軌跡指導について

天　川　義　昭

（一） はじめに

改訂指導要領で「点の運動」と「作図」が1つの項目として掲げられている。作図の方は従来は図形教材全体にわたって随時指導されていたが，今度はこれらをまとめとして，更に軌跡の応用として設けられている。点の運動は殆んど取り扱われていなかったといっても良い。

中学生にふさわしい軌跡・作図の指導はどうあるべきか。私は時間の余裕をみて試みに実際に指導してみた。以下主として軌跡について些細な指導の記録をふり返って気の付いた点を挙げてみたいと思う。

指導の時期は第3学年2学期末

時間配当は軌跡に11時間，作図に6時間

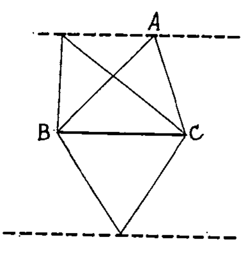
（二） 軌跡の定義について

殆んどの教科書は「軌跡」という用語を用いていない。「動く点はどんな図形をえがくか」とか「どんな線の上を動くか」となっている。

私は文章を簡明にするため次のように定義した。「点がある一定の条件に従って運動するとき，その点のえがく図形をその点の軌跡という。」

これについて次の例で質問がでた。

〔例1〕 定線分BC（5cm）を底辺とする△ABCの面積（10cm²）を変えずに頂点Aを動かすとき点Aの軌跡を求めよ。



ここで△ABCの頂点Aの軌跡がBCの片側にある1つの平行線であることはすぐ解答されたがそのあと次々とかわされた生徒間の討論の様子を挙げてみよう。

(1) Aの軌跡はBCの下側にもあると思う。

(2) しかし軌跡とは点の運動した跡なのだからそのとき上から下へ動く途中はどうなるか。

(3) それは△ABCをBCを軸として回転すればよい。

(4) それでは軌跡は曲面になってしまう。

(5) それなら軌跡は円柱の側面のようなものといえばよい。

(6) そうすると基本軌跡も円柱の側面のようなものと訂正しなければならない。

(7) 軌跡というのは平面図形だけで考えているのではないか。

(8) とすれば上から下への途中はポンと飛んでいくのか。途中はいわなくてよいのか。

これらの問題は軌跡の定義の仕方に帰着する。又軌跡という用語を用いなくても起り得ることであろう。

一般的な定義は数学事典によれば「一定の条件に適する全ての点の集合」となっている。即ち数学的には「条件に適する点の集合」であるが常識的には「運動した跡」である。前者の集合としての定義は近世数学の重要な考え方であるが静的な表現で生徒にとって軌跡らしさが感じられない。それに反し後者は動的な表現でわかり易く親しみ易いと思われる。又指導要領や教科書では「点の運動」という見出しをつけている。従って現在の中学校においては，このようなことを初めから余り厳密に考えさせる必要はないと思う。質問がでたときに，それに応じて考え方を説明すればよいと思う。

（三） 基本軌跡について

中学校では一応次のものが考えられている。

a　直線となるもの

(1)　定直線から一定の距離にある点の軌跡

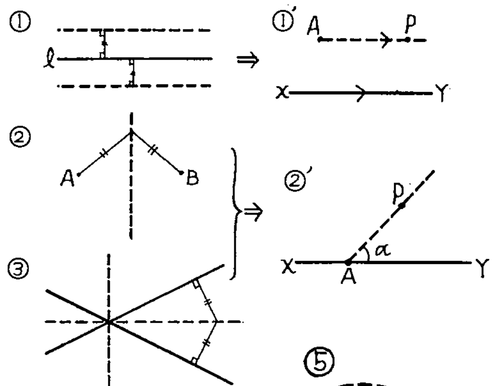
(2)　2定点から等距離にある点の軌跡

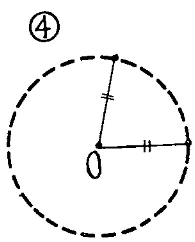
(3)　交わる2定直線から等距離にある点の軌跡

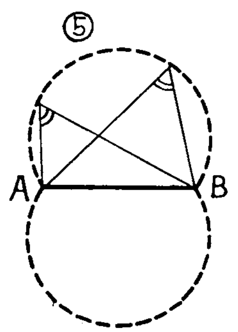
b　曲線となるもの

(4)　定点から一定の距離にある点の軌跡

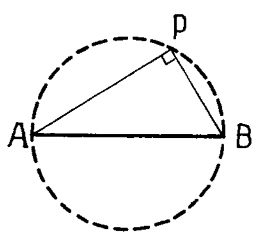
(5)　定線分を一定の角でみる点の軌跡



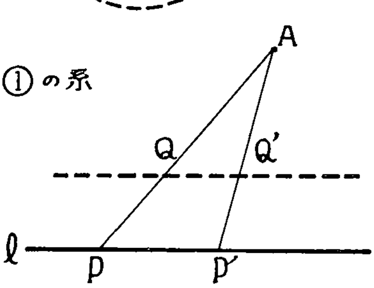




⑤の系



①の系



各教科書の大部分はこの5つであるが「学図」は決定条件として(1)を定直線XY外の定点Aから動点PをみてPA//XY，(2)及び(3)を定直線XY上の定点Aから動点Pをみて∠PAY＝α（一定）としている。これはまとめとしてはすっきりしているが文章表現が困難であり，又(2)と(3)と分けた方が垂直二等分線や，角の二等分線等既習事項と関係をつけて説明できるので生徒にとって分り易いと思う。しかし問題によっては「学図」のまとめ方が都合のよいこともある。

私はこれらの他に次のものを挙げておいた方が便利だと思う。

(1)の系として，定点と定直線上の動点を結ぶ線分を一定の比に内分（外分）する点の軌跡，(5)の系として，定線分をみる角が直角である点の軌跡

練習問題の中にこれらを利用する問題が多いこと，及び2年，3年で学んだ相似の位置や円の性質と関係が深く説明するのに都合がよいと考えられるからである。

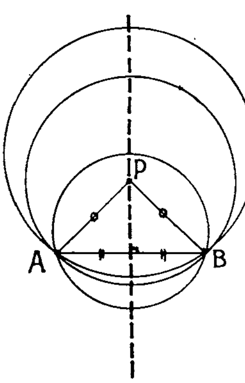
（四） 結論の述べ方について

図形教材全般にいえることだが数学的用語及び記述の方法が不完全であることをこの指導全体にわたって強く感じた。

(1)　簡潔な表現　簡単なことだが例えば

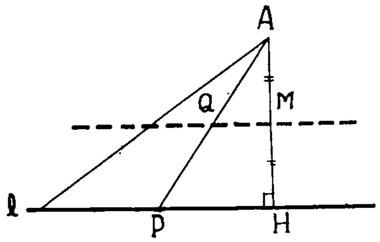
〔例2〕　2定点A，Bを通る円の中心の軌跡

一般には（線分ABの垂直二等分線）とするが，生徒は（ABの中点を通る垂直な直線）とか（ABの真中からABに直角な直線）のように垂直二等分線という用語を忘れている。



〔例3〕　定点Aと定直線 l 上を動く点Pとを結ぶ線分APの中点Qの軌跡

一般には（Aからlに下した垂線AHの中点を通り l に平行な直線）とか（Aから l に下した垂線

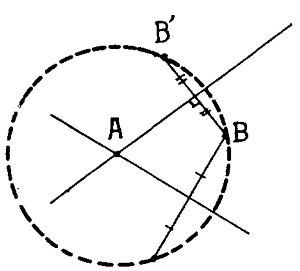


AHの垂直二等分線）とするが，生徒は（lに平行で高さが丁度lとAPが直角になったときの半分である直線）のように自分の考えていった思考過程そのままを文とする。

(2) 位置の決定について

次に図形の位置を示さぬ場合が多いのが目立った。

〔例4〕 定点Aを通るいろいろな直線に関して定点Bと対称な点B′の軌跡

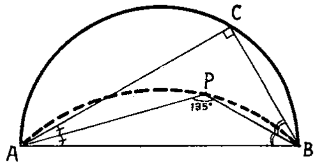


この場合生徒は（ABを半径とする円）というように大きさのみを表わして位置を示してない。例3のときでも（lに平行な直線）とだけかく。この種の誤りは非常に多く，特に円の場合など中心を示さないのが40%いた。同じことが弓形の弧の場合にもいえる。これらは今まで学んだ論証問題が形のみを問題にしてその位置については余り考えなかったためと思われる。

(3) 動点を用いてのべる

次に結論を動点を用いて述べる傾向が多いことである。例2では（∠APBの二等分線）例3では（Qを通りlに平行な直線）などである。動くものをもとにして固定された図形の位置関係を示してよいかどうか再三話し合ったが，なかなか徹底しない。又文章表現が困難なためと考えられる場合もある。例えば〔例5〕定線分ABを直径とする半円周上を点Cが動くとき∠CAB，∠CBAの二等分線の交点Pの軌跡。

では一般には（ABを弦とし135°を含む弓形の弧）とするが，生徒は（∠APBを含む弓形の弧とか（△APBの外接円）又は（APB）とする。これらは数学独自の用語，表現の典型的なもので，角αでみるとか角αを含むといった余りなじめない使いにくい表現を嫌うものと思う。勿論その点Pを固定し，特殊点（定点）と考えさせるのも又むずかしいことと思う。従って現在の段階では余り極端なものは注意しなければならぬが例3の（APの中点を通りlに平行な直線）の程度は仕方がないのではないかと思う。



（五） 証明について

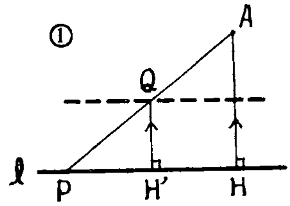
軌跡の証明は一般には順の証明（条件Mに適する点は図形K上にある）と逆の証明（図形K上の点は条件Mに適する）の２つをもって完全解とされる。然し中学校の段階ではまず第１にこの２つの必要性が理解しにくいこと，第２に軌跡の限界を明示すれば逆証をしなくても求められる場合が多い等の理由から順の証明だけで充分であることは当然だと思う。今までの論証問題が，この逆の証明形式になっている訳だから，させてできないこともないと思うが，その代用として限界をはっきりさせる程度はした方がよいと思う。

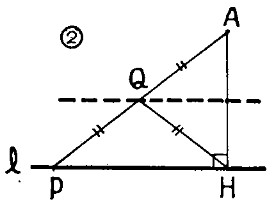
さてその証明形式は基本軌跡に帰着させるのが良いと思われるし，又教科書の問題の大半はこの種の形式をとっている。

次に，実際に生徒が証明していくときの考え方について目立つ点を二三挙げてみよう。

(1)〔例３〕について生徒の解答を４つ記してみる。

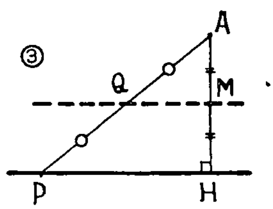
① A，Qよりlに垂線AH，QH′を下すと，QがAPの中点 QH′//AH よって中点連結の定理より $QH'=\frac{1}{2}AH$…（一定）∴基本軌跡(1)よりQの軌跡はlより$\frac{1}{2}$AHの距離の平行線



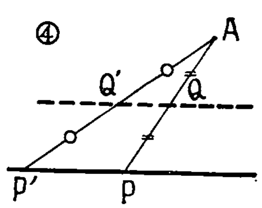


② △APHで∠H = 90°, Qは斜辺APの中点，よって直角三角形の定理より，AQ＝QH　∴基本軌跡(2)よりQの軌跡はAHの垂直二等分線

③ AHの中点をMとすればQはAPの中点，MはAHの中点，よって中点連結の



定理より QM//PH ∴Qの軌跡はAHの中点Mをとおり l に平行な直線



④ l 上の2点をP，P′，AP，AP′の中点をQ，Q′とすると中点連結の定理より

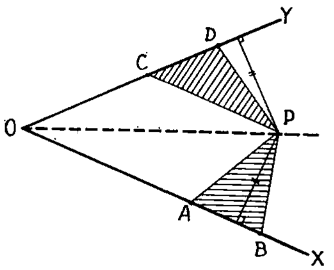
QQ′//PP′，∴Qの軌跡は APの中点Qを通り l に平行な直線

ここで①②は問題ないと思うが③は基本軌跡と結びつかない訳であって，「学図」の教科書が示す決定条件(1)を無意識で用いたこととなる。次に④の場合だが，条件に適する点を2，3とったらすぐ中点連結の定理が頭に浮んできてかき出したものだろう。これは軌跡の述べ方とも関係があり検討しなければならぬが生徒にとってみれば無理ないことだろう。

(2) 次に逆証のみをする場合である。

〔例6〕

∠XOYの各辺上に等しい長さの定線分AB，CDがある。∠XOY内の点Pをとり△ABP＝△CDPとするとき点Pの軌跡。



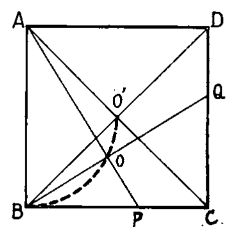
この場合生徒は∠XOYの二等分線上の点をPとすれば△APB＝△CDPとなる，即ち図形K上の点が条件に適するという逆証のみをするのが16%いた。この種の解答は条件に適する点を作図することが一見困難に感ずるとか，面倒だとか，或は直観的に解答が先にわかってしまうような問題に多い。そして作図してからその上の点について条件に合っているか確かめているのである。勿論このとき，その順逆の関係は知らぬ筈であり，私はこれでも良いと思っている。

(3) 次に 特殊な 点の 説明だけをする 場合である。

前述のような直観的に解答の予想がたつ問題は興味が少ないので，条件に適する点を沢山とってみないとどんな図形になるかわからない問題を出す訳だが，すると学習態度は楽しそうだが例えば

〔例7〕 正方形ABCDの辺BC上に点P，辺CD上に点Qをとり，BP＝CQとするときAPとBQの交点Oの軌跡

で，△ABP≡△BCQ から ∠AOB＝90° よりOはABを直径とする円周上にあるが，P，Qが各々C，Dに一致したとき即ち対角線の 交点 O′ が境界と



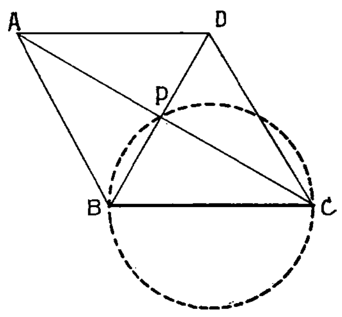
なる。ところがこのように図が複雑になると，往々にして特殊点のみ説明することがある。この問題ではその特殊位置O′ について ∠AO′B＝90° からABを直径とする 円の一部とする訳である。これは大体成績の下位の生徒に多かった。即ち点を沢山とることによって解は大体わかるが一般の点についての証明が困難なためと思われる。

(4) 次に軌跡の限界についてだが，これは最初心配 した 程問題はなかった。 大部分の 問題は 90%〜100%例7の 程度で80%が 正しく限界を示している。その反対に軌跡の追跡が不完全なものが目立った。例えば

〔例8〕 定線分BCを一辺とするひし形の対角線の交点Pの軌跡

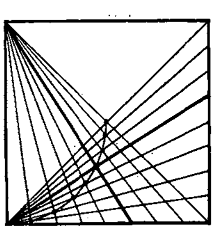
ひし形の対角線は直交するから∠BPC＝90°

となりＢＣを直径とする円（中学校の段階ではＢ，Ｃを含めるかどうかについては考えなくてもよいと思う）となるが生徒の解答にはその片側（半円）だけのものが多い。これはひし形という図形を動かしていくために四辺が一直線上になったときで終らせてしまったのであろう。



さて軌跡の指導直後，生徒の感想にもあったが，（作図するのは楽しいが説明するのがむずかしい）とか成績の上位の生徒でも（理由はわかっているのだが，どのように説明したらよいのか，その言いまわし方がわからない）というのが多い。

これは今までの論証問題が（図形Ｋ上の点は条件Ｍに適する）の形式で，固定された図形について定められた事柄を証明するのに対して，軌跡の証明は移動している点の間に一定の関係を見つけるのである。即ちこのとき生徒のうける抵抗は代数教材で決定された数の関係から一般的な函数関係に入るときにうけるのと同じもののように感じられる。



従ってこの場合，数値を入れた決定問題で練習するとか又は数多くの点をとることによって帰納的にその関係を予想させたらよい。又そのとき図が複雑になるので，その１つを固定させ，その線を作図線より太くかかせて目立つようにするのも１つの方法であろう。

そして特殊位置，極限位置をとって定点とか定直線と結びつけて考えさせれば良いと思う。

その他の曲線については放物線，双曲線，楕円 Involute, Spiral, Cycloid 等があるが，あまり深入りしない方がよいと思う。時間的に余裕があれば，放物線，双曲線についてその定義と１学期に学習した二次函数との関係を考察させたら面白いと思う。

作図については紙面の都合で割愛したい。

（六）まとめ

(1) 軌跡の定義は常識的なもので良い。

(2) 基本軌跡　a）既習事項と関係をつける。
　b）必要に応じて随時設けたら良い。

(3) 用語・記述　a）１・２年から用語指導，簡潔な表現の指導が必要である。
　b）図形の位置の決定について注意させる。

(4) 証明　a）順の証明と限界を示すだけで良い。
　b）動点を用いて説明したり結論を述べるのは中学生として無理がない。

(5) 作図　従来の作図を軌跡の立場からふりかえって見る。

(6) 全体的に既習の学習内容が総括されて利用されるので３年間の復習として活用したい。

最後に図をかく楽しみを失なわないように心掛けたいものだと思う。