パスカルの三角形の考察

—二項定理の理解を深めるために—

数学科　川谷内　哲二

二項係数に関する等式は，主に二項定理を利用して取り扱うが，生徒の理解が十分でない。そこで，パスカルの三角形を考察することによって，二項定理の理解を深めることをねらいとした。本稿は，パスカルの三角形から規則性や性質を発見し，それが正しいことを証明することをテーマとして取り組んだ授業実践の報告である。

キーワード：パスカルの三角形　二項定理　二項係数

1．はじめに

新学習指導要領では，二項定理が，数学A（場合の数と確率）から数学Ⅱ（いろいろな式）に変更された。内容および取扱いについては変更がない。

教科書で扱われている二項係数に関する等式には，

① ${}_nC_0+{}_nC_1+{}_nC_2+\cdots\cdots+{}_nC_{n-1}+{}_nC_n=2^n$

② ${}_nC_0-{}_nC_1+\cdots+(-1)^r{}_nC_r+\cdots+(-1)^n{}_nC_n=0$

③ ${}_nC_0+2\cdot{}_nC_1+2^2\cdot{}_nC_2+\cdots\cdots+2^n\cdot{}_nC_n=3^n$

④ ${}_nC_0-2\cdot{}_nC_1+\cdots\cdots+(-2)^n{}_nC_n=(-1)^n$

などがある。これらの二項係数に関する等式は，主に二項定理を用いて証明されることが多いが，生徒は十分理解できていないのが現状である。定着のための反復練習が足りないという面はあるが，式変形や操作に納得ができていなく，単なる暗記になっているように思われる。

二項係数に関する等式のうち，等式③，④は，パスカルの三角形から読み取ることは難しいが，等式①，②はパスカルの三角形から比較的気づきやすい。このように，二項定理から見ると難しそうに見えるものでも，パスカルの三角形を考えると自然に読み取れてしまう等式や性質がある。パスカルの三角形だから気づくものも多いはずである。

パスカルの三角形を考察することによって，二項定理の理解を深めることが可能であろう。パスカルの三角形から規則性や性質を発見し，それが正しいことを証明することをテーマとして取り組でみた。本稿は，その授業実践の報告である。

2．授業実践

(1)　規則や性質の発見

平成26年1月に，1年生の各クラス41～42名を7グループに分けて，「パスカルの三角形から，規則を見つけよう」というテーマで，気付くことなど自由に考えさせる授業を行った。ここでは，規則や性質を発見することに重点をおいて取り組んだ。この段階では，あくまで予想であって，その証明までは求めていない。そのため，その予想が正しいかどうかも疑わしくても構わないことにした。そのような前提で各グループから挙がってきた性質に，次のような規則がある。ただし，ほとんどが図や文章による説明によるものであり，数式では表されていなかった。

① 各行の和は，公比2の等比数列になっている。

② n段目までの和は2^n-1

③ 各行から公比11の等比数列が作られる。

④ 左からk番目の斜めの数の和が，次の段の左か

ら$k+1$番目の数になっている。

⑤　外側の2列目にしか素数はない。

⑥　mを素数とするとき，${}_m\mathrm{C}_r$ $(1 \leqq r \leqq m-1)$ はmの倍数である。

⑦　(図のような) ひし形の内部にある数の和は，その下の中央の数から1引いたものに等しい。

⑧　行の各数の2乗の和が，中央の縦の列の数字に現れる。

⑨　各倍数に着目すると，逆三角形になっている。

⑩　三角形の内部にある数の総和に1を加えると，その下の段の数の総和になる。

⑪　素数の倍数は，左右対称に2個ずつ，底辺が$2n-2$個でできた逆三角形状に現れる。

⑫　5の倍数に着目したとき，(図のように) 規則的に現れる。

⑬　奇数と偶数の項に分けると，シェルピンスキーのギャスケットの形ができる。

⑭　桂馬飛びに和を作ると，フィボナッチ数列ができる。

①

1　　　　1 ×2
1 1　　　　2 ×2
1 2 1　　　　4 ×2
1 3 3 1　　　　8 ×2
1 4 6 4 1　　　　16 ×2
1 5 10 10 5 1　　　　32
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1
………

各行の和をとると，図のような規則がある。

②

1　　」ここまでの和　$2-1$
1 1　　」ここまでの和　2^2-1
1 2 1　　」ここまでの和　2^3-1
1 3 3 1　　」ここまでの和　2^4-1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1
………

n段目までの和は2^n-1

③

1　　　　1 ×11
1 1　　　　11 ×11
1 2 1　　　　121 ×11
1 3 3 1　　　　1331 ×11
1 4 6 4 1　　　　14641
1 5 10 10 5 1　　　　161051
1 6 15 20 15 6 1　　　　1771561
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1
………

11^nが簡単に見つけられる。

④

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1

図のように，斜めの和が次の段に現れる。

⑤

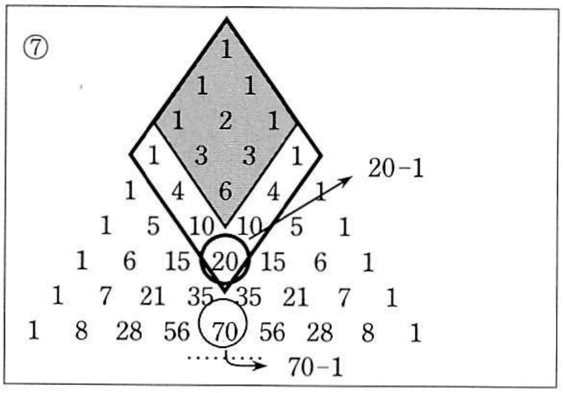
1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1
………

外側の2列目にしか素数はない。

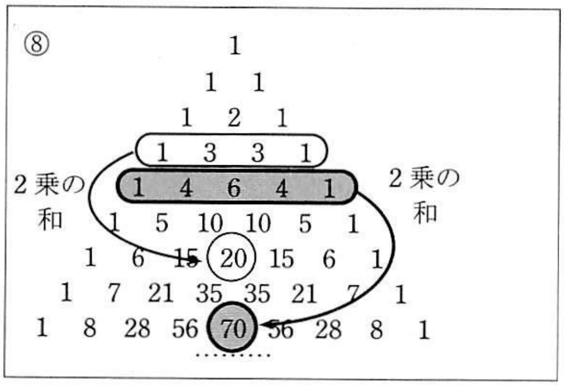
⑥

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1　　5の倍数
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1　　7の倍数
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1
………

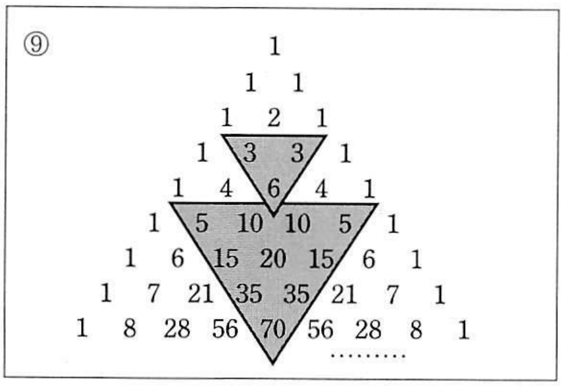
mを素数とするとき，${}_m\mathrm{C}_r$ $(1 \leqq r \leqq m-1)$ はmの倍数。



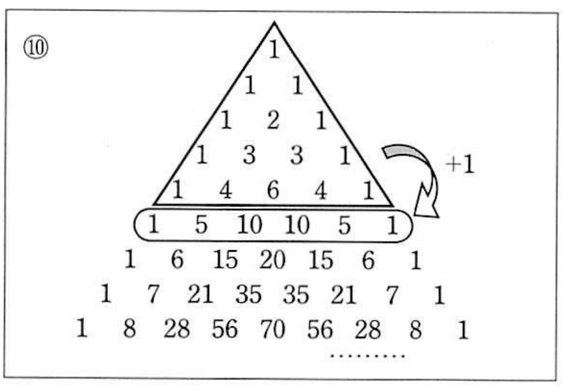
図のようなひし形の内部にある数の和は，その下の数から1引いたものである。



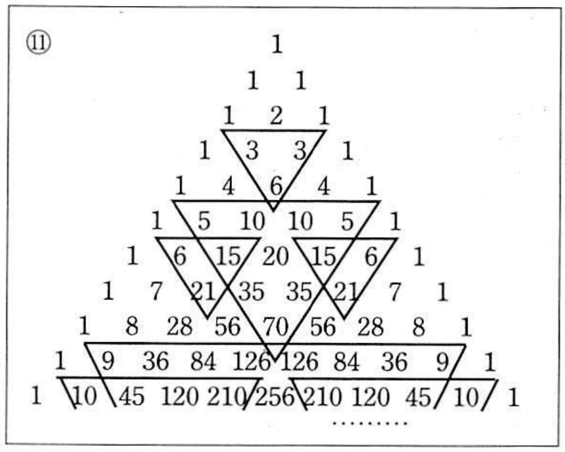
行の各数の2乗の和が，中央の縦の列の数字に現れる。



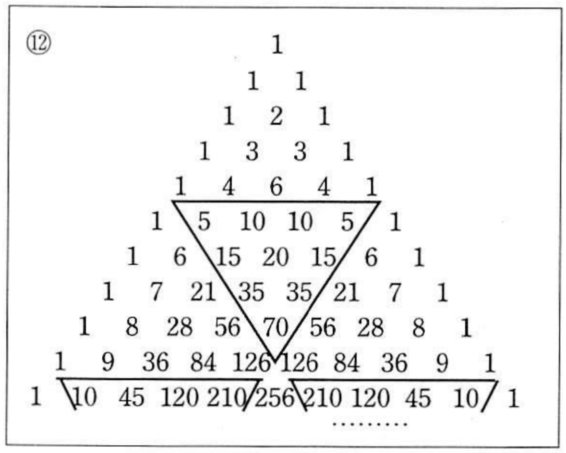
各倍数に着目すると，逆三角形になっている。



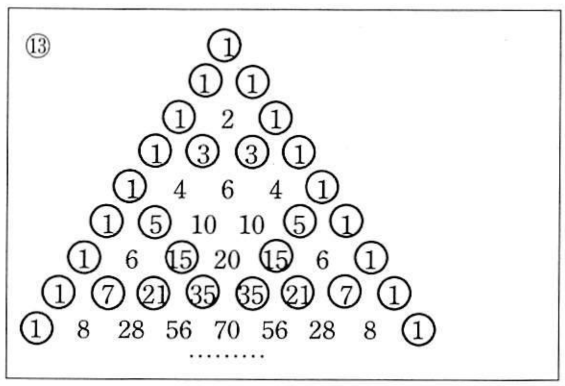
三角形内の総和に1を加えると下段の総和になる。



素数の倍数は，左右対称に2個ずつ，底辺が$2n-2$個でできた逆三角形で現れる。



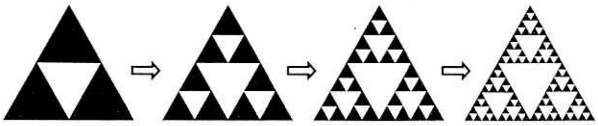
5の倍数に着目したとき，図のように規則的に現れる。



奇数と偶数の項に分けると，シェルピンスキーのギャスケットの形ができる。

【補足】シェルピンスキーのギャスケットとは，正三角形から，各辺の中点を結んでできる$\frac{1}{2}$の正三角形を除く。また，残った3個の正三角形から各辺の中点を結んでできる元の正三角形の$\frac{1}{4}$の正三角形

を除く。これを繰り返してできる自己相似形のこと。



⑭

1
1 1 1
1 2 1 1
1 3 3 1 2
1 4 6 4 1 3
1 5 10 10 5 1 5
1 6 15 20 15 6 1 8
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1
………

桂馬飛びに和を作ると，フィボナッチ数列ができる。

⑬のシェルピンスキーのギャスケットについて，以前にそのようなことに触れたことがあり，ネット上にもよく取り上げられていることもあって，そのような規則を挙げた。また，⑭のフィボナッチ数列については，「数（かず）の悪魔」（晶文社）に載っていてそれを読んだ生徒もいたからであろう。

パスカルの三角形を通して，数式からでは気付かない様々な二項係数に関する性質や規則を発見することができ，改めて具体的な値で考えてみる大切さを実感した。

⑵　発見した規則や性質の証明

2年生になってから，1年生のときに見つけた規則や性質について，証明を与えることにした。前回と同じように，各クラスを7つのグループに分けて，先の①～⑭の性質の中から1つを選びそれを証明する，さらに新たな性質や規則を発見することとした。

表Ⅰ

	A組	B組	C組
1班	⑭	②	⑤
2班	⑥	⑭	④
3班	⑩	⑩	⑥
4班	⑧	⑥	①
5班	③	①	②
6班	②	⑤	⑬
7班	①	④	⑩

そのときの各グループの証明を紹介しよう。担当割は，表Ⅰのようになっている。

①の証明（A組7班）

① 上の段から順に
1段目，2段目，……，n段目 とする.
また，$n-1=k$ とおく.
二項定理より
$(a+b)^m = {}_mC_0\cdot a^m + {}_mC_1\cdot a^{m-1}\cdot b$
$+ {}_mC_2\cdot a^{m-2}\cdot b^2 + \cdots$
$+ {}_mC_{m-1}\cdot a\cdot b^{m-1} + {}_mC_m\cdot b^m$
$a=1,\ b=1,\ m=k$ を代入すると
$2^k = {}_kC_0 + {}_kC_1 + {}_kC_2 + \cdots + {}_kC_{k-1} + {}_kC_k$
よって $2^{n-1} = {}_{n-1}C_0 + {}_{n-1}C_1 + {}_{n-1}C_2 + \cdots$
$+ {}_{n-1}C_{n-2} + {}_{n-1}C_{n-1}$

②の証明（B組1班）

第n段までの和は
$$\sum_{k=1}^{n-1}(1+1)^k + 1 = \sum_{k=1}^{n-1}2^k + 1 = \frac{2(2^{n-1}-1)}{2-1} + 1$$
$$= 2^n - 1 \quad //$$

③の証明（A組5班）

スライド1枚のパワーポイントによる証明

二項定理を用いる

$$(a+b)^n = \sum_{r=0}^{n} nCr\cdot a^r\cdot b^{n-r}$$

両辺に$a=10, b=1$を代入

(左辺)$=(10+1)^n = 11^n$

(右辺)$=\sum_{r=0}^{n} nCr\cdot 10^r$

④の証明（B組7班）

パワーポイントによる解説および証明

コツ　次の式を用いる

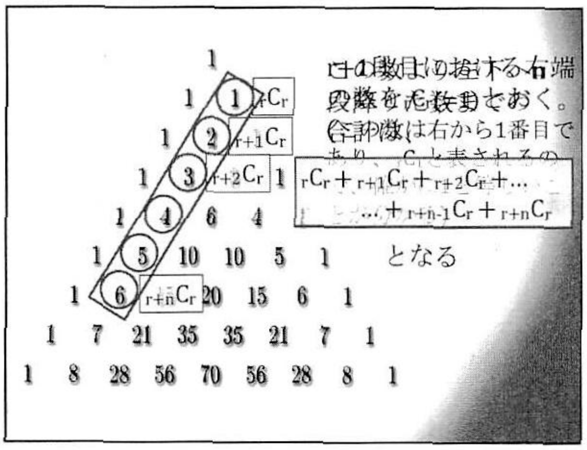
${}_rC_k = {}_{r-1}C_k + {}_{r-1}C_{k-1}$ に

${}_{r-1}C_{k-1} = {}_{r+1}C_{k+1} - {}_{r-1}C_k$ を代入

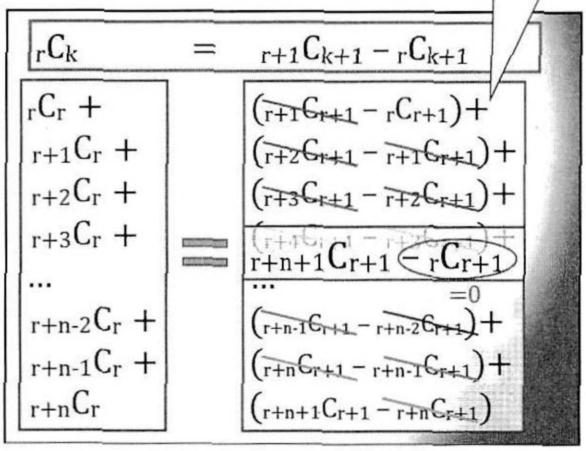
$$\boxed{{}_rC_k = {}_{r+1}C_{k+1} - {}_rC_{k+1}}$$

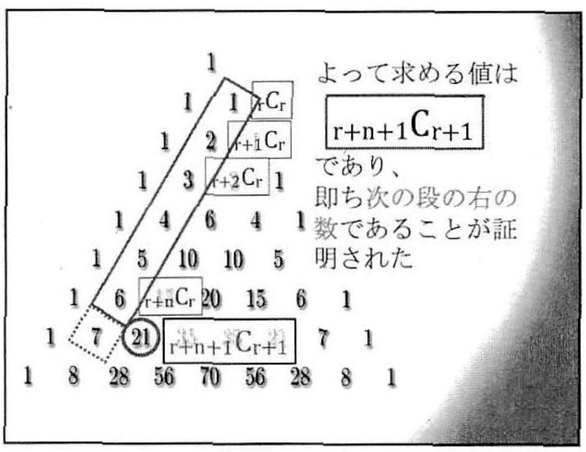
（但し、$r-1 \geq k$のときに限る）

証）
パスカルの三角形において、
上からr+1番目、左(右)からk+1番目の数は
${}_rC_k$ と表される（r, kは0以上の整数）



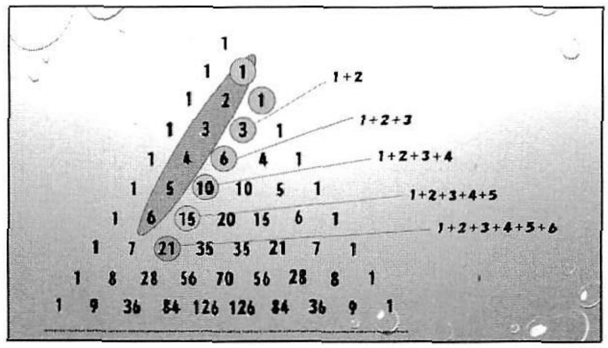
一行目をミスしているが，方針はよい。

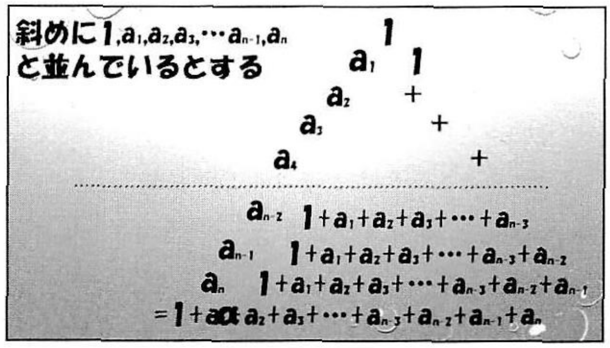


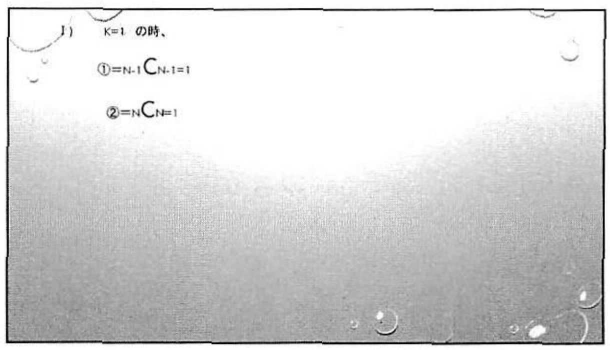


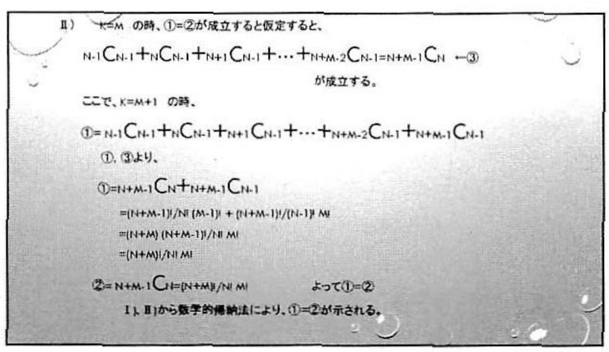
④の証明（C組２班）

パワーポイントによる解説および証明









⑤の証明は，完成できなかったグループと，できたと思ったが数学的に証明になっていないものであった。

⑥の証明（C組３班）

mは素数.
$1 \leqq k \leqq m$ を満たす自然数について

$$m \cdot {}_{m-1}C_{k-1} = m \cdot \frac{(m-1)!}{(k-1)!(m-k)!}$$

$$= \frac{m!}{(k-1)!(m-k)!} = k \cdot {}_mC_k$$

$\therefore\ m \cdot {}_{m-1}C_{k-1} = k \cdot {}_mC_k$ …①

①の左辺はmの倍数
mは素数であるから mと $1 \leqq k \leqq m-1$ を満たす
kとは互いに素である.
よって ${}_mC_k$ は mの倍数.

⑧の証明（A組４班）

パワーポイントによる解説および証明

2項定理を用いて証明する

$$(1+x)^n = {}_nC_0 + {}_nC_1x + \cdots + {}_nC_nx^n$$

$$(x+1)^n = {}_nC_0x^n + {}_nC_1x^{n-1} + \cdots + {}_nC_n$$

辺々をかけて、

$$(x+1)^{2n} = ({}_nC_0 + {}_nC_1x + \cdots + {}_nC_nx^n)({}_nC_0x^n + {}_nC_1x^{n-1} + \cdots + {}_nC_n)$$

左辺$(x+1)^{2n}$**から、**x^n**の係数は**

$2nCn$

右辺$({}_nC_0 + {}_nC_1x + \cdots + {}_nC_nx^n)({}_nC_0x^n + {}_nC_1x^{n-1} + \cdots + {}_nC_n)$

から、x^n**の係数は**

$$({}_nC_0)^2 + ({}_nC_1)^2 + \cdots + ({}_nC_n)^2$$

したがって、

$$({}_nC_0)^2 + ({}_nC_1)^2 + \cdots + ({}_nC_n)^2 = 2nCn$$

⑩の証明（A組３班）

m段目までの和

$$(2^m - 1) + 1 = 2^m$$

m+1段目の和

$$2^{(m+1)-1} = 2^m$$

一致

⑬の証明（C組６班）

証明）偶数＋偶数＝偶数
偶数＋奇数＝奇数
奇数＋奇数＝偶数 であることから
偶数＝x. 奇数＝y でパスカルの三角形を表すと.

y
y y
y x y
y y y y
y x x x y
y y x x y y
y x y x y x y
y y y y y y y y
y x x x x x x x y
y y x x x x x x y y
y x y x x x x x y x y
y y y y x x x x y y y y
y x x x y x x x y x x x y
y y x x y y x x y y x x y y
y x y x y x y x y x y x y x y
y y y y y y y y y y y y y y y y
⋮

よって、シェルピンスキーのギャスケットができる。

証明は完成されていないが，

偶＋偶＝偶，奇＋奇＝偶，偶＋奇＝奇，奇＋偶＝奇

であるとことなど，着眼点は良い。

⑭の証明（A組４班）

フィボナッチ数列とは？

初めに1, 1をおいて,
直前の2数の和を次の数としている。

$$\{a_n\} = 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \cdots$$

これを漸化式で表すと、

$$a_1 = 1 \ , \quad a_2 = 1 \ , \quad a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$$

➡ **ただの3項間漸化式**

フィボナッチ数列とは？（おまけ）

$$a_1 = 1 \ , \quad a_2 = 1 \ , \quad a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$$

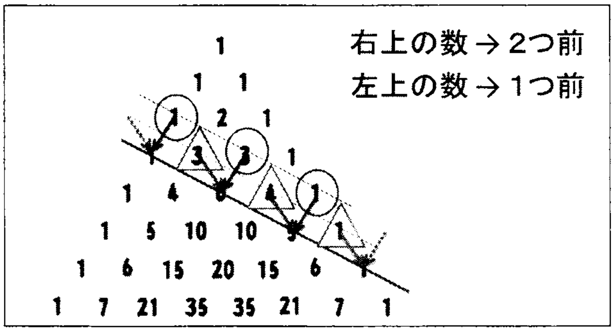
特性方程式 $\alpha^2 = \alpha + 1$ **を解くと、**

$$\alpha = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

一般項は、

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right\}$$

となる。



〔上のスライドにおける表示〕
赤線の上の数（○で囲まれた数）と
　緑線の上の数（△で囲まれた数）は，
全て1個ずつ足されて青線の上の数ができあがるから，
（赤線の上の数の和）＋（緑線の上の数の和）

⑭については，このスライドは，証明というより解説である。もう一つのグループは，Cを用いて式でうまく処理していて，証明になっている。生徒にとって，スライドによる説明の方が直感的に理解できていたので，こちらの方を取り上げることとした。

⑶　新たに発見した規則や性質

❶　下図において，○で囲んだ2数を掛けて2で割るとその左下の数字になる。

1
1　1
1　2　1
1　3　3　1
1　4　6　4　1
1　5　10　10　5　1
1　6　15　20　15　6　1
1　7　21　35　35　21　7　1
1　8　28　56　70　56　28　8　1
………

〔簡単な証明〕斜め2列目の数列は　$a_n=n$

斜め3列目の数列は　$b_n=\dfrac{n^2}{2}+\dfrac{n}{2}$

ここで　$\dfrac{a_n\cdot a_{n+1}}{2}=\dfrac{n(n+1)}{2}=\dfrac{n^2}{2}+\dfrac{n}{2}$

以上より，$\dfrac{a_n\cdot a_{n+1}}{2}=b_n$

❷　すべての項が奇数であるような行が規則的に存在する。

${}_{2^m-1}C_k$（$0\leqq k\leqq 2^m-1$）が奇数となる。

1
1　1
1　2　1
1　3　3　1
1　4　6　4　1
1　5　10　10　5　1
1　6　15　20　15　6　1
1　7　21　35　35　21　7　1
1　8　28　56　70　56　28　8　1
………
1　15　105　455　……　105　15　1
………

これが，⑭のシェルピンスキーのギャスケットにつながっている。

❸　各行の両端の1を除いた数の組は，1でない最大公約数を持つ。

5の倍数
3の倍数

1
1　1
1　2　1
1　3　3　1
1　4　6　4　1
1　5　10　10　5　1
1　6　15　20　15　6　1
1　7　21　35　35　21　7　1
1　8　28　56　70　56　28　8　1
………

❹　n段目の行にある奇数の個数は，nを2進法で表したときの1の個数をkとすれば，2^k個である。

1	$0=0_{(2)}$	1個
1　1	$1=1_{(2)}$	2個
1　2　1	$2=10_{(2)}$	2個
1　3　3　1	$3=11_{(2)}$	4個
1　4　6　4　1	$4=100_{(2)}$	2個
1　5　10　10　5　1	$5=101_{(2)}$	4個
1　6　15　20　15　6　1		
1　7　21　35　35　21　7　1		
1　8　28　56　70　56　28　8　1		
………		

これも，⑭のシェルピンスキーのギャスケットと深く関わっていると考えられる。

パスカルの三角形から規則を見つけるという作業は，実験結果から仮説を立てるということと似た活動があり，生徒の思考のトレーニングにいい数学的活動である。

3．二項係数に関する問題

(1) 二項係数に関する等式

教科書や問題集などに出てくる二項係数に関する等式を列挙してみよう。

① ${}_nC_{n-r} = {}_nC_r$

② ${}_nC_r = {}_{n-1}C_r + {}_{n-1}C_{r-1}$

③ $r \cdot {}_nC_r = n \cdot {}_{n-1}C_{r-1}$

④ ${}_nC_0 + {}_nC_1 + {}_nC_2 + \cdots\cdots + {}_nC_{n-1} + {}_nC_n = 2^n$

⑤ ${}_nC_0 - {}_nC_1 + {}_nC_3 - \cdots\cdots + (-1)^n \cdot {}_nC_n = 0$

⑥ ${}_nC_0 + 2 \cdot {}_nC_1 + 2^2 \cdot {}_nC_2 + \cdots\cdots + 2^n \cdot {}_nC_n = 3^n$

⑦ $1 \cdot {}_nC_1 + 2 \cdot {}_nC_2 + 3 \cdot {}_nC_3 + \cdots\cdots + n \cdot {}_nC_n = n \cdot 2^{n-1}$

⑧ $1^2 \cdot {}_nC_1 + 2^2 \cdot {}_nC_2 + 3^2 \cdot {}_nC_3 + \cdots\cdots + n^2 \cdot {}_nC_n$
$= n(n+1) \cdot 2^{n-2}$

⑨ $\dfrac{{}_nC_0}{1} + \dfrac{{}_nC_1}{2} + \dfrac{{}_nC_2}{3} + \cdots\cdots + \dfrac{{}_nC_0}{n+1} = \dfrac{2^{n+1}-1}{n+1}$

⑩ ${}_nC_0{}^2 + {}_nC_1{}^2 + {}_nC_2{}^2 + \cdots\cdots + {}_nC_n{}^2 = {}_{2n}C_n$

⑪ ${}_mC_0 \cdot {}_nC_n + {}_mC_1 \cdot {}_nC_{n-1} + {}_mC_2 \cdot {}_nC_{n-2} + \cdots\cdots$
$\cdots + {}_mC_n \cdot {}_nC_0 = {}_{m+n}C_n$ （ただし，$m \geqq n$）

⑫ ${}_rC_r + {}_{r+1}C_r + {}_{r+2}C_r + \cdots\cdots + {}_nC_r = {}_{n+1}C_{r+1}$

これらの等式のうち，①，②，④，⑤は，パスカルの三角形から気づきやすい。二項係数の等式としてみると，「どうして」と考えてしまうものでも，パスカルの三角形から見たら明らかである。また，⑩や⑫も予想できる。しかし，二項定理を利用して証明することができる③や⑥～⑨および⑪は，パスカルの三角形から気づくのは難しい。いや無理である。

⑫は，式だけを見ているととても難しそうであり，どう証明していいかわからないが，パスカルの三角形において，左から2個目の数からなる数列を$\{c_n\}$，左から3個目の数からなる数列を$\{b_n\}$，左から4個目の数からなる数列を$\{a_n\}$とおくと，$\{a_n\}$の階差数列が$\{b_{n+1}\}$，$\{b_n\}$の階差数列が$\{c_{n+1}\}$になっている。

このことから，$b_{k+1} = {}_{k+1}C_3 = {}_{k+1}C_4 - {}_kC_4 = a_{k+1} - a_k$という関係（等式②）に気づき，

$${}_3C_3 + {}_4C_3 + {}_5C_3 + \cdots\cdots + {}_nC_3 = {}_{n+1}C_4 \qquad \cdots Ⓐ$$

であることがわかる。

	1	7						
	1	6	21					
	1	5	15	35				
$\{a_n\}$：	1	4	10	20	35			
$\{b_n\}$：	1	3	6	10	15	21		
$\{c_n\}$：	1	2	3	4	5	6	7	
	1	1	1	1	1	1	1	1

等式Ⓐについて，上の証明以外の方法で証明してみよう。

〔証明1〕等比数列の和の公式より，次の等式が成立する。

$$1 + (1+x) + (1+x)^2 + \cdots\cdots + (1+x)^n = \frac{(1+x)^{n+1} - 1}{x}$$

左辺のx^3の係数は${}_3C_3 + {}_4C_3 + {}_5C_3 + \cdots\cdots + {}_nC_3$であり，右辺の$x^3$の係数は${}_{n+1}C_4$である。

よって，等式Ⓐが成立する。

〔証明2〕1から$n+1$までの番号が書かれたカードが1枚ずつ計$n+1$枚ある。

この中から，4枚のカードを選ぶ方法を考える。

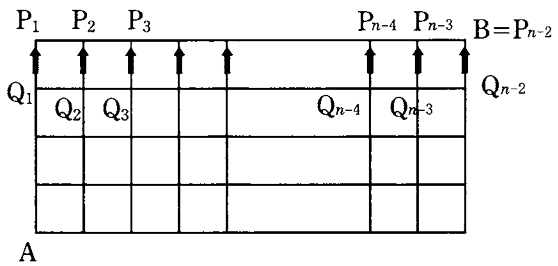
選び方は，全部で${}_{n+1}C_4$通りある。

選んだ4枚のカードの番号の最大値が$k+1$（$3 \leqq k \leqq n$）となるのは，残りのカードを1からkの中から3枚選ぶ場合だから，${}_kC_3$通りある。

ゆえに，${}_{n+1}C_4 = \sum_{k=3}^{n} {}_kC_3$が成立する。

〔証明3〕次の図のような縦$n-2$本，横5本からなる道路があり，A地点からB地点まで行く最短経路について考える。最短経路の総数は，↑4個，→$n-3$個の順列の総数に等しいから，${}_{n+1}C_4$通りある。地点P_1，Q_1を通る最短経路の数は${}_3C_3$通り，地点P_2，Q_2を通る最短経路の数は${}_4C_3$通り，…，地点P_{n-2}，Q_{n-2}を通る最短経路の数は${}_nC_3$通りある。

以上から，等式Ⓐが成立する。



この解法は，生徒が発表の場で紹介したものである。

(2) 二項係数に関する入試問題をいくつか挙げてみよう。

1 pを2以上の素数とし，kをpより小さい正の整数とする。このとき，${}_p\mathrm{C}_k$はpで割り切れることを示せ。 〔2006 早稲田〕

2 nが相異なる素数p, qの積$n=pq$であるとき，$(n-1)$個の数${}_n\mathrm{C}_k$ $(1 \leqq k \leqq n-1)$の最大公約数は1であることを示せ。 〔1997京都(前) 理〕

3 nを自然数とし，$S_0=\sum_{k=0}^{n} {}_{3n}\mathrm{C}_{3k}$, $S_1=\sum_{k=0}^{n-1} {}_{3n}\mathrm{C}_{3k+1}$, $S_2=\sum_{k=0}^{n-1} {}_{3n}\mathrm{C}_{3k+2}$とおく。また，$\omega$を$x^3-1=0$の1でない解とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) $S_0+S_1+S_2$の値を求めよ。

(2) $\sum_{k=0}^{3n} {}_{3n}\mathrm{C}_k \omega^k$の値を求めよ。

(3) $S_1=S_2$が成立することを示せ。

(4) S_0を求めよ。

〔1997 岐阜(前) 理〕

4 10進数で表された自然数nの各桁の数字の和を$s(n)$とする。例えば，$n=126$ のとき，$s(n)=1+2+6=9$である。自然数kとmに対して，$s(n)=m$となるk桁の自然数nの個数を$S(k,m)$で表すことにする。例えば，$s(n)=3$となる2桁の自然数nは12, 21, 30のみであるので，$S(2,3)=3$となる。 〔2001 慶応 理〕

(1) 任意の自然数k $(k \geqq 2)$に対して，$S(k,m)=\sum_{i=1}^{m} S(k-1,i)$ $(m=1,2,\cdots,9)$が成立することを示せ。

(2) 異なるn個のものからr個を取る組の総数を${}_n\mathrm{C}_r$とする。ただし，${}_0\mathrm{C}_0=1$である。等式${}_n\mathrm{C}_r=\sum_{i=1}^{n-r+1} {}_{n-i}\mathrm{C}_{n-i-r+1}$が任意の自然数$n, r$ $(n \geqq r \geqq 1)$について成立することを示せ。

(3) 任意の自然数$k(k \geqq 2)$に対して，$S(k,m)={}_{k+m-2}\mathrm{C}_{m-1}$ $(m=1,2,\cdots,9)$が成立することを示せ。

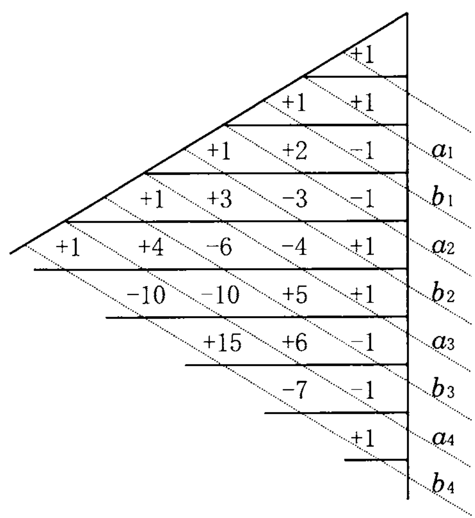
5 自然数$m \geqq 2$に対し，$m-1$個の二項係数${}_m\mathrm{C}_1$, ${}_m\mathrm{C}_2$, ……, ${}_m\mathrm{C}_{m-1}$を考え、これらすべての最大公約数をd_mとする。すなわちd_mはこれらすべてを割り切る最大の自然数である。

(1) mが素数ならば，$d_m=m$であることを示せ。

(2) すべての自然数kに対し，k^m-kがd_mで割り切れることを，kに関する数学的帰納法によって示せ。(文系はここまで)

(3) mが偶数のときd_mは1または2であることを示せ。 〔2009 東京(前) 文理〕

6 自然数nに対して
$a_n=\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k {}_{n+k}\mathrm{C}_{2k+1}$, $b_n=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k {}_{n+k}\mathrm{C}_{2k}$とおく(下図参照)。次の問に答えよ。



(1) a_{n+1}, b_{n+1}をa_n, b_nで表せ。

(2) a_n, b_nを求めよ。 〔1987 早稲田 理〕

これらの問題のうち，パスカルの三角形とほとんど関係がない問題と，パスカルの三角形で考えることがヒントにつながる問題がある。具体的には，1や2，4(2)，5(1)がそうである。今回の活動では，

具体的な値を代入して考える習慣作りにも効果が期待できるので，このような活動をいろいろな場面や領域で扱えるように，教材研究に取り組んでいきたい。

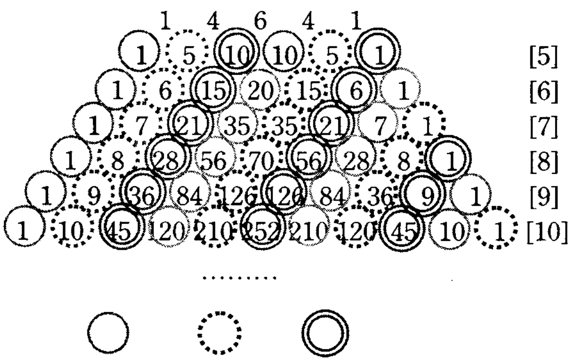
4．おわりに

教科書などに必ず載っている等式

$$ {}_nC_0-{}_nC_1+\cdots\cdots+(-1)^r{}_nC_r+\cdots\cdots+(-1)^n{}_nC_n=0 $$

$$ ({}_nC_0+{}_nC_2+\cdots\cdots={}_nC_1+{}_nC_3+\cdots\cdots\ ) $$

は，二項係数${}_nC_r$の偶数番目と奇数番目の総和の関係である。このことから，二項係数${}_nC_r$に対して，$r=3k-2$，$3k-1$，$3k$のそれぞれの場合の総和がどうなっているかについて調べてみるという取り組みが考えられる。（下図）

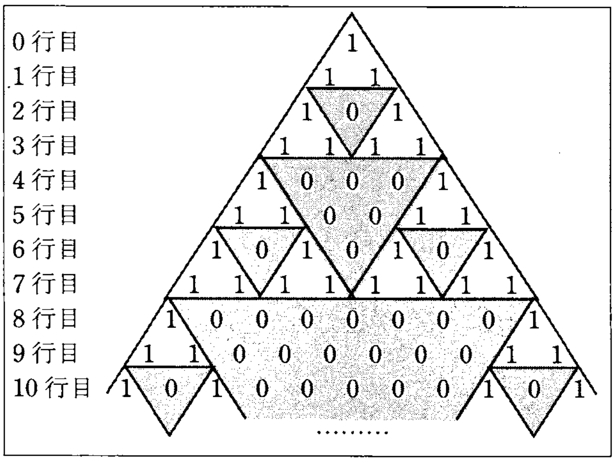


	○	◌	◎
[5]	11	10	1
[6]	22	21	21
[7]	43	43	42
[8]	85	86	85
[9]	170	171	171
[10]	341	341	342

このようなことを考えることが，入試問題$\boxed{3}$を解くヒントになる。先の二項係数に関する等式や他の入試問題についても，同様のことが言える。

また，パスカルの三角形の場合と同様に，具体的な値を代入したり，数値で考えてみたりすることは多くの問題の解法のヒントになり，このように考えることは大変重要である。パスカルの三角形を通してその規則や性質を考えることは，このようなトレーニングになる。

最後に，パスカルの三角形におけるシェルピンスキーのギャスケットと生徒が発見した規則❷，❹について考えてみよう。パスカルの三角形において，奇数を1，偶数を0で表すと，下のようになる。



まず，$n=2^m$のとき，n行目の両端を除く2項係数${}_nC_1$，${}_nC_2$，……，${}_nC_{n-1}$が偶数であることを示そう。

等式$r\cdot{}_nC_r=n\cdot{}_{n-1}C_{r-1}$ $(r=1, 2, \cdots\cdots, n-1)$が成立するので，$n=2^m$のとき，

$$ r\cdot{}_nC_r=2^m\cdot{}_{n-1}C_{r-1} $$

$$ \therefore\ {}_nC_r=\frac{2^m\cdot{}_{n-1}C_{r-1}}{r} $$

r $(r=1,2,\cdots\cdots,2^m-1)$ が2^mを割り切ってしまうことがないので，因数2が必ず残る。よって，${}_nC_r$は偶数である。

次に，$n=2^m-1$のとき，n行目の2項係数${}_nC_0$，${}_nC_1$，${}_nC_2$，……，${}_nC_n$が奇数であることを示そう。

等式${}_{n+1}C_r={}_nC_r+{}_nC_{r-1}$ $(r=1, 2, \cdots\cdots, n)$ が成立する。ある正の整数sにおいて${}_nC_s$が偶数であると仮定すると，$n+1=2^m$より，

${}_{n+1}C_r$ $(r=1, 2, \cdots\cdots, n)$ は偶数であるから，

${}_nC_{s-1}={}_{n+1}C_s-{}_nC_s$は偶数。同様に，

${}_nC_{s-2}={}_{n+1}C_{s-1}-{}_nC_{s-1}$は偶数となる。

これを繰り返すと，${}_nC_0$が偶数となり，

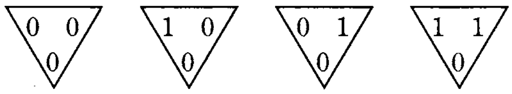
${}_nC_0=1$であることに反する。

よって，${}_nC_r$ $(r=0, 1, 2, \cdots\cdots, n)$ は奇数である。

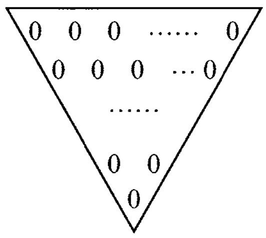
この0と1で表示するパスカルの三角形では，

$$ 0+0=0,\ 0+1=1+0=1,\ 1+1=0 $$

による計算となるから，等式${}_{n+1}C_r={}_nC_r+{}_nC_{r-1}$より，次の４つのパターンから構成される。



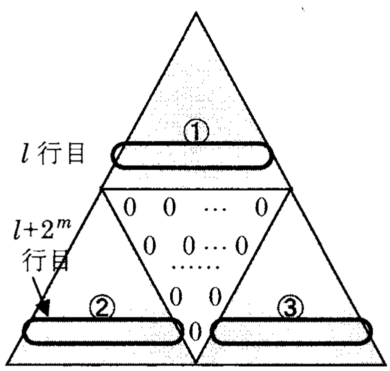
2^m行目は，両端を除く２項係数がすべて偶数であるから，右のような部分が作られる。



${}_nC_r$が偶数のとき$a_{n,r}=0$，${}_nC_r$が奇数のとき$a_{n,r}=1$として，数列$\{a_{n,r}\}$ $(0\leqq r\leqq n)$を定義すれば，$2^m\leqq n\leqq 2^{m+1}-2$，$n-2^m+1\leqq r\leqq 2^m-1$において，$a_{n,r}=0$となる。

このとき，$a_{2^m,0}=1$，$a_{2^m,2^m}=1$，だから，$a_{2^m+i,i}=1$，$a_{2^m+i,2^m}=1$ $(i=1, 2,\cdots\cdots, 2^m)$ となる。よって，$2^m\leqq n\leqq 2^{m+1}-1$のときの$0\leqq r\leqq n-2^m$と$2^m\leqq r<n$における$a_{n,r}$は，$0\leqq n\leqq 2^m-1$のときの$0\leqq r\leqq n$における$a_{n,r}$と一致する。

すなわち，下図の①，②，③の部分における$a_{n,r}$は一致する。



この結果から$l+2^m$行目に現れる１の個数（奇数の個数）は，l行目に現れる１の個数（奇数の個数）の２倍に等しい。$l+2^m$とlをそれぞれ２進数で表したとき，１の個数は前者が１個多い。（※１）

命題P「n段目の行にある奇数の個数は，nを２進法で表したときの１の個数をkとすれば，2^k個である」は，$0\leqq n\leqq 3$のとき成立する。$0\leqq n\leqq 2^m-1$のとき成立すると仮定すると，（※１）のことから，$l+2^m$行目とl行目にある奇数の個数は，前者が後者の２倍で，２進数で表したときの１の個数が１多いことから，$2^m\leqq n\leqq 2^{m+1}-1$において成立する。すなわち，$0\leqq n\leqq 2^{m+1}-1$において成立する。

よって，数学的帰納法から，命題Pは成立する。

私たち教師が当たり前に思っていることが生徒にとっては当たり前でなく，そのことが却っていろいろな思考を生み出すように思う。今回，生徒が発見した命題Pなどは，私たち教師では考えもしないことであり，柔軟な思考を持つ生徒だから考えることである。今回の授業実践では，このように自由な発想で考えることができるようなテーマであった。これからも生徒の柔軟な思考を活かせるような，また育てるようなテーマを与えられるように心がけていきたい。また，様々な学習場面において，具体的な数値を代入して考える習慣を作るために，このような授業を実践していきたい。

〔参考文献〕

数の悪魔　算数・数学が楽しくなる12夜（晶文社）
エンツェンスベルガー著　丘沢　静也役