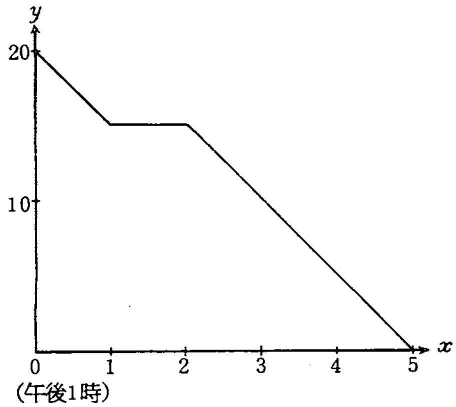
(2) (1)でえられた連立方程式を解きなさい

(3) (2)から交点の座標が求められたから，これを用いて a，b に関する方程式を作れ。

(4) 傾きが $-\frac{2}{3}$ であるということから，a，b に関する方程式を作れ。

(5) (3)，(4)からえられた連立方程式を解いて a，b の値を求めよ。

○　A地からB地まで20Kmある。甲はA地を午後1時に毎時6Kmの速さで出発し，2時間歩いたところで速さを毎時4Kmにかえて B地まで行きました。乙はA地を午後3時に毎時10Kmの速さで出発し，途中速さをかえることなくB地まで行きました。左のグラフは，丙がB地を午後1時に毎時5Kmの速さで出発し，A地に到着するまでの進行のようすをグラフで示したものである。



(1)　甲がA地を出発してからx時間後のA地からの距離をyKmとして，関数f：$x \longrightarrow y$の式を求め，かつそのグラフを左にかき入れよ。

(2)　甲と丙が出会った時刻とA町からの距離を求めよ。

(3)　丙が甲と乙の丁度中央にくる時刻を求めよ。

練習問題

1.　次の3つの直線でかこまれた図形の面積を求む。

$$5x-4y+3=0 \qquad x-3y=6 \qquad 3x+2y=7$$

2.　甲の水槽には1mの深さまで，乙の水槽には20cmの深さまで水が入っている。甲の水をポンプで乙へうつすとき，甲の方は毎分2cmの速さで水面が下り，乙の方は毎分3cmの速さで水面が高くなっていく。この仕事をはじめてからx分後の水面の高さを$y$cmとして，次の各問に答えよ。

①　甲と乙のxとyの関係式を作り，かつそのグラフをかけ。

②　乙の方の水面がもっとも高くなったとき，その高さは何cmか。

③　甲，乙両方の水面の高さが等しくなるのは何分後で，そのときの高さは何cmか。

3.　ある会社では，社員が毎月の給料に応じて，つぎの方法による金額を積みたてている。給料x万円とし，給料から積立金をさし引いた額をy万円として，次の各問に答えよ。ただし，下の表は給料15万円までの分である。

月　給	積　立　金
5万円未満	な　し
5万円以上10万円未満	月給5万円をこえる額の1割
10万円以上15万円まで	月給5万円をこえ10万円までの1割と10万円をこえる額の2割

①　xとyの関数関係を表わす式を作れ。また，そのグラフをかけ。

②　来年度から規則を改正して一律に月給の1割を積みたてることにきめました。このときのxとyの関係式とそのグラフをかきなさい。

③　新しい規則によって積みたてるとき，給料から積みたて額を引いた額が従来の場合より3,000円安くなるのは，給料がいくらの人ですか。

4.　直線$3x+2y-13=0$と直線$5x-3y-9=0$との交点を通って直線$y=\frac{1}{2}x-2$に平行な直線の方程式を求めよ。

いろいろな条件にあてはまる直線の方程式を求める

○　2つの直線$y=ax+b$と$y=cx+d$の平行条件をいえ。2つの直線$y=ax+b$と$y=cx+d$の垂直条件についてしらべてみよう。かんたんにするために，2つの直線を$y=ax$，$y=cx$として考えてみよう。

(1)　直線$y=3x$を座標平面上にかきなさい。

(2)　1年生のときに回転移動を習ったが，回転移動をするとき，何をきめておかねばならなかったか。

(3)　回転の中心をどこにとればよいか。また，回転角を何度にすればよいか。

(4)　直線 $y = 3x$ を原点を中心として左まわりに $90°$ 回転したとき，直線 $y = 3x$ 上の次の各点の座標を求めよ。

①　(1, 3)　　②　(4, 12)　　③　(−2, −6)

(5)　原点を通り直線 $y = 3x$ に直交する直線の方程式を求めよ。

(6)　上に考えたようにして原点を通り，次の各直線に直交する方程式を求めよ。

①　$y = \frac{2}{3}x$　　②　$y = -\frac{1}{2}x$

(7)　2つの直線が直交するためには，どんな条件があればよいか。

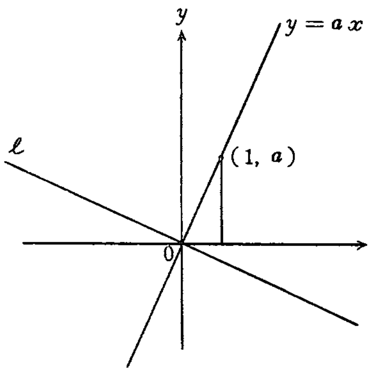
(8)　(7)でいえたことを一般的にたしかめてみよう。

①　直線 $y = ax$ 上に点 $(1, a)$ をとり，この点を原点を中心として左まわりに $90°$ 回転したときの点の座標を求めよ。

②　直線 ℓ の傾きを求めよ。

③　直線 ℓ の方程式を求めよ。前にしらべた例は，$a = 3$, $a = \frac{2}{3}$, $a = -\frac{1}{2}$ であることをたしかめよ。

(9)　2点 (4, −4), (−2, 10) を結ぶ線分の垂直二等分線の方程式を求めよ。



○　y 軸方向への平行移動について前にしらべたが，次に x 軸方向の平行移動についてしらべてみよう。

(1)　直線 $y = \frac{1}{2}x + 4$ を x 軸の正の方向に3だけ平行移動した直線の方程式を求めよ。

○　1年生のときに図形の移動を学んだ。いままでに平行移動，回転移動についてしらべたから，次に対称移動についてしらべてみよう。

(1)　直線 $y = \frac{2}{3}x + 5$ を直線 $y = 2$ に関して対称移動した直線の方程式を求めよ。

(2)　直線 $y = -\frac{1}{2}x + 3$ を直線 $x = -2$ に関して対称移動した直線の方程式を求めよ。

(3)　直線 $y = 2x - 3$ を点 (1, −2) に関して対称移動した直線の方程式を求めよ。

練習問題

1.　直線 $3x - y = 4$ を x 軸のどの方向にどれだけ平行移動すると，点 (5, −2) を通るか。

2.　直線 $4x + 3y = 24$ を y 軸に平行な直線 $x = \mathrm{m}$ について対称移動すると，(−6, 4) を通るという。mの値を求めよ。

〔第3学年〕

関数とその値の変化

(1)　ダイヤモンドの値段は，その重さの2乗に比例する。6カラットの値段が72万円である。

①　x カラットの値段を y 万円として，y と x の関係式をつくれ。

②　10カラットの値段はいくらか。

③　6カラットのダイヤモンドをあやまって2つに割ってしまった。その重さの比は1：5であった。このための損害はいくらか。

(2)　半径 r cmの円の面積を S cm² とする。S と r との関係式をつくれ。

(3)　y が x の2乗に比例する例をあげなさい。

○　正方形があるとき，その辺の長さを次のように変えて長方形をつくる。もとの正方形の辺の長さを x cm つくられる長方形の面積を y cm² とすると，y は x のどんな式で表わされるか。

① 正方形の1辺を2倍にし，他の辺を3倍にする場合。

② 正方形の1辺を2cm伸ばし，他の辺を3cm縮める場合。

$y=6x^2$， $y=x^2-x-6$

などのように，yがxの二次式で書かれるとき，yはxの二次関数であるという。xの二次関数は，一般には次の形に書かれる。

$y=ax^2+bx+c$ （a，b，cは定数，$a \neq 0$）

ここでは，二次関数のうちでもっとも簡単な場合

$y=ax^2$ （aは定数，$a \neq 0$）

について調べていくことにする。

○ 二次関数の値の変化について考えてみよう。

(4) 初速度が25 m／秒で真上にボールを投げ上げたとき，投げ上げてからt秒後のボールの高さをSmとすると，Sとtの間に

$S=20t-5t^2$

の関係がある。

① tの値が1，1.5，2のとき，これらに対応するSの値を求めよ。

② Sの値が10のときのtの値を求めよ。

(5) ボールを自然落下させるとき，落ちはじめてからt秒後にSm落下する。このときSとtの間に

$S=5t^2$

の関係がある。

① tの値が1，2，3，4，5のとき，これらに対応するSの値を求めよ。

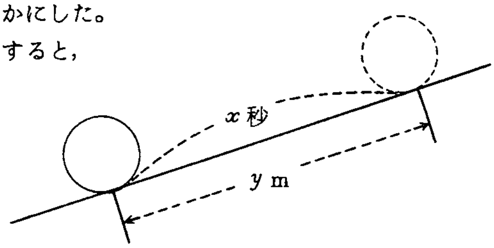
② ボールが落ちはじめてから12m落下するには何秒かかるか。

ガリレイは，斜面をころがり落ちるボールの運動について調べ，ボールがころがりはじめてから進む距離は，ころがりはじめからの時間の2乗に比例することを明らかにした。

つまり，ボールがはじめからx秒後までにy m進むものとすると，

$y=ax^2$ （aは定数）

となる。この定数aは，斜面の傾きによってきまってくる。



ここでは

$y=x^2$

で表わされる運動について考えよう。

(6) $y=x^2$でxの値が0.5，1，1.5，2，2.5，3のとき，これらに対応するyの値を求めて，数表をつくれ。

(7) 前問の数表から，xの値が0から0.5ずつ増加すると，yの値はどのように変わるかを調べよ。

(8) 関数$y=x^2$について，yの値の変化のようすを調べるために，グラフをかいてみよう。

前々問で求めたx，yの値の組を座標にもつ点をとれ。これらはどのようにならんでいるか。

(9) xの値を0から1まで0.1おきにとり，それらに対応するx^2の値を求めよ。

(10) 2点O（0，0）とA（1，1）を通る直線の方程式を求めよ。

(11) (9)，(10)について，xの値を0.1，0.2，0.3，0.4，……0.9，1としたときのyの値の差を求めよ。また，(9)の(10)に対するyの値の比を求めよ。

> このボールの運動では，時間も距離も連続して変わるから，x，yの値の組を座標にもつ点の集合は1つのつづいた線になる。また，(9)，(10)，(11)より，曲線になると考えられる。
>
> $y=x^2$ （$x \geqq 0$）の関係を表わすグラフは曲線となる。

関数$x \longrightarrow y$でxの変域を定義域，yの変域を値域という。

関数$y=x^2$では，定義域は実数全体，値域は負でない実数全体である。

(12) 関数$y=-x^2$で定義域が実数全体のとき，値域はどうなるか。

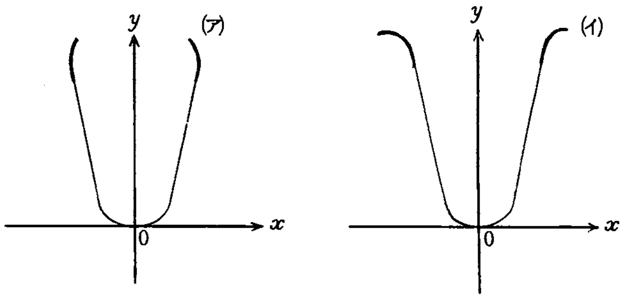
次に定義域を実数全体として，$y=ax^2$のグラフを考えてみよう。

(13) $y=x^2$についてx，yの対応する値の表をつくれ。

絶対値が等しく，符号が反対であるようなxの値に対するyの値は等しい。このことから，

$y=x^2$のグラフは，y軸について対称である。

(14) $y=x^2$のグラフは，右の図形(ア)，(イ)の太線部分のようになるだろうか。



(15) $y=-x^2$のグラフをかき，$y=x^2$のグラフとの位置関係をのべよ。

$y=x^2$のグラフと$y=-x^2$のグラフは，x軸について対称である。

(16) 同じ座標軸を使って，次の関数のグラフをかけ。

① $y=2x^2$　② $y=-2x^2$　③ $y=\frac{1}{2}x^2$　④ $y=-\frac{1}{2}x^2$

⑤ $y=x^2$　⑥ $y=-x^2$

(17) 前問のグラフより共通した性質は何か。

(18) (16)のグラフより，$y=ax^2$（aは定数，$a \fallingdotseq 0$）で$a>0$なるときのグラフについて，共通していえることは何か。また，$a<0$なるときはどうか。

(19) (16)のグラフより，放物線の開きは$y=ax^2$（aは定数，$a \fallingdotseq 0$）のaの値に関係があると思われる。どのような関係にあるか。

(20) (16)の関数で定義域を実数としたとき，値域はどうなるか。また，関数の値が最も大きくなる値，または最も小さくなる値があれば求めよ。

これまで調べてきたことをまとめると，

$y=ax^2$（aは定数，$a \fallingdotseq 0$）のグラフは放物線で ① y軸について対称である。 ② $a>0$のとき 　グラフは上に開き，原点はもっとも低い点になる。 　$a<0$のとき 　グラフは下に開き，原点はもっとも高い点になる。 ③ aの絶対値が大きくなると，放物線の開きがせまくなる。

$y=x^2$のグラフと$y=2x^2$のグラフが相似形であるといえるだろうか。考えてみよう。

(21) 2つの図形が相似であるとはどんなことか。

(22) 同じ座標平面上に　$y=x^2$……(ア)　$y=2x^2$……(イ)　(ア)，(イ)のグラフをかけ。また，直線$y=3x$と(ア)，(イ)のグラフの交点をそれぞれP，P′とする。

(23) 線分OP′と線分OPの比を求めよ。

(24) (22)の問で，直線$y=3x$を直線$y=4x$のときについて考えてみよう。そのときの線分OP′と線分OPの比を求めよ。

(25) (22)の問で，直線$y=3x$を直線$y=ax$（aは定数，$a\fallingdotseq 0$）のときについて考えてみよう。そのときの線分OP′と線分OPの比を求めよ。

(22)〜(25)より，

> 放物線$y=2x^2$は放物線$y=x^2$と相似であり，相似の位置にある。相似の中心は原点，相似比は$\frac{1}{2}$である。

関数$y=ax^3$

関数関係が$y=ax^3$（aは定数，$a\fallingdotseq 0$）の形で表される場合について考えよう。これはyがxの3乗に比例する関係である。また，$y=ax^3+bx^2+cx+d$（a，b，c，dは定数 $a\fallingdotseq 0$）なるyがxの三次関数の$b=0$，$c=0$，$d=0$の場合である。立方体の1辺の長さとその体積，球の半径とその体積の間の関数関係はそれぞれ

$$y=x^3,\quad y=\frac{4}{3}\pi x^3$$

で表される。

$y=x^3$について，値の変化のようすについて考えてみよう。

(26) xにいろいろな値を与えて数表をつくれ。

(27) xの値が増加するにつれて，yの値がどのようになるか。

(28) xの値が1と−1，2と−2，3と−3のように絶対値が等しいとき，yの値はどうなるか。

(29) 定義域を実数全体にとると，値域はどうなるか。関数$y=x^3$のグラフについて考えてみよう。

(30) x，yの値の組を座標とする点を座標平面上にとれ。

(31) $-1\leqq x\leqq 1$でxの値を0.1おきにとり，それに対応するyの値を求め，グラフをかけ。

(26)より(31)までのことより，

xの値が絶対値が等しく，符号が反対の数のとき，yの値も絶対値が等しく，符号が反対の数になる。

x，yの値の組を座標にもつ点の集合は1つのつづいた曲線になる。

以上いいかえると，

> $y=x^3$のグラフは原点について対称な，なめらかな曲線になる。

(32) $y=-x^3$のグラフをかけ。このグラフは，$y=x^3$のグラフとどのような関係になっているか。

(33) $y=\frac{1}{2}x^3$，$y=-\frac{1}{2}x^3$のグラフをかけ。

○ $y=x^2$のグラフ，数表からわかるように，xの値が増加するにつれてyの値も増加するが，その増し方はいちようではない。

x，yの値の変化の割合，つまりこの運動での時間の増加に対する距離の増加の割合について考えてみよう。

$y=x^2$で表わされる運動では

時間（x秒後）	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3
距離（y m）	0	0.25	1	2.25	4	6.25	9

となる。これから

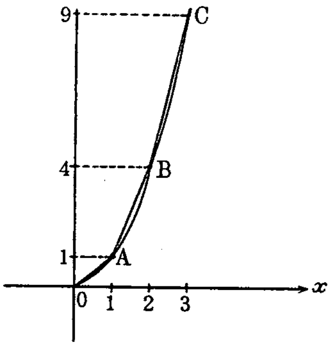
$$\frac{\text{進んだ距離}}{\text{かかった時間}}$$

つまり，平均の速さを0秒から1秒後まで，1秒後から2秒後まで……について調べると，各1秒間の速

さは

　0 秒～1 秒　　1 m／秒
　1 秒～2 秒　　3 m／秒
　2 秒～3 秒　　5 m／秒
　　⋮

となる。



> この1，3，5……はxの値の変化1に対するyの値の変化の割合を示しており，グラフでは，それぞれ線分ＯＡ，ＡＢ，ＢＣ……の傾きにあたる。

平均の速さはそれぞれの時間の間を，同じ速さで運動したものとみなした速さである。ところが，実際にはだんだん速くなっているから，たとえば1秒後から2秒後までについても，はじめのうちは3 m／秒よりおそく，終わりの方ではそれよりも速いものと考えられる。

(34) 上の運動で1秒後から1.5秒後まで，1.5秒後から2秒後までの平均の速さを求めて3 m／秒とくらべてみよ。

○ 1秒後から2秒後までの間に速さの変わっていくようすを，もっとくわしく調べてみよう。

(35) 1秒後から2秒後までの間を0.1秒ずつにとって，この間の平均の速さを求めよ。

時間（x秒後）	1	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	2
距離（y m）	1	1.21	1.44	1.69	1.96	2.25	2.56	2.89	3.24	3.61	4
平均の速さ（m／秒）		2.1	2.3	2.5	2.7	2.9	3.1	3.3	3.5	3.7	3.9

これより，ボールの速さはほぼ2 m／秒から4 m／秒まで変わる。

斜面をころがり落ちるボールの速さは時間のたつにつれて，たえず増していく。

(36) 平均の速さの値は，時間とどのような関係があるか。

> この運動では，時間の増加に対する平均の速さの増加の割合は一定である。つまり，加速度は一定である。

○ 3つの関数$y=x$，$y=x^2$，$y=x^3$について，その値の変化のちがいを調べてみよう。

(37) 上の3つ関数のグラフを同じ座標平面上にかけ。

x，yの値の変化について，どのようなことがいえるか，比較せよ。

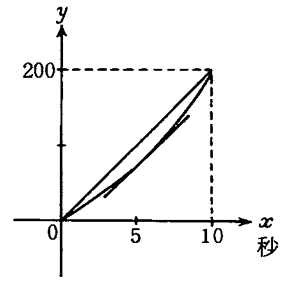
> 3つの関数$y=x$，$y=x^2$，$y=x^3$について
> 　xの値が負の数からしだいに増していくとき，
> 　yの値は
> 　$y=x$では，いちように増加していく。
> 　$y=x^2$では，$x=0$まで減少し，それからあとは増加していく。
> 　$y=x^3$では，つねに増加していくが，増加の割合は一定ではない。

(38) x，x^2，x^3の値の大小関係を示せ。

> 3つの関数$y=x$，$y=x^2$，$y=x^3$について
> 　xの1つの値x_1に対応するyの値の大小関係は，
> 　　$x_1<-1$　のとき　$x_1^3<x_1<x_1^2$
> 　　$x_1=-1$　のとき　$x_1=x_1^3<x_1^2$

$-1<x_1<0$	のとき	$x_1<x_1^3<x_1^2$
$x_1=0$	のとき	$x_1=x_1^2=x_1^3$
$0<x_1<1$	のとき	$x_1^3<x_1^2<x_1$
$x_1=1$	のとき	$x_1=x_1^2=x_1^3$
$x_1>1$	のとき	$x_1<x_1^2<x_1^3$

(39) 右のグラフは，ある列車が動きはじめてからx秒後までにym進んだとして，そのxとyの関係を表したものである。この列車が動きはじめてから10秒後まではxとyとの間に，$y=ax^2$の関係があるという。



① aの値を求めよ。

② 動きはじめてから4秒後までの平均の速さを求めよ。

③ 10秒後までのある1秒間を考えたとき，その平均の速さがちょうど動きはじめてから10秒間の平均の速さに等しくなるのは，何秒後から何秒後までの1秒間ですか。

(40) 次の関数のグラフを定義域を㋑，㋺にしてそれぞれかけ。

① $y=|x-1|$　㋑ $\{x\mid -2\leqq x\leqq 5,\ x$は整数$\}$

㋺ $\{x\mid -2\leqq x\leqq 5,\ x$は実数$\}$

② $y=-|2x+1|$　㋑ $\{x\mid -5<x<3,\ x$は整数$\}$

㋺ $\{x\mid x$は実数$\}$

(41) 次の二次関数および三次関数で，xの値がtからt＋2まで変化するときの$f(x)$の変化の割合が8であるときのtの値を求めよ。

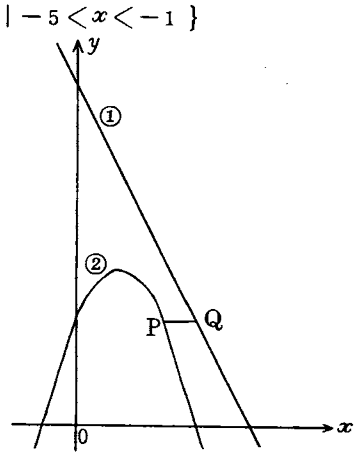
① $f(x)=\frac{1}{2}x^2$　② $f(x)=2x^3$　③ $f(x)=-2x^2+3$

(42) 次の各関数の最大値，最小値を求めよ。

① $y=\frac{3}{2}x^2$　$\{x\mid -2\leqq x\leqq 4\}$　① $y=-2x^2$　$\{x\mid -3\leqq x\leqq -1\}$

③ $y=2x^2-4$　$\{x\mid -2\leqq x\leqq 3\}$　④ $y=-x^2+3$　$\{x\mid -5<x<-1\}$

(43) 右の座標平面上の直線①の方程式は$y=-2x+9$，放物線②の方程式は$y=-(x-1)^2+4$である。



① 直線①がx軸と交わる点の座標を求めよ。

② 放物線②がy軸と交わる点の座標を求めよ。

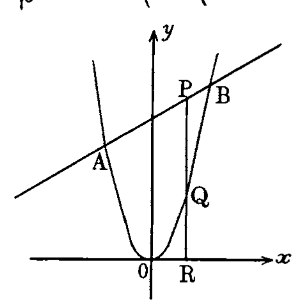
③ 放物線②の方程式でxの値がaから$a+1$まで1増加すると，yの値はいくら増加するか。

④ 線分PQはx軸に平行で点Pは放物線②上，点Qは直線①上である点Pのx座標をmとする。

㋐ 点Qのy座標をmの式で表せ。

㋑ 点Pが放物線②上を動くとき，線分PQが最小になるのはmがいくらのときか。

(44) 右のグラフは，直線$y=ax+8$と放物線$y=x^2$で，点A，Bは2つの交点である。また，点Bのx座標が4である。



① 直線の傾きaの値を求めよ。

② 点Aの座標を求めよ。

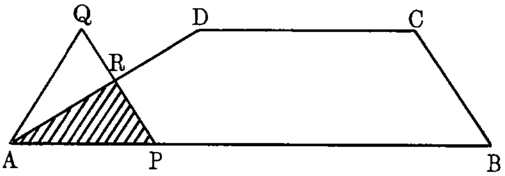
③ 点Pが線分AB上を動くとき，Pからx軸に引いた垂線が放物線およびx軸と交わる点をQ，Rとする。

㋐　点Pのx座標をtとしたとき，線分PQの長さをtを用いた式で表わせ。

㋑　線分PQの長さが5となるときのtの値を求めよ。

④　二次関数$y=x^2$で点Qのx座標が1変化するとき，y座標の変化が4であるときの点Qのx座標はいくらか。

(45)　右の図は，$\angle DAB=30°$，$AD=2\sqrt{3}$ cm，CD＝4 cm，DC∥AB，$\angle ABC=60°$の台形である。点Pは辺AB上を，AからBまで毎秒1 cmの速さで動く。線分APを1辺とする正三角形APQをABについて台形と同じ側につくる。辺PQと台形の辺との交点をRとする。点PがAを出発してから，x秒後の台形ABCDと正三角形APQとが重なった部分の図形の面積をy cm²とする。



①　台形ABCDの面積を求めよ。

②　点Rは辺AD，辺DC上を動くときの速さを求めよ。

③　yとxとの関係式をつくれ。また，そのグラフをかけ。

④　台形ABCDと△APQの重なった部分の図形の面積が台形の面積の$\frac{1}{4}$になるのは，xの値がいくらのときか。

⑤　点Rが辺AD上を動くとき，ある時刻t秒から1秒動くごとに重なった部分の図形の面積は，毎秒何cm²ずつ増すか。

逆関数

(1)　平地での気温はいま15℃である。この地の上空にのぼると，高さ100 mにつき，0.6℃の割合で気温がさがるという。

平地からh Km上空の気温をt℃とするとき，tをhの式で表せ。

(2)　(1)で平地から次の高さの気温を求めよ。

1,000 m，　2,000 m，　3,000 m

(3)　(1)で気温が次のようなとき，平地から何mの高さのところか。

9℃，5℃，－1℃，－6℃

(2)より高さがきまれば気温がきまるから，気温は高さの関数であり，

$$h \rightarrow 15-6h$$

のように対応する。また，

$$t=15-6h \text{ ——— ①}$$

とかける。

次に(3)より気温がきまれば高さがきまるから，高さは気温の関数であり，

$$t \rightarrow \frac{15-t}{6}$$

のように対応する。また，

$$h=\frac{15-t}{6} \text{ ——— ②}$$

と書ける。

①，②をx，yを用いて書くと，次のようになる。

$$y=15-6x \text{ ——— ③}$$

$$y=\frac{15-x}{6} \text{ ——— ④}$$

関数③，④は上の図でもわかるように，たがいに逆の対応になっている。このような２つの関数では，④は③の逆関数であるという。また，③は④の逆関数であるということもできる。

③，④をはじめの，高さと気温の関係にもどってながめると，③では高さがx，気温がyで表わされ，④では気温がx，高さがyで表わされている。だから，③の式でxとyを交換し，それをyについて解けば，③の逆関数④になることがわかる。

(4) 関数 $y=2x+3$ の逆関数を求めよ。

解 xについて解く　$x=\dfrac{y-3}{2}$

x，yを交換する　$y=\dfrac{x-3}{2}$

(5) 次の関数の逆関数を求めよ。

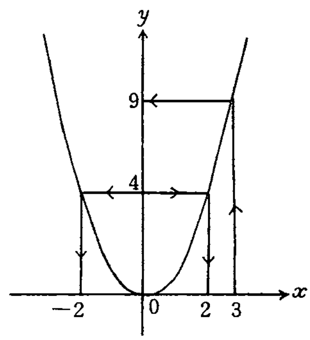
㋐ $y=2x-3$　　㋑ $y=\frac{1}{2}x+5$　　㋒ $y=-3x+6$

○ 次に関数 $y=x^2$ について，逆の対応を考えてみよう。

この関数は，$x \longrightarrow x^2$ という対応である。この対応をグラフで考えるとx軸上の点からy軸上の点への対応になり，右の図のように $3 \longrightarrow 3^2$ は１とおりにきまる。

しかし，その逆の対応はy軸上の点からx軸上の点への対応で，右の図のように４には２と－２が対応し，１とおりにはきまらない。この対応は関数とはいえない。

ところが，変域を制限して $y=x^2$ ($x \geqq 0$) とすれば，$y=4$ に対応するxの値は２だけとなり，逆関数 $y=\sqrt{x}$ が定まることになる。



これまでの例より，

対応が１対１になっている関数では逆の対応も関数となり，逆関数がえられる。

(6) $y=x^2$ ($x \leqq 0$) の逆関数をつくれ。

○ 逆関数のグラフ

逆関数のグラフがもとの関数のグラフとどのような関係になっているかを考えてみよう。

(7) 次の関数とその逆関数のグラフとをそれぞれ，同じ座標軸を使ってかけ。

㋐ $y=3x-2$　　㋑ $y=\frac{2}{3}x-1$

(8) たがいに逆関数になっている２つの関数㋐，㋑のグラフをかけ。

㋐ $y=x^2$ ($x \geqq 0$)　　㋑ $y=\sqrt{x}$

㋐と㋑では，xとyとを入れかえたものであるから，㋑のグラフは㋐のグラフを，x軸とy軸とを入れかえればよい。

逆関数のグラフはもとの関数のグラフと直線 $y=x$ について対称である。

(9) 次の関数のうちで，逆関数がもとの関数と一致するものはどれか。

㋐ $y=2x$　　㋑ $y=1-x$　　㋒ $y=3x-2$　　㋓ $y=\frac{6}{x}$

(10) 次の関数の逆関数と，その定義域を求め，かつそのグラフをかけ。

① $y=-2x+3$ ($-2 \leqq x \leqq 5$)　　② $y=2x^2$ ($-3 \leqq x \leqq 0$)

③ $y=x^2-3$ ($0 \leqq x \leqq 3$)　　④ $y=-2x^2+4$ ($-4 \leqq x \leqq 0$)

⑤ $y=2\sqrt{x}$ ($1 \leqq x \leqq 9$)　　⑥ $y=-\sqrt{2x}$ ($0 \leqq x \leqq 4$)

(11) aとbの最小公倍数を $a \triangle b$ で表わすとき，次の関数を考える。

$f(x)=6 \triangle x$，$x \in \{4, 6, 8, 10\}$

① この関数の値域を求めよ。

② この関数の逆関数を$g(x)$とするとき，$g(12)$，$g(24)$を求めよ。

(12) 4つのものから，x個をとる順列の数をgとするとき，xとgの関係を$g=f(x)$で示す。定義域を$\{1, 2, 3, 4\}$として$g=f(x)$のグラフをかけ。また，関数の値域を求めよ。

(13) 自然数xに対し，その約数の個数yを対応させる関数$y=f(x)$を考える。

① $f(4)$，$f(6)$，$f(12)$を求めよ。

② 定義域を$\{x \mid 8 \leqq x \leqq 30，x\text{は自然数}\}$とするとき，$f(x)=2$となるすべての$x$を求めよ。このような数を何というか。

③ ②の定義域で$f(x)$が奇数となるxをすべて求めよ。このようなxは，どんな数といえるか。

④ ②の定義域で考えた$y=f(x)$に対し，その逆関数は考えられるか。

(14) 10進法で表わされる自然数xに対し，その数を2進法で表わしたときのけた数yを対応させる関数$y=f(x)$を考える。

① $f(4)$，$f(9)$，$f(20)$を求めよ。

② $f(x)=4$となるような数xの値の範囲を求めよ。

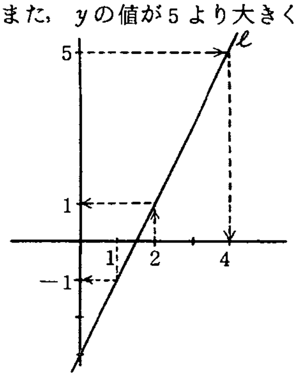
③ 定義域を$\{x \mid 1 \leqq x \leqq 20，x\text{は自然数}\}$として$y=f(x)$のグラフをかけ。

方程式・不等式とグラフ

○ 一元の方程式・不等式

ここでは関数のグラフと，方程式や不等式の解との関係について考えてみよう。

(1) 関数$y=2x-3$で，yの値が5になるのは，xの値がいくらのときか。また，yの値が5より大きくなるのはどんなときか。



関数$y=2x-3$ …………①

のグラフは右の直線ℓで，これはxの値からyの値への対応$1 \to -1$，$2 \to 1$などを示している。

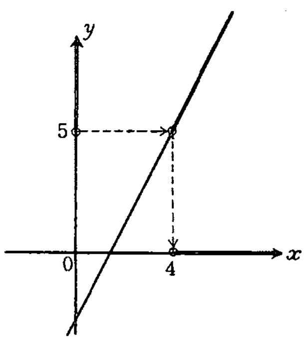
この対応を逆にみると，$y=5$は$x=4$に対応することがわかる。

また，このxの値4は①で$y=5$として

$5=2x-3$ …………②

から求められる。つまり，方程式②の解である。

y軸上で，$y>5$は5より上の部分である。関数$y=2x-3$では，これは右のように，x軸上で4より右の部分に対応する。つまり，$y>5$は$x>4$に対応する。



また，このxの値の範囲は$y=2x-3$で，$y>5$とした$2x-3>5$にあてはまる値の範囲で，この不等式の解の集合である。

(2) 次の不等式の解の集合を求めよ。

① $2x-3<5$　② $2x-3>6$　③ $2x-3 \leqq 7$

(3) 不等式$\frac{3}{2}x+5<8$を計算によって解け。次に関数$y=\frac{3}{2}x+5$のグラフを書いて解の集合を座標平面上に示せ。

○ 二元一次方程式と二元一次不等式

x，yについての二元一次方程式$2x-y=3$のグラフは$y=2x-3$のグラフと同じで，傾きが2，y切片が-3の直線である。また，次のように数表をかいて求めることも前に学んだ。

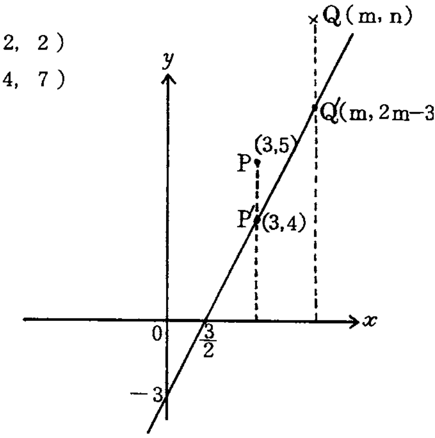
x	-1	0	1	2	2.5	3	4
y	-5	-3	-1	1	2	3	5

方程式$y=2x-3$の解のx，yの組を座標とする点の集合が方程式$y=2x-3$のグラフである。

(4) 二元一次不等式$y>2x-3$の解のいくつかをあげよ。

解の例　A（3, 4）　B（3, 5）　C（−2, −5）　D（2, 2）

E（−3, −8）　F（−4, −10）　G（7, 12）　H（4, 7）



(5) (4)の解を座標とする各点が直線$y=2x-3$とどのような位置関係にあるか。

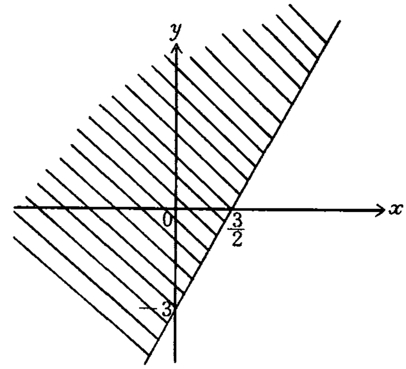
$y>2x-3$ ――― ①

$y=2x-3$ ――― ②

①と②では，xの同じ値に対応するyの値はいつも①のほうが大きいことは，右の図の例からわかる。だから，①にあてはまる点Pは②にあてはまる点P′より上方にある。

このことから，①の解を座標とする点は，直線$y=2x-3$の上方にある点のすべてである。つまり，不等式$y>2x-3$の解の集合は，右の図の斜線部分（境界はふくまない）で表わされる。

この解の集合は，$\{(x, y) \mid y>2x-3\}$と書き表わす。



(6) 不等式$y<2x-3$の解の集合は，座標平面上のどのような部分で表わされるか。

(7) 次の不等式の解の集合を座標平面上に表わせ。

①　$y>x$　　②　$y>3-x$　　③　$y<3x-2$

④　$y<-\frac{1}{2}x+4$

一般に次のことがいえる。

> $y=ax+b$のグラフを直線ℓとすると，平面上の点は次の3つの部分集合に類別される。
>
> $y>ax+b$の解の集合―――直線ℓより上方の部分
>
> $y=ax+b$の解の集合―――直線ℓ
>
> $y<ax+b$の解の集合―――直線ℓより下方の部分

(8) $ax+by>c$，$ax+by<c$の形の不等式で，a，bの一方が0の場合，その解の集合は座標平面上でどのようになるだろうか。次の場合で考えよ。

①　$a=1$,　$b=0$,　$c=1$　　②　$a=0$,　$b=2$,　$c=6$

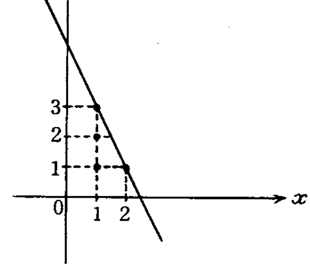
(9) 100円持って，ノートを買いに行ったら，ノートは1冊40円と20円の2種類があった。これをとりまぜて買うとすると，どんな買い方があるか。

解　40円のノートx冊，20円のノートy冊買う。

$$\begin{cases} 40x+20y \leqq 100 \\ x,\ y\text{は正の整数} \end{cases}$$

これより，

40円の冊数	1	1	1	2
20円の冊数	1	2	3	1

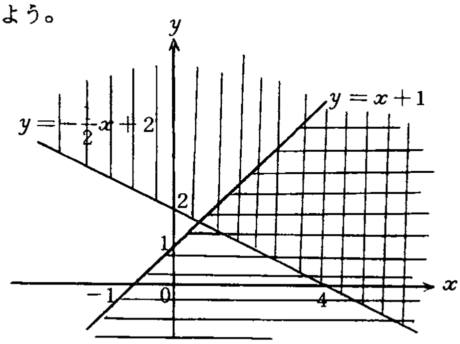


○　連立二元一次不等式

いくつかの二元一次不等式があるとき，そのすべてにあてはまる値の組の集合や，少なくとも1つにあてはまる値の組の集合などを座標平面上に表わすことを考えよう。

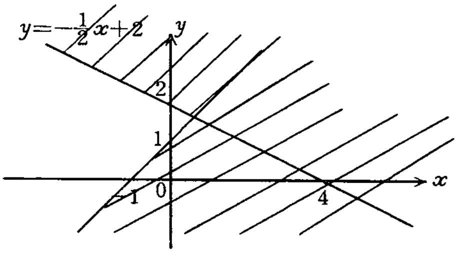
(10)　$\begin{cases} x+2y>4 \\ x-y+1>0 \end{cases}$

この両方にあてはまる値の組の集合を座標平面上に示せ。



(11)　次の条件にあてはまるx，yの値の組の集合を座標平面上に示せ。

$x+2y>4$　または　$x-y+1>0$



(12)　2直線$x+2y=4$，$x-y+1=0$によって座標平面は4つの部分（直線上をのぞく）に分けられる。それらの各部分はそれぞれ，どのような条件で表わすことができるか。

(13)　次の不等式がすべて成り立つとき，yのとりうる値はどんな範囲にあるか。

$2x-y\geqq 0$，　$x-2y-2\leqq 0$，　$4x+5y-21\leqq 0$

(14)　x，yが整数で$-3\leqq x\leqq 3$，$-3\leqq y\leqq 3$であるとき，不等式$3x+2y>1$をみたすx，yの値の組を求めよ。

(15)　秋山君の第1回の数学のテストの得点と第2回の数学の得点との平均は87点以上で，第2回は第1回より14点以上多かった。

(16)　$x\geqq 0$，　$y\geqq 0$，　$8<2x+y\leqq 12$のとき，

①　上の連立不等式の解の集合を図示せよ。

②　(x, y)が上の連立不等式をみたすとき，$x+y$の最大値と最小値を求めよ。

(17)　かんづめ工場では，さけかんは1時間に100個，かにかんは1時間に50個つくれる。利益はさけかん100個で600円，かにかん50個で500円である。1日に8時間以下の操業で利益を最大するには，さけかん，かにかんを作る配当時間をつくれ。ただし，1日には500個までしかできない。