方程式・不等式の指導

池　田　克　己

1 はじめに

新しい学習指導要領の研究という主題で本校の数学科では昭和43年度から研究を始めた。既に「集合について」「確率について」「数の集合の構造について」発表してきた。今年度は方程式，不等式をとりあげることにした。従来は相等関係に重点がおかれ不等関係はほとんど扱われなかった。したがって不等式については系統的な指導がほとんどなかったわけである。ところが現代化の立場から不等式の指導が必要になってきた。不等式指導の意義は何かをふまえてともあれ実践することとした。

2 目　標

新しい学習指導要領では，方程式と不等式とを命題関数としてとらえることによって，統合的，発展的にこれを見る立場を強調している。そして，またこの見方考え方によって，いろいろな概念や用語の意味をより一層明確にさせることをねらっていると思われる。このような新しい立場でのねらいをいかに達成させるかが，これからの問題である。そのために

① どのような内容で，どのように体系化し，具体化するか。

② それぞれの内容にひそんでいる問題点は何か。

③ 生徒のつまずきはどんな点にあらわれるか。

といった点について研究を進め，よりよい指導体系を見出したいと思い，ささやかな実践の結果をまとめてみた。

3 指導内容と指導計画

まず指導内容の精選にあたって，各社の教科書にもられている内容を比較検討してみた。それが下の第Ⅰ表である。

各社の指導内容一覧表　　Ⅰ　表

項目＼出版社	A　社	B　社	C　社	D　社	E　社
方程式の定義	含まれる文字の値によって成立することも成立しないこともある等式を方程式という。	式の文字に特定の値を代入したときにかぎって成立する等式を方程式という	変数x等を使って表わした条件が$4x=20$のように等式になっているとき，この等式を方程式という。	変数を含んだ等式を方程式という。	$2x+4=10$のようにxの値によって成立したり不成立になったりする等式を文字xについての方程式という。
等式の性質	◦等式の性質 ◦$x-4=5$の解を求む $x-4+3=5+3$の解を求む $4x=12$の解を求む $2x=6$の解を求む 方程式の両辺に同じ数を加えたり，同じ数をかけたりしてで	◦等式の性質 ◦$a-2=b \Leftrightarrow a=b+2$ $\frac{1}{3}a=b \Leftrightarrow a=3b$ ◦$x+9=4$ $x+9-9=4-9$ $x=-5$ $x=-5$をはじめの方程式に代入してたしかめる。	◦変域$\{-3,-2,-1,0,1,2,3\}$ $2x-3=x$ をとけ $2x=x+3$をとけ $x-3=0$をとけ それぞれの解をくらべよ ◦変域$\{3,4,5,6,7,8,9,10\}$	◦等式の性質 ◦$2x-3=x+5$が成りたつxの値に対しては $2x=x+8$が成りたつ逆に $2x=x+8$が成りたつようなxの値に対しては $2x-3=x+5$も成	$2x+10=4$ をもとにしてつぎのような方程式①，②，③をつくるとき，はじめの方程式①，②，③の方程式の解はいずれも-3であることをたしかめよ。 両辺から10をひく $2x=-6$―①

項目　出版社	A　社	B　社	C　社	D　社	E　社
方程式の解き方	きる方程式はもとの方程式と同じ解をもつ。		$\frac{3}{4}x=6$ $3x=24$ $\frac{1}{4}x=2$ をといて解をくらべよ。 方程式の両辺に同じ数を加えたりひいたりかけたりしてできる方程式の解の集合はもとの方程式の解の集合に等しい。 。等式の性質	りたつ。 $\{x\mid 2x-3=x+5\}=\{x\mid 2x=x+8\}$ 同様にして $\frac{x+1}{2}=x \Leftrightarrow x+1=2x$ についてもしらべている。	両辺に5をかける $10x+50=20$—② 両辺を2でわる $x+5=2$—③ 。等式の性質
方程式の利用	変域を表示している				
等式 不等式の種類		恒等式・絶対不等式			
解の集合の表わし方	移項に入る直前に略記	初期段階から略記	集合表示で通している。	移項に入る直前に略記	移項に入る直前に略記
1次方程式の定義	$ax+b=0\ (a\neq 0)$ の形に変形できる方程式	(1次式)＝0の形に変形できる方程式	$ax+b=0\ (a=0)$ の形になる方程式をいう。	両辺が x の1次式か数である方程式	1次式でできた方程式
不等式の性質 不等式の解き方	。具体例から一般化 。まとめ 。$x-3>2$, $x-3+2>2+2$ の解の集合をくらべよ。 $-2x>6$, $-4x>12$, $x<-6$ の解の集合をくらべよ。 。不等式の性質を用いて変形した不等式はもとの不等式と同じ解の集合をもつ。 。以下不等式の性質を用いての解法に入る。	。具体例から一般化 。2本の数直線の利用 。まとめ 。不等式の性質の利用 。$\{1, 2, 3, 4, 5\}$ として不等式 $x-6<4-x$ をとけ。 上の不等式を $\{x\mid x$ は整数$\}$ $\{x\mid x$ は有理数$\}$ として解け。 。以下不等式の性質を用いての解法に入る。	。$\{-2,-1,0,1,2\}$ として次の3つの不等式が同値である。 $x>-1$, $x+5>4$, $2x-3>-5$ もっともかんたんな不等式は $x>-1$ である。 。$\{0,1,2,3,4\}$ としてつぎの不等式の中から解の集合の同じものをえらべ。またその中でもっともかんたんな不等式をいえ。 $x+5>8, 2x<4, x<2$ $x>3, x-1>2, 3x-2<4$ 。不等式の解の集合を求めるには，まずその不等式と解の集合が同じでもつともかんたんな不等式を導き出せばよい。 。不等式の性質 具体例から一般化	。具体例から一般化 。数直線の利用 。まとめ 。$\{-3,-2, 1,0,1,2$ $3\}$ としてつぎの不等式をとけ。 $x+1<3, x+1\geqq 3,$ $2x+4>x-1$ 。$x+1<3 \rightarrow$ $x+1-1<3-1$ を不等式の性質を用いて説明せよ。 $x<2 \rightarrow x+1<3$ を説明せよ 。$-2x<4 \rightarrow x>-2$ この理由を不等式の性質を用いて説明せよ 。以下不等式の性質を用いての解法に入る。	。具体例から一般化 。2本の数直線の利用 。まとめ 。不等式の性質の利用 $5-m>7+n \rightarrow$ $5>7+n+m \rightarrow$ $5-n>7+m$ として移項を説明 $a>m$, $b>n$ のとき $a+b$ と $m+n$ はどちらが大きいか。 $a-b$ と $m-n$ のときはどうなるか $5x>3 \rightarrow x>\frac{3}{5}$ $-4x>20 \rightarrow x<-5$ 。以下移項を用いての解き方に入る。
解の集合のかき方	移項に入る直前に略記	解の集合 $\{x\mid x>-1\}$ の形に用いられている条件「$x>-1$」を求めることを不等式をとくとして略記している。	集合の表示で通している。	不等式の性質を用いて解く直前に略記	不等式の解き方のすんだ後で略記
連立不等式	。連立の用語は用いない。 。方程式と不等式の連立 。不等式と不等式の連立（3つの場合も扱う）	。連立の用語を用いる。 。不等式と不等式の連立 （2つの場合のみ）	。連立の用語は用いる。 。方程式と不等式 不等式と不等式 （2つの場合のみ）	。連立の用語は用いる。 。不等式と不等式 （2つの場合のみ）	。連立の用語は用いない。 。不等式と不等式 （2つの場合のみ）
	。不等式を利用して問題を解く手順をまとめている。	。解の吟味で変域を扱う。 。例題は5題	。変数の決定のところで変域をそえている。	。解の吟味で変域を扱う。 。例題は4題	。解の吟味で変域を扱う。 。例題は3題

項目＼出版社	A 社	B 社	C 社	D 社	E 社
不等式の利用	◦変域は立式の後にただし"xは自然数"とのべている。 ◦例題は4題 練習問題は15題	練習問題は13題	◦例題は3題 練習問題は10題	◦練習問題は15題	◦練習問題は5題
数の大小		◦数の大小と数直線 ◦どんな数a, bに対しても $a<b$, $a=b$, $a>b$ ◦$a<b$かつ$b<c \Leftrightarrow a<c$ その場合$a<b<c$ ◦有理数の稠密性		◦数の大小と数直線 ◦大小関係の基本事項 2つの数x, yに対して$x<y$, $x=y$, $x>y$ 3つの数x, y, zに対して $x<y$ かつ$y<z \Rightarrow x<z$	

以上の調査をもとにして第II表のように指導内容をきめた。

指　導　内　容　II　表

章	節	内　容	用語と記号	時数	備考
方程式と不等式	条件と集合	◦命題。 ◦命題関数。 ◦命題関数についてその真理集合を全体集合の部分集合としてとりだす。 ◦等式，不等式の解の意味。 ◦文字は変数を表わすものと考え，等式や不等式はその変数に対する条件文とみる。 ◦条件が2つある場合について考え,「から」「または」「でない」などについてしらべる。	真，偽，等式，不等式が成りたつ。成りたたない。 解 $\{x \mid x$の条件$\}$	2	テレビ視聴
	方程式，不等式とその解の集合	◦方程式，不等式の意味。 ◦方程式，不等式を解くことの意味。 ◦変域と解の集合との関係。 ◦方程式と不等式との相互関係。 ◦解の集合を数直線上に表わす。	方程式 解の集合 方程式，不等式を解く	2	テレビ視聴
	方程式の解き方	◦等式の性質を理解し，それを使って方程式の解き方を知る。 ◦方程式を解くとは，等式の性質を用いて同値変形を行ないもっともかんたんな方程式を求めることである。 ◦移項の考えを使って方程式の解き方の手順を形式化する。 ◦やや複雑な方程式を解く。	移項	6	
	方程式の利用	◦方程式をつかって文章題を解く。		6	
不	不等式を解く 不等式の性質	◦不等式を解くことの意味。 ◦変域と解の集合との関係。 ◦解の集合を数直線上に表わす。 ◦不等式の性質。 ◦不等式の性質の利用		3	

章	節	内　　容	用語と記号	時数	備考
等式	不等式の解き方	◦不等式の性質を理解し，それを使って不等式の解き方を知る。 ◦不等式を解くとは，不等式の性質を用いて同値変形を行ない，もっともかんたんな不等式を求めることである。 ◦移項の考えを使って不等式の解き方の手順を形式化する。 ◦やや複雑な不等式を解く。		3	
	連立不等式	◦一元一次不等式を連立させることおよびその解の意味。 ◦連立不等式を解くこと。	連立不等式	2	
	不等式の利用	◦不等式をつかって文章題を解く。		4	

また指導計画は次の通りである。

単元名	指導時期	指導時数	学年
方程式と不等式	昭和47年2月	16	1
不等式	昭和47年4月	12	2

④指導例とその考察

指導例の資料は，すべて生徒にわたした学習プリントにねらいと留意点をそえたものである。

指導例Ｉの１

ねらい　◦命題，命題関数の意味を理解させる。
　　　　◦等式，不等式の解の意味を理解させる。

学習過程　1．つぎの文や式においてそれぞれがつねに正しいものにはa，正しくないものにはb，正しいとも正しくないともはっきりいえないものにはcをそれぞれの（　）内に入れなさい。

① 15は素数である。（　　）
② xは12の約数である。（　　）
③ 東京は日本の首都である。（　　）
④ ある数（ x ）の２倍に６を加えると10になる。（　　）
⑤ △ABCでAB＝ACならば∠B＝∠Cである。（　　）
⑥ $5+3=9$（　　）　$10-3>5$（　　）
⑦ ある数（ x ）の３倍から２をひいた結果は４より小さい。（　　）
⑧ x大学は金沢市にある大学である。（　　）
⑨ ６の倍数はかならず３の倍数である。（　　）

2．上の①～⑨でcの入ったものについてはどうすれば，それが正しいとか正しくないとかはっきりいえるようになるか。

3．④，⑦の文をそれぞれ式に表わしなさい。

まとめ
◦文や式が「真」とは
◦文や式が「偽」とは
◦文や式には

4．つぎの文や式の文字x, y, zにいろいろな数を入れて，それらの文や式が真になるか偽になるかしらべなさい。また真にする文字x, y, zの値の集合を求めなさい。

① 16の24の公約数はxである。
② y角形の内角の和は1080° である。
③ $3x+1=6$
④ z月には日本の祝祭日がある。
④ $y+4<7$

まとめ
◦等式，不等式が成りたつとは
◦解とは

練習問題 1．つぎの文や式の真偽をいえ。

① 3つの角がそれぞれ等しい2つの三角形は合同である。
② △ABCで∠B＝∠CならばAB＝ACである。
③ 4と6の公倍数はかならず24の倍数である。
④ 正三角形は二等辺三角形である。

2．つぎの文や式でそのままでは真偽のはっきりしないものはどれか。

① $x+3=2$　② $16<2+8$　③ 多角形の外角の和は360°である。
④ $28+12=40$　⑤ $\frac{4}{6}$は既約分数である。　⑥ n角形の内角の和は540°である。
⑦ $-3^2=9$　⑧ $2x-3>5$

3．つぎの文や式を真にするx, y, zの値の集合を求めなさい。

① xは$2<x\leqq 6$の整数である。　② $3x=9$　③ $y-3=5$
④ zは10より小さい素数である。　⑤ xは-4より大きい負の整数である。
⑥ 石川県の公立高校の入学試験は例年y月に行なわれる。
⑦ zは8と12の公約数である。　⑧ $x-3>2$

4．つぎの①～④の文や式で右に示してある変数の変域のどの要素を入れると真になるか。

① 金沢市はx県にある｛新潟，長野，富山，石川，福井｝
② xの2倍は6より小さい $\{-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$
③ $2y=6-y$ $\{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$
④ yの対角線は直交する｛台形，平行四辺形，長方形，ひし形，正方形｝

留意点①命題 命題関数といった用語からくる抵抗をさけ,平易な言葉によってその意味することを理解させる。
②等式，不等式を区別せずに命題関数として位置づけ，統一的に把握できるようにする。

③変域は天下り的に与えず生徒と一緒に考える。

④変数を表わす文字はx だけでなく，いろいろな文字がつかわれること。更に変数は数だけでないことを理解させる。

⑤命題でない文や式はここでは扱わない。

考　案

文や式が真であるとか偽であるとはどういうことか，この程度の内容で理解できたと思う。また文や式には真偽のはっきりきまるものと，そのままでは真偽がきまらず，特定の言葉や数をあてはめることによって，その真偽がきまるものとがあることも理解できた。開いた文章というとき，どの言葉について真偽不明になっているかという原因をつきとめさせる。そしてどうすればその真偽がはっきり確定するか考えさせる。この段階を経てx に数や言葉をあてはめればよいことに容易に気づくようだ。テレビ視聴組では問題はおきなかったが，テレビ視聴しなかった組ではつぎの３つのことが問題になった。

① 「東京は日本の首都である。」これを偽と発言した生徒が数名いた。その理由は現在はたしかにそうだが将来はどうなるかわからないから，文の初めに「現在」という言葉を入れる必要があるとのべている。

② 変数xの変域については初めから与えずに生徒自ら考えさせるようにした。その結果「ある数(x)の２倍に６を加えると10になる」では変域を自然数としたもの，整数としたもの，有理数としたもの反応はまちまちである。そこで問題を「ある数(x)の２倍に６を加えると９になる」と変更してそれぞれの変域の場合にどうなるか検討させた。自然発生的に変域と解の集合との関連が浮び上ってきたが，ここでは軽くふれておいた。

③ 「xは12の約数である。」このときの真理集合は｛1，－1，2，－2，3，－3，4，－4，6，－6，12，－12｝とすべきだと発言する生徒が数名いた。ここでも②で問題になった変域を考えねばならないことに気づかせ，変域の必要性を確認した。

指導事例Ｉの２

ねらい
- ◦方程式の定義を知る。
- ◦方程式，不等式の解の集合及び方程式，不等式を解くことの意味を理解する。
- ◦変域と解の集合との関係を理解する。
- ◦方程式と不等式の相互関係を理解する。

学習過程 1．変数xの変域を｛－2，－1，0，1，2，3｝としたときつぎの不等式の解を求めよ。

① $3x-4<-1$　　② $4x>3x-1$

2．変数xの変域を｛0，1，2，3，4｝としたとき，つぎの等式の解を求めよ。

① $3x-5=x+1$　　② $-2x=x-6$

まとめ
- ○不等式の解の集合とは
- ○不等式を解くとは
- ○方程式とは
- ○方程式の解の集合とは
- ○方程式を解くとは

3. 変数 x の変域を $\{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ としてつぎの各問に答えなさい。

① $3x-4<-1$, $3x-4=-1$, $3x-4>-1$ の解の集合を求めなさい。
またそれぞれの解の集合を数直線上に示しなさい。

② $A=\{x \mid 3x-4<-1\}$, $B=\{x \mid 3x-4\geqq-1\}$ とするときAとBの関係をいえ

③ $B=\{x \mid 3x-4\geqq-1\}$, $C=\{x \mid 3x-4\leqq-1\}$ とするとき $B\cap C$ を求む。

4. つぎの方程式，不等式の解の集合を変数 x の変域が（Ⅰ）（Ⅱ）（Ⅲ）の場合について求めよ

① $x+5=4$　② $x+6>5$　③ $2x+3=4$　④ $2x+3<9$

（Ⅰ）$\{-2, -1, 0, 1, 2\}$　（Ⅱ）$\{x \mid x$ は整数$\}$　（Ⅲ）$\{x \mid x$ は有理数$\}$

5. 上の各場合の解の集合を図で表わすにはどうすればよいか。

まとめ

練習問題 1. 変数 x の変域が $\{0, 2, 4, 6, 8\}$ のときつぎの不等式を解け。

① $2x+1<3$　② $13-2x>3$　③ $3x-10>x-4$

2. 変数 y の変域が $\{-5, -4, -3, -2\}$ のときつぎの方程式をとけ。

① $3y-4=5y+2$　② $4y=6+7y$

3. 変数 x の変域が $\{-4, -2, 0, 1, 3\}$ のときつぎの不等式を解け。

① $4-x>3$　② $2x+5<3x+7$　③ $\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}>\frac{1}{3}x+\frac{1}{2}$

4. 変数 x の変域が $\{-1, 0, 1\}$ のときつぎの方程式をとけ。

① $3x-5=x-3$　② $x^2-x=0$　③ $x^3-1=0$

5. 変数 x の変域が $\{x \mid -4\leqq x<0$, x は整数$\}$ のときつぎの方程式，または不等式をとけ。

① $-3x-1<8$　② $3x+x^2<4$　③ $2x+3=-1$

④ $-4x+2=-5x-1$　⑤ $x^2-2x=3$　⑥ $5x<x+2$

6. つぎの方程式，不等式の解の集合を変数 x の変域が（Ⅰ）（Ⅱ）（Ⅲ）の場合について求めなさい。また解の集合を数直線上に表わしなさい。

① $x+4>1$　② $3+4x=5$　③ $x-3<-2$　④ $5x-2=8$

（Ⅰ）$\{-3, -2, -1, 0, 1, 2\}$　（Ⅱ）$\{x \mid x$ は負の整数$\}$

（Ⅲ）$\{x \mid x$ は有理数$\}$

7. 変数の変域を $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ としてつぎの各問に答えなさい。

① $A=\{x \mid 3x+3<x+11\}$ とするとき $\overline{A}$ を求む。また $\overline{A}$ はどんな不等式の解の集合になるか。

② $B=\{x \mid 4x-1\geqq11\}$, $C=\{x \mid 4x-1\leqq11\}$ として $B\cap C$ を求む。また $B\cap C$ はどんな方程式の解の集合になるか。

留意点① 方程式，不等式を解くことの意味を明確にさせるために，変域の要素を有限個にして1つ1つ数を代入してその真偽を調べる方法をとる。

②解の集合がただ1つの要素からなる方程式よりも，いくつかの解をもつ不等式の方から入る。

③方程式については逆算でかんたんに解のわかるものは例題として用いない。

④解の集合の表示法は，この段階では集合の表示を用いる。

⑤解の集合を図示するには数直線を用いると便利であることを気づかせる。そして数直線によって解の集合を視覚的にとらえさせ，自然数，整数，有理数の概念を深めていく。

⑥変域がかわると同じ方程式や不等式でも解の集合がかわること。また解の集合が変域のすべての要素の集合となる場合や空集合になる場合もあることに気づかせていく。

⑦交わり結び補集合等集合に関する事柄は積極的にとり入れていく。

考　察

変数 x に変域の要素を1つ1つ代入してその真偽を調べるといった手続きにはほとんど抵抗はみられなかった。また変域が有限個の要素に限定してあるから，練習問題の中に1次方程式，1次不等式だけでなく二次方程式，二次不等式をとり入れてみたが意味があったようだ。成立させる x の値が1つみつかってそれでやめてしまった生徒が21名丹念に1つ1つ代入して成立させる x の値をきちんと求めた者も24名であった。1次方程式では解の集合の要素が一般には1つであるが，不等式や二次方程式等では解の要素は一般には1つとは限らないことに気づいたようである。解の集合を表わすのに $x=\{3\}$ といった表示をする生徒が12名，空集合の表示ができない生徒が10名いた。いずれも文字 x の意味や集合の理解が徹底していなかったのが原因である。定着させるにはその都度注意して行かねばならない。

方程式と不等式の相互関係はぜひ扱っておくべきだと思う。たとえば変数 x の変域を $\{-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4\}$ として $3x-4<-1$，$3x-4>-1$，$3x-4=-1$ の解の集合を求めさせる。そして $\{x \mid 3x-4<-1\}$ の補集合は $\{x \mid 3x-4\geqq -1\}$ である。つまり $3x-4<-1$ の否定は $3x-4>-1$ ではなくて $3x-4\geqq -1$ である。更に

$\{x \mid 3x-4\geqq -1\} \cap \{x \mid 3x-4\leqq -1\} = \{x \mid 3x-4=-1\}$ であること等が重要なおさえ所である。以上のことを数直線を用いて

$$\{x \mid 3x-4=-1\}$$

$$-3 \quad \underbrace{-2 \quad -1 \quad 0}_{\{x \mid 3x-4<-1\}} \quad 1 \quad \underbrace{2 \quad 3 \quad 4}_{\{x \mid 3x-4>-1\}}$$

のように示すことによって一層理解が深まった。このようにして不等式を背景として方程式の位置づけがはっきり理解されたと思う。

事例Ⅰの1でも問題になったように同じ方程式，不等式でも変域が異なれば解の集合も異なってくる。即ち解の集合は変域の部分集合であることに気づき，変域をつねに意識するように学習が高まってきた。

指導事例Ⅰの3

ねらい　等式の性質を理解させ，方程式を解くには等式の性質が用いられることを理解させる。

留意点①初期の段階では解の意味を理解させるために1つ1つたしかめさせることが大切であったが，この辺りからもっと能率的な解き方がないか。また変域が有理数の集合になると解をみつけることが困難になること等に気づかせその打開等が必要になることを感じさせる。

③等式の性質は天下り的に与えずに動機づけをして生徒自ら発見させるようにする。

④等式の性質を用いて変形された方程式がすべて同値であることを気づかせる。そして方程式を解くことは同値でもっともかんたんな方程式を作り出すことであることを見出させる。

⑤変域の要素を有限個にして以上のことを扱い，有理数が変域になったときは類推で扱う。

学習過程

①下の表に x のそれぞれの値に対して成りたつものに○成りたたないものに×を入れなさい。

変数 x の値	(A) $3x+2=x$,	(B) $3x+2+3=x+1$,	(C) $3x+2+5=x+5$,	(D) $3x+2-3=x-1$,	(E) $3x+2-4=x-4$
-3					
-2					
-1					
0					
1					

㋑解の集合の一致するものはどれか。

㋺何故一致したか理由を考えなさい。

練習問題つぎの①～⑥の方程式で $3x=2x+5$ と解の集合が一致するものはどれか。またその中でもっともかんたんな方程式はどれか。ただし変数 x の変域はすべての有理数の集合とする。

①$3x+2=2x+6$　②$3x+4=2x+9$　③$3x-1=2x+4$

④$3x-3=2x+1$　⑤$2x=5$　⑥$x=5$

②下の表に y のそれぞれの値について成りたつものに○，成りたたないものに×を入れなさい。

変数 y の値	(A) $4y+6=10$,	(B) $8y+12=30$,	(C) $8y-12=20$,	(D) $2y+3=5$,	(E) $2y+3=2$
$-\frac{1}{2}$					
1					
2					
$\frac{9}{4}$					

㋑解の集合の一致するものはどれか。

㋺何故一致したか理由を考えなさい。

練習問題　次の①～⑤の方程式で $3x=-9$ と解の集合の一致するものはどれか。またもっともかんたんな方程式はどれか。ただし変数 x の変域はすべての有理数の集合とする。

①$6x=-18$　②$12x=-27$　③$x=-3$　④$\frac{1}{2}x=-1$　⑤$\frac{1}{3}x=-1$

まとめ

考　察

方程式，不等式の変形において大切なことは，解の集合が不変に保存されるということである。即ち方程式，不等式の同値関係を解の集合の保存性と表裏一体の関係として指導して行かねばならないと思う。そこで解の集合が未知の状態において，いかに解の集合の不変を理解させるかが問題である。ここに各社の扱いがどうなっているかⅠ表をみていただきたい。それぞれ工夫のあとがみられる。理論的な展開はいうまでもなく無理である。だとすれば具体性をもたせて一般化をはからねばならない。この観点にたって上にのべた事例Ⅰの3で指導した。解の集合の一致したものと一致しないものとを比較することによって容易に等式の性質が見出された。形式化を急いで天下り的に等式の性質を与え，それを用いて直ちに方程式の解き方に入るよりも，上の指導法では時間はかかる。しかし等式の性質を見出し，それを用いての変形が同値変形をしているのだという意

識が常に存在している。たとえば$4x=2x+8$—①　$2x=8$—②　$x=4$—③で①②③はいずれも同値で③の方程式がもっともかんで解がすぐわかる。だから①から③に到るのに等式の性質をどのように利用すればよいかに着目することによって能率的な解き方へと発展していくと思う。このように原理や意味の理解のおさえをしたあと，従来の指導法で展開した。

指導事例IIの1

ねらい　◦不等式の性質を理解させる。

学習過程　1.　等式の性質$a=b$ならば$a+c=b+c$，$a=b$ならば$a-c=b-c$。不等式の場合はどうなるだろうか。

$a>b$ならば$a+c$と$b+c$の大小関係はどうなるだろうか。

$a>b$ならば$a-c$と$b-c$の大小関係はどうだろうか。

それぞれの結果を予想させる。

2.　結果の予想がそれぞれ正しいことをどうしてしらべたらよいだろうか。

3.　練　習

①　$a<b$のとき次の□の中に不等号を入れて，大小を示しなさい。

㋑　$a+2$ □ $b+2$　　㋺　$a-4$ □ $b-4$　　㋩　$b-a$ □ 0

②　下のような大小関係があるとき，aとbの大小をいいなさい。

㋑　$a+7<b+7$　　㋺　$a-8>b-8$　　㋩　$a+3m<b+3m$

㋥　$a-b<0$

4.　等式の性質$a=b$ならば$ac=bc$，$a=b$ならば$\frac{a}{c}=\frac{b}{c}$，不等式の場合はどうなるだろうか。

$a>b$ならばacとbcの大小関係はどうなるだろうか，

$a>b$ならば$\frac{a}{c}$と$\frac{b}{c}$の大小関係はどうなるだろうか，

それぞれの結果を予想させる。

5.　結果の予想がそれぞれ正しいことをどうしてしらべたらよいだろうか。

6.　練　習

①　$a>b$ならば次の□の中に不等号を入れて，大小を示しなさい。

㋑　$3a$ □ $3b$　　㋺　$-5a$ □ $-5b$　　㋩　$\frac{a}{7}$ □ $\frac{b}{7}$　　㋥　$-\frac{a}{4}$ □ $-\frac{b}{4}$

㋭　$-a$ □ $-b$

②　次のような大小関係があるとき，aとbの大小をいいなさい。

㋑　$6a>6b$　　㋺　$-2a>-2b$　　㋩　$-\frac{3}{4}a<-\frac{3}{4}b$　　㋥　$\frac{2}{3}a<\frac{2}{3}b$

まとめ

練習問題　1.　$a<b$のとき次の□の中に不等号を入れて大小を示しなさい。

①　$a+1.8$ □ $b+1.8$　　②　$a-\frac{4}{5}$ □ $b-\frac{4}{5}$　　③　$a-b$ □ 0

2.　$x<y<z$のとき次の□の中に不等号を入れて，大小を示しなさい。

① $x+5$ □ $z+5$　　② $y-3$ □ $z-3$　　③ $x-7$ □ $-7+y$

④ $2+z$ □ $2+x$　　⑤ $x+y$ □ $2y$　　⑥ $y-z$ □ 0

3.　$a<b<0$の関係があるとき，つぎの2数の大小関係を不等号を用いて表わせ。

① $-3a$ □ $-3b$　　② $-\frac{a}{6}$ □ $\frac{b}{6}$　　③ $5\times|a|$ □ $5\times|b|$

④ $-ma$ □ $-mb$（ただし$m<0$）　　⑤ $\frac{by}{x}$ □ $\frac{ay}{x}$（ただし$x>0$，$y<0$）

4.　つぎの各場合についてaとbの大小関係をいえ。

① $a+2<b+2$　　② $a-5>b-5$　　③ $a-m+3<b-m+3$

④ $2a>a+b$　　⑤ $a+2<b+1$　　⑥ $a-5>b-2$

⑦ $2a+b\geqq a+2b$

留意点。等式の性質を想起させて，これを手がかりとして不等式の性質をとりあげる。

。結論は与えずに予測させる。検証の方法もいろいろな方法を考えさせる。

。不等式の性質の中でもとくに$a>b$，$c<o$ならば$ac<bc$，$\frac{a}{c}<\frac{b}{c}$であることに十分注意して徹底をはかる。

。具体から一般への過程を重視して扱う。

。練習は結果だけでなくつねに理由をのべさせながら扱う。

。易しい基本問題から段階的に徐々に高めた問題を用意し徹底をはかる。

考　察

和，差の場合はほとんど問題なく予測は正しいものがでる。しかし$a>b$ならばacとbcの大小となるとその予測は必ずしも一様ではない。$ac>bc$というもの，$ac>bc$または$ac<bc$というもの$ac>bc$または$ac=bc$，または$ac<bc$というもの授業は活発になる，教師の方から一方的にあたえてそれを調べるといった形態の授業よりも問題点がはっきりうきぼりにされ，調べてみようという意欲が湧いてくる。まちがった生徒にとってはとくによいミスとなる。検証の方法として，a，b，c，に具体的な数を代入して調べるとよいという反応がすぐかえってくる。各自の予測が正しいか自由に具体例を出させ確認したあとつぎの例をとりあげた。つぎの各問で□に不等号または等号を入れなさい。

$5>3$	$-2<4$	$-8>-6$
5×2 □ 3×2	-2×2 □ 4×2	-8×2 □ -6×2
5×1 □ 3×1	-2×1 □ 4×1	-8×1 □ -6×1
5×0 □ 3×0	-2×0 □ 4×0	-8×0 □ -6×0
$5\times(-1)$ □ $3\times(-1)$	$-2\times(-1)$ □ $4\times(-1)$	$-8\times(-1)$ □ $-6\times(-1)$
$5\times(-2)$ □ $3\times(-2)$	$-2\times(-2)$ □ $4\times(-2)$	$-8\times(-2)$ □ $-6\times(-2)$

このような指導のあと数直線での説明に入った。指導法に問題があったかも知れないが数直線を用いての説明に気づいた生徒は少なかった。数直線上にならぶ数の大小関係から不等式の性質が説明されるわけである。

$-3a$は$3a\times(-1)$だから-1をかけることは数直線上でいうと0を中心として対称移動することである。このことには気づきにくかった。しかし一度理解されればより進んだ検証の方法であるというよさが理解できたと思う。各社の教科書をみても数直線をとり入れているものは少なく，更に上にのべた方法で説明してあるのは一社だけである。第2限目に図形の検証の方法を想起させ，このような立場で不等式の性質を証明できないかと導入し扱ってみた。公理的な扱いをするものとこれを用いて証明しようとする内容が同じ程度に自明な内

容としか認識できないため，予想したように証明できたという満足感が余りみられなかった。ただ ac と bc の大小関係の証明のところでなるほどと満足した雰囲気が感じられたのが救いであった。不等式の性質指導後その定着をはかる意味で適切な練習問題を吟味し用意することが必要である。不等式の性質を用いて $a>b$, $m>n$ ならば $a+m>b+n$, $a>b>0$, $m>n>0$ ならば $am>bn$ 程度の証明を考えさせる方がより興味をもち成功感がえられたように思う。また $a>b$ ならば $a^2>b^2$, $\frac{a}{b}>\frac{d}{c}>0$ ならば $ac>bd$ が成立するかどうか。成立しないときはその反例をあげさせるといった程度の問題も興味をもって学習する。そして文字に対する見方も一層深められておもしろい。不等式の解き方，連立不等式については紙面の都合で省く。以上の指導の後つぎの問題をあたえて調査した。

調査問題 I（調査人数45人）

1. つぎの例にならって上の不等式から下の不等式を導くすじみちを説明しなさい。

例 $\begin{cases} 3a-4 \geqq 2 & \text{——①} \\ a \geqq 2 & \text{——②} \end{cases}$　　㋑ $\begin{cases} -4x+3<-5 & \text{——①} \\ x>2 & \text{——②} \end{cases}$　　㋺ $\begin{cases} x \leqq -1 & \text{——①} \\ 3x+2 \leqq -1 & \text{——②} \end{cases}$

①の両辺に 4 を加えて $3a \geqq 6$

両辺を 3 でわって $a \geqq 2$

2. つぎの不等式を解きなさい。またその解の集合を数直線上に表わしなさい。

㋑ $-3x-4<x+2$　　㋺ $3(6-2x)-4(3+x)>0$　　㋩ $\frac{2x+5}{4}-\frac{x-1}{3} \geqq 1$

3. つぎの連立不等式を解きなさい。

㋑ $\begin{cases} 4x+5<2x+7 & \text{——①} \\ x \geqq 4x+3 & \text{——②} \end{cases}$　　㋺ $\begin{cases} 3x-5 \geqq 2x-3 & \text{——①} \\ 2-2x \geqq -x & \text{——②} \end{cases}$　　㋩ $\begin{cases} 3x-2>5x & \text{——①} \\ 3x-5 \leqq 4x-7 & \text{——②} \end{cases}$

4. A，B，Cがそれぞれ次のような集合のとき下の各問に答えなさい。

$A=\{x \mid 3x+1>7\}$　　$B=\{x \mid 5 \geqq 2x-5\}$　　$C=\{x \mid 3x+6 \leqq 2x+5\}$

㋑ A，B，Cをそれぞれ数直線上にあらわしなさい。

㋺ BとCの関係を記号を用いてあらわしなさい。

㋩ A∩Bを求めなさい。

5. ㋑ つぎの集合Aを要素をかきならべて示しなさい。ただしNは自然数の集合である。

$A=\{x \mid -5x+8>-3x,\ x \in N\}$

㋺ つぎの集合Bを要素をかきならべて示しなさい。ただし変域を｛－2，－1，0，1，2，｝とする。

$B=\{x \mid 3x+4<5x+6\}$

㋩ つぎの 2 つの不等式を同時に成立させる x の値のうちで，整数であるものをすべてあげなさい。

$\begin{cases} 3x \geqq -x-28 \\ 5(x+1)+2<3x+2 \end{cases}$

6. $a>b$, $x>y$ であるとき，つぎの不等式のうちでつねに成立するものには○印，成立しないものには×印をつけ，その反例をあげなさい。

㋑ $a-x>b-y$　　㋺ $x-b>y-a$　　㋩ $ax>by$　　㊁ $a^2>b^2$

調査結果　Ⅲ 表

問題		正答率	問題		正答率	問題		正答率	問題		正答率	問題		正答率	問題		正答率
1	㋑	91%		㋺	89%	3	㋑	68%			89%	5	㋑	89%		㋺	89%
	㋺	91%			89%		㋺	75%			98%		㋺	80%		㋩	80%
2	㋑	91%		㋩	82%		㋩	73%		㋺	73%		㋩	57%		㋥	84%
		82%			82%	4	㋑	91%		㋩	68%	6	㋑	89%			

考　察

指導した内容についての理解のようすは，調査結果からみれば一応理解できたものと思う。不等式を解く段階になれば，もうほとんど心配することはない。ただこの調査では連立不等式の解法が少し正答率が悪かった。

不等式の利用については，全く新しい内容なので生徒のつまづきがどこにあるが，指導上の留意事項にどんな事柄があるか未知の状態である。そこで指導に入る前に調査を行なった。その調査問題及びその結果はつぎの通りである。

調査問題Ⅱ（調査人数45人）

1．鉛筆を兄は36本，弟は7本もっている，兄は自分のもっている鉛筆を何本か弟に与えたがなお兄のもっている鉛筆の本数は弟のもっている鉛筆の本数の3倍より多いという。兄が弟にあたえた鉛筆は何本であったか。

2．現在母の年齢と子の年齢との合計は46歳である。現在は母の年齢は子の年齢の4倍以上であるが，10年後には母の年令は子の年齢の2.5倍以下になるという。現在の母の年齢，子の年齢はそれぞれ何歳か。

3．ある肉屋で1kg1200円のぶた肉4kgと1kg1500円の牛肉をまぜて，ひき肉を作ることにした。ひき肉は6kg以上，代金は9300円以下にしたい、牛肉をまぜてよい範囲を求めなさい。

4．ある会の会費を集めるのに1人100円ずつ集めると200円余り，95円ずつ集めると20円未満の不足になるという。この会の人数は何人か。

5．くだものを箱につめるのに1箱に14個ずつつめるとくだものが36個余り，1箱に20個ずつつめると最後の1箱だけ10個未満になるという。箱の数を求めなさい。

調査結果〈Ⅳ表〉

問題	正答率	誤　答　例　（）内は人数
1	53%	解の吟味(18)〔3本(3)，3本未満(4)，｛3,2,1｝本(3)，$3\frac{3}{4}$本より小(2)，3本2本1本0本(3)
2	20%	立式のあやまり(18)〔等号のぬけたもの(8)，後半の条件(8)前半の条件(2)〕 計算のあやまり(3)，解の吟味(5)，
3	47%	立式のあやまり(19)〔等号のぬけたもの(8)，代金の関係のみ(5)〕 計算のあやまり(2)，
4	7%	一方だけ立式できているもの(26)〔$100x-200<95x+20$(13)，$100x-200-95x<20$(11) $100x-95x<220$(2)〕 $\begin{cases}100x-200<95x+20\\100x-200-95x\geqq 0\end{cases}$ (1) $\begin{cases}100x-200-95x<20\\100x-200<95x\end{cases}$ (1)
5	2%	一方だけ立式できているもの(17)〔$14x+36-20(x-1)<10$(5)，$14x+36<20(x-1)+10$(9) $14x+36<20x-10$(2)，$14x+36>20(x-1)$ (1)〕 $14x+36>20(x-1)+10$ (9) 無答(19)

各問の正答率とくに(4)，(5)をみてもわかるように，不等式に関する文章題には非常に大きな抵抗がある。その第１は大小関係に着目して立式する事の困難さである。正答率のとくに悪かった(4)(5)の誤答例をみてもわかるように「20円未満不足」,「最後の１箱だけ10個未満になる」これらの条件をどう不等式に表示するかに問題がある。また(5)の誤答例$14x+36>20(x-1)+10$のように２つの量の大小関係が容易に判定つきにくい困難さもある。(2)(3)の誤答例にあるように以上，以下のことばの式表示を誤った生徒が２割近く出たのは意外でした。第２は解の吟味に抵抗がみられたことである。一次方程式,連立方程式の場合は，題意に適するかどうか比較的容易に判定できるものが多い。(5)で$14x+36<20(x-1)+10$を解き$x>7\frac{2}{3}$ xは自然数であるから８箱以上と答えている生徒が16人もいた。

以上の調査結果をもとにして不等式の利用に４時間かけた。その１つが指導事例IIの２である。

指導事例IIの２

ねらい　不等式を利用して具体的な問題を手ぎわよく解決できるようにする。

留意点　調査結果からえられた困難点をとくに留意して扱う。

学習過程「くだものを箱につめるのに１箱に14箱ずつつめるとくだものが36個余り１箱に20個ずつつめると最後の１箱だけは10個未満になるという。箱の個数を求めよ。」

①問題にふくまれている条件をとり出す。

②問題にふくまれている未知の量に何があるかとり出す。

③それらの数量の間の関係を調べる。

④どんな量を変数にえらべばよいか。ここで変数xの変域を考えさせる。

⑤「１箱に14個ずつつめるとくだものが36個余る」この条件から
箱の数をx箱としたときはくだものの個数，くだものの個数をx個としたときは箱の数をそれぞれxの式で表わす。

⑥「１箱に20個ずつつめると最後の１箱だけは10個未満になる」この条件を図示して最後の１箱に入るくだものの数を，xの式で表わす。（xは箱の個数）

$$\underbrace{\boxed{20}\quad\boxed{20}\quad\boxed{20}\quad\cdots\cdots\quad\boxed{20}\quad\boxed{20}}_{(x-1)\text{箱}}\qquad \underset{14x+36-20(x-1)}{\underset{\downarrow}{\boxed{}}}$$

⑦「最後の１箱だけは10個未満」ということは，最後の１箱に入るくだものの数の集合が１以上９以下の自然数の集合であることを見出させる。

⑧以上のことから不等式を作らせる。

⑨不等式を解き，解の吟味を行なう。

⑩不等式の利点を考えさせる。

考　察

等値関係は着目する量が変わっても把握しやすいが，不等関係は着目する量によって大小関係がかわるので把握しにくい。だから大小関係を理解させていくためにつぎのよう扱った。たとえば「120さつの本を１人に6さつずつ与えると８さつ以上不足する」人数をx人とすると不足した本の数は（$6x-120$)さつこれが８さつ以上だから$6x-20\geqq 8$とした方が理解しやすい。ところが一次方程式で「１人に６さつ与えると８さつ不足するが……」といった応用問題で人数をx人とするとノートの数は（$6x-8$）さつといった考え方をしてきている。この考え方で$6x-8$と120の大小関係となると直ちに判定しにくい生徒が多い。また$120-6x\geqq -8$と誤る生徒がいる。「最後の１箱だけが10個未満」という場合も展開例のように最後の１箱に入るくだものの数

をxの式で表わして不等式を作らせる方がわかり易い。最後の1箱だけは10個未満というとき最後の箱が空の場合も考えて

$$0 \leqq 14x+36-20(x-1)<10$$

とする生徒も2割ほどいた。等号を入れるべきかどうかで話し合った。つぎに変数をきめた時点で記述するしないは別として変域をはっきりおさえておくことが大切である。教科書によっては立式と同時に変域もはっきりと記述させているものもある。また最後に必ず解の吟味をする態度を育成しておかねばならない。

不等式の応用問題でたとえば「A君の6月の貯金高は2,500円である。7月から毎月350円ずつ貯金することにすると貯金高が5,000円をこえるのはいつか」といった種類の問題では不等式のよさというものが理解されないと思う。事例の問題で最後の1箱だけ10個未満という条件から$14x+36-20(x-1)=1$から始まって9この方程式を作って解いても答はえられる。しかし不等式を用いて解いたときと比較して不等式のよさが理解されると思う。このように不等式を利用するよさ，必要性のわかる適切な問題とはどんな条件をそなえたものか更に検討してみなければならない。

5 むすび

この実践を通して前述した目標について，考察のところで述べてきたように，いくつか解明できた面があった。しかし指導内容でむだな点があったりして時間がかかりすぎたきらいがあったようにも思える。方程式，不等式を統一的にとうえるために命題とその真偽ということにふれたが，それをもち出さなくても，すっきりした形で展開できるのではないだろうか。解の意味を強調するあまり，変域をあたえて1つ1つ数を代入して真偽を調べるやり方がややくどかったようにも思える。この辺りももう少し工夫を要する。$3x+2=x+10$ 移項して$2x=8$，$x=4$この変形ではxがあるきまった数を表わすのだとみれば明らかであるが，xを変数とみたときどうすればよいか指導上の問題点として工夫した。しかし生徒の動きをみていて思ったほど抵抗がなかったように思える。不等式の応用問題のおさえどころがもっとも問題が大きかった。今後更に前述のねらいがいくらかなりとも達成されるよう研究を進めていきたい。

参考文献

中学校数学教育現代化全書	大野清四郎	金子書房
	川口　廷	
	中野　昇	
	原　弘道	
数学・方程式・不等式	仲田　紀夫	近代新書
数学教育現代化の実験的指導	東京教育大付属中学校数学科	近代新書
新しい数学教育	文部省	大日本図書