多様な解答の良さを学びあう授業を目指して

―不等式の証明を題材にした教材開発研究―

数学科　外山　康平

多様な解答の良さを学びあう授業をこれまで実践してきたが，主に空間図形に関する教材ばかりで実践を行ってきた。本稿においては，それ以外の題材，特に不等式の証明の題材にして，教材開発を試みた。

キーワード：解答の多様性　言語活動　不等式の証明

1．はじめに

紀元前300年頃，ユークリッドは，点の定義から直線の定義など今までの幾何学を一つにまとめあげ，ユークリッド幾何学としてそれを体系化した。しかし，16世紀から17世紀にかけて，デカルトは全く別のアプローチで図形の問題を扱った。

ユークリッド幾何学では，意味論が重視され，２乗した値は面積，３乗した値は体積であり，それらが足したり引いたりすることは許されなかった。

ところが，デカルトは，数直線を直角にクロスさせ，平面上のすべての点に実数との１対１の対応をつけた考え方，即ちxy座標を用いて，代数的な方法論を取り入れた。まず図形の意味をxとyの関係に表し，その後は意味を忘れて，方程式の計算をし，出た結果を幾何的な意味で捉え直すといったアプローチで，図形の証明を考えた。

同じ図形の証明であっても，もうすでに証明された問題が，全く別のアプローチで証明される。そして，その新しいアプローチが，次の数学の発展を促す。数学の歴史を辿ってみると，本来，数学には，そのような特徴があり，したがって，解決済みの問題だとしても，新しいアプローチで繰り返し問題を捉え直すことは，数学の発展を促す意味深い活動である。

このような活動が教室の中でも再現することは，数学の本来の姿を生徒たちに追体験してもらうという意味でも，重要と考える。

本研究は，１つの問題に対して様々なアプローチすることと，それによって生まれる多様な解答の良さを生徒が議論することを重視した授業の研究である。

2．本校の研究部の取り組み

そもそも，「解答の多様性を重視した授業」がテーマとなったのは，本校で昨年度に研究部によって行われた学校改善プロジェクト（以下，PJ）が関係している。これは，学校をよりよく改善しようという目的で，５つの観点（生徒指導改善PJ，部活動活性化PJ，学校広報改善PJ，進路指導改善PJ，授業改善PJ）について少人数の教員のチームを作り，それぞれの観点における改善を長期的に行っていくというものであった。その一つである授業改善PJでは，国数英理社の５教科の先生方１人ずつで５人のメンバーで，キーワードを「学びあい」と設定して，お互いの授業を見あって，整理会を行って，「よりよく学びあいが行われるためにはどうすればよいか」を議論し合っていくというものであった。

その中で，数学の授業に対して他教科の先生方か

ら指摘された問題点は,「生徒同士の学びあいがない」,「先生から生徒へ一方向な,典型的な講義調の授業である」というものであった。つまり,数学の内容そのものが問題の対象になることはなく,生徒と教員の関わり方が問題にあがったのである。

そこで「生徒同士の学び合いをいかに考えるか?」という問題意識の中で,数学そのものではなく,生徒同士の議論の場を創造することを解決策として考えた。しかも,その生徒同士の議論のためには,答えが一つに決まるテーマではなく,「多様な解釈が生まれるもの」,「人によって価値観の変わるもの」をテーマにしなければいけない。

ゆえに,考えたことは,「多様な解答の中で自分にとってのベストアンサーは何か」ということで,解答の良さについて,生徒同士で議論するようなスタイルの授業を考えた。そうすれば,生徒同士の議論も生まれ,学び合いが生まれると考えたからである。どの解答が一番良いか?は,人によって異なるので,それに焦点が当たるような授業にしたいと考えた。

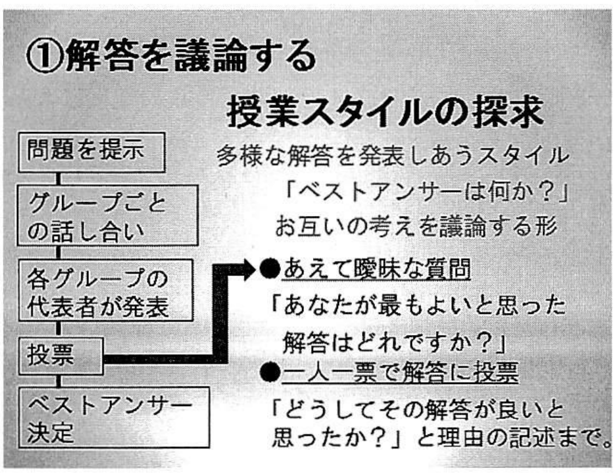


図1:解答の良さを議論する授業スタイル

授業を実践した後,振り返ってみると,実際に生徒が生徒に対して自分の解答を発表し合う,まさに「生徒同士の学びあい」の場がそこにあった。授業後の生徒のアンケートの中でも「解答を行っている生徒の途中過程を見ることができて,新しい発見があった」,「生徒同士で話しあって学びあうことができたので,普段より深く考察することができた」,「解答が一つだけではなくて,自分にあった解答でいいのだなぁと思った」などといった,普段とは異なった,「新しい発見」や「生徒から学ぶ」といった体験が生徒の中であったようであった。

また,発表する生徒も,自分が理解していることを「いかにわかりやすく,ちゃんと他の生徒に自分の解答を伝えるか」という力が大切であることを学んでいたように感じられた。一人で学ぶ勉強では決して学ぶことができない,こうした発表する力が問題視されることも,授業の良い成果の一つであった。

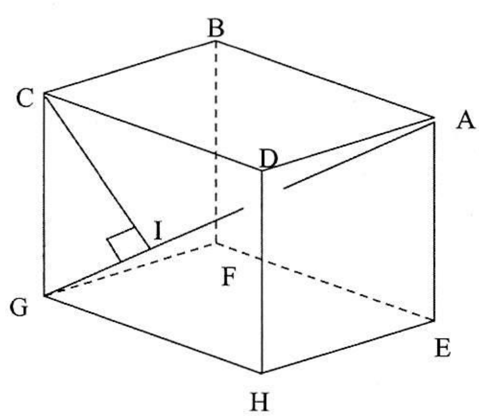
3.新しい教材研究に向けて

「解答の多様性を重視した授業」を実践するには,その肝となる「多様な解答を内在する教材」の開発が重要である。これまで行ってきた「多様な解答を内在する教材」は,すべて空間図形に関する問題であった。

空間図形に関する問題は,これまで2つの教材を題材に授業を実践した。

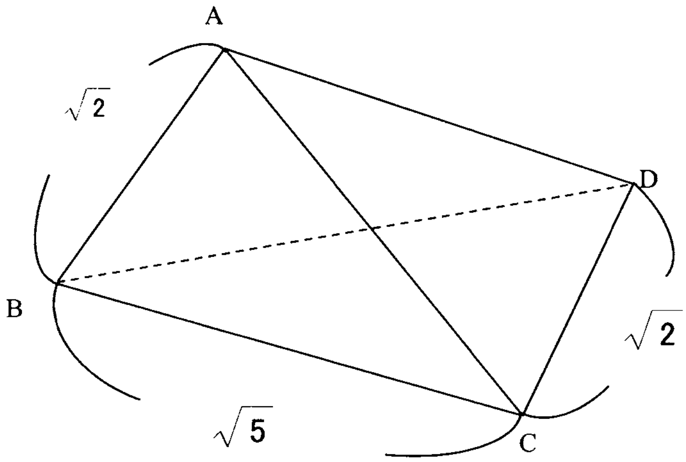
Ⅰ.角度を求める問題

『1辺の長さがaである立方体ABCD−EFGHに対して,対角線AGに点Cから下した垂線の足をIとする。∠CIHを求めよ。』



Ⅱ．等面四面体の体積を求める問題

『ABx CDx $\sqrt{2}$, ACx ADx BCx BDx $\sqrt{5}$
を満たす四面体ABCDの体積Vを求めよ。』



Ⅰ．角度を求める問題については，①余弦定理を用いる解答，②ベクトルを用いる解答，③AGを視点に図形を見る解答，④座標設定の解答の4種類の解答があった。

Ⅱ．当面四面体の体積を求める問題については，①ベクトルを用いる解答，②余弦定理を用いる解答A，③余弦定理を用いる解答B，④直方体の切断の解答，⑤座標設定による解答，⑥大きい四面体から引く解答，⑦三角柱から引く解答，⑧積分による解答があった。

しかし，どちらも，空間図形に関する解答の多様性は，ベクトルによる解答，座標設定による解答，余弦定理による解答が共通しており，着目する観点がすべてとは言えないまでも，一部で共通している。空間図形に関しては，同様の観点がポイントとなるので，解答に関する議論が似通ってくる。

もし解答の多様性をもとに，生徒に解答の良さを議論して学びあうことを考えるならば，空間図形ではない新しい観点で教材を研究しなければいけない。

ゆえに，空間図形の文脈とは異なる，多様な解答をもった教材の開発が新たな課題になる。本稿では，その教材の開発に関する研究について扱いたい。

４．不等式の証明を題材とした教材開発

解答の多様性を求める場合，単純に解答の種類が多いだけでは，解答の良しあしを議論する授業は生まれない。たとえ，解答が多くても，数学的な着目の観点が変わらない場合，解答としての違いが生まれない。

ゆえに，解答の多様性を求める場合，本質的に異なった解答がどれだけあるかが重要である。例えば，単純に途中計算だけが異なっている，表記の仕方が異なっているだけの解答では，解答の良さが議論できない。議論する際に，同じ価値の解答として扱われてしまう。

本質的な解答の違いとは，基本的な解答の方法論が異なっているということである。多様な方法論が内在していることが必要となると，簡単に教材も見つかるものではない。

一方で，扱う解答の中に，新しく学べる方法論がある解答が望ましい。学んできた方法論が多く扱うことができる一方で，教材を通して新しい観点を身に着けることができるのであれば，理想的である。ベストアンサーを決定する際にも，今までの解答が良いか，新しく学ぶ解答が良いかの議論が生じる可能性があるからである。

不等式の証明を題材にして，考えた教材は次の問題である。

> 問題
> 正の数a，bに対して
> $A=(a+b)^{\frac{3}{2}}$ と $B=\sqrt{2}\left(a^{\frac{3}{2}}+b^{\frac{3}{2}}\right)$
> の大小関係を調べよ。

そもそもこの問題の原題は，平成11年度の東京工業大学の入試問題である。

●問題

正の実数a, b, pに対して，

$A=(a+b)^p$と$B=2^{p-1}(a^p+b^p)$の大小関係を調べよ。【99. 東京工】

この問題は，大きく2つの解答が存在する。

1つは，微分法である。もう1つは，凸不等式の解答である。つまり，グラフの凹凸に基づいて，

$f\left(\frac{a+b}{2}\right)$と$\frac{f(a)+f(b)}{2}$の大小関係を捉えるという解答である。凸不等式が未習の生徒にとっては，その解法の良さを学ぶ良い教材である。

一方，pの値によっては，大小関係を，単純に因数分解によって導くこともできる場合がある。

例えば，p=2の場合

$A=(a+b)^2$と$B=2(a^2+b^2)$について。

$$B-A=2(a^2+b^2)-(a+b)^2=a^2+b^2-2ab$$
$$=(a-b)^2\geqq 0$$

よって，B≧A（等号成立は，a=bのとき）

例えば，p=3の場合

$A=(a+b)^3$と$B=2^2(a^3+b^3)$について。

$$B-A=2^2(a^3+b^3)-(a+b)^3$$
$$=4a^3+4b^3-a^3-3a^2b-3ab^2-b^3$$
$$=3(a^3+b^3-a^2b-ab^2)$$
$$=3(a^2(a-b)+b^2(a-b))$$
$$=3(a-b)^2(a+b)\geqq 0$$

よって，B≧A（等号成立は，a=bのとき）

しかし，どちらも取り組みやすい因数分解の問題になってしまい，最後に解答の良さを議論することを考えても，凸不等式や微分法と比較するとより簡単な解答であるため，より良い議論が生じにくくなってしまうと考えた。

係数を$p=\frac{3}{2}$にして考えてみると，因数分解は，難しくなる。後に解答を述べるが，$p=\frac{3}{2}$とすると6次の文字式の因数分解となり，因数定理を用いて整理していく必要が出てくる。私自身，この因数分解を考えるのには，時間を要したので，微分，凸不等式の解答と比較しても，同等の難しさをもつと考え，解答の良さを議論するにも良いレベルであると考えた。

以下に，解答を示す。

【解答1：微分】

$$B-A=\sqrt{2}\left(a^{\frac{3}{2}}+b^{\frac{3}{2}}\right)-(a+b)^{\frac{3}{2}}$$

ここで，

$f(x)=\sqrt{2}\left(x^{\frac{3}{2}}+y^{\frac{3}{2}}\right)-(x+y)^{\frac{3}{2}}$とおく。

$$f'(x)=\frac{3\sqrt{2}}{2}x^{\frac{1}{2}}-\frac{3}{2}(x+y)^{\frac{1}{2}}$$

$f'(x)=0$より

$$\frac{3\sqrt{2}}{2}x^{\frac{1}{2}}=\frac{3}{2}(x+y)^{\frac{1}{2}}$$

$x>0$, $y>0$より両辺2乗して

$$\frac{9\times 2}{4}x=\frac{9}{4}(x+y)$$
$$2x=x+y$$
$$x=y$$

よって，増減表は以下の通り。

x		0	・・・	y	・・・
f'			−	0	+
f			↘	0	↗

$x>0$において，$f(x)$は$x=y$で最小値0をとる。

よって，$f(x)\geqq 0$

よって，$B\geqq A$

【解答２：因数分解】

$a>0$, $b>0$であるから，$A>0$, $B>0$であるので２乗して大小関係を考えてもよい。

$$A^2=(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$

$$B^2=2\left(a^{\frac{3}{2}}+b^{\frac{3}{2}}\right)^2=2\left(a^3+2a^{\frac{3}{2}}b^{\frac{3}{2}}+b^3\right)$$

$$B^2-A^2=a^3+b^3+4a^{\frac{3}{2}}b^{\frac{3}{2}}-3a^2b-3ab^2$$

ここで，$a^{\frac{1}{2}}=x$，$b^{\frac{1}{2}}=y$とおくと

$B^2-A^2=x^6+y^6+4x^3y^3-3x^4y^2-3y^4x^2$である。$f(x)=x^6+y^6+4x^3y^3-3x^4y^2-3y^4x^2$とすると

$f(y)=y^6+y^6+4y^6-3y^6-3y^6=0$なので

$f(x)$は，$(x-y)$を因数に持つ。

$f(x)=(x-y)(x^5+yx^4-2y^2x^3+2y^3x^2-y^4x-y^5)$

ここで，

$g(x)=x^5+yx^4-2y^2x^3+2y^3x^2-y^4x-y^5$とすると$g(y)=0$なので，$g(x)$も$(x-y)$を因数に持つ。

よって，$f(x)=(x-y)^2(x^4+2yx^3+2y^3x+y^4)$

$x>0$, $y>0$なので，

$f(x)\geqq 0$（等号成立は，$x=y$）

よって，$B\geqq A$

【解答３：凸不等式】

AとBを両辺$2^{\frac{3}{2}}$で割って

$A'=\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^{\frac{3}{2}}$と$B'=\dfrac{a^{\frac{3}{2}}+b^{\frac{3}{2}}}{2}$の大小関係を考えればよい。

ここで，$h(x)=x^{\frac{3}{2}}$のグラフを考えると

$A'=h\left(\dfrac{a+b}{2}\right)$と$B'=\dfrac{h(a)+h(b)}{2}$である。

右図より

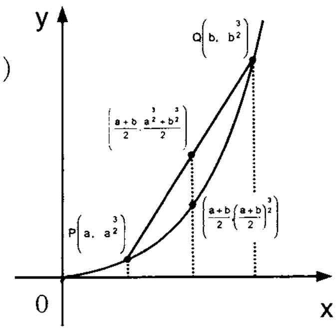
$P(a, h(a))$, $Q(b, h(b))$

とすると

PQの中点が

$\left(\dfrac{a+b}{2}, \dfrac{h(a)+h(b)}{2}\right)$

であることから



$h\left(\dfrac{a+b}{2}\right)\leqq\dfrac{h(a)+h(b)}{2}$である。

よって，$A'\leqq B'$

よって，$B\geqq A$である。

【解答４：三角関数の置き換え】

$\dfrac{B}{A}$と１の大小関係について考えればよい。

$$\frac{B}{A}=\frac{\sqrt{2}\left(a^{\frac{3}{2}}+b^{\frac{3}{2}}\right)}{(a+b)^{\frac{3}{2}}}=\sqrt{2}\frac{1+\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{3}{2}}}{\left(1+\frac{b}{a}\right)^{\frac{3}{2}}}$$

さらに，ここで，$\dfrac{b}{a}=t\,(t\geqq 0)$とすると

$$\frac{B}{A}=\sqrt{2}\frac{1+t^{\frac{3}{2}}}{(1+t)^{\frac{3}{2}}}$$

ここで，$t=\tan^2\theta\left(0\leqq\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$とすると

$$\frac{B}{A}=\sqrt{2}\frac{1+(\tan^2\theta)^{\frac{3}{2}}}{(1+\tan^2\theta)^{\frac{3}{2}}}$$

$$=\sqrt{2}\frac{1+\tan^3\theta}{\left(\frac{1}{\cos^2\theta}\right)^{\frac{3}{2}}}=\sqrt{2}\frac{1+\tan^3\theta}{\frac{1}{\cos^3\theta}}=\sqrt{2}(\sin^3\theta+\cos^3\theta)$$

ここで，$s=\sin\theta+\cos\theta\left(0\leqq\theta<\frac{\pi}{2}\right)$ とおくと

$s^2=1+2\sin\theta\cos\theta$

$\sin\theta\cos\theta=\frac{s^2-1}{2}$

また，$s=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)$ $\left(0\leqq\theta<\frac{\pi}{2}\right)$ なので

$1\leqq s<\sqrt{2}$ である。よって，$\frac{B}{A}$ に代入して

$\frac{B}{A}=\sqrt{2}s\cdot\left(1-\frac{s^2-1}{2}\right)=\sqrt{2}s\left(\frac{3}{2}-\frac{s^2}{2}\right)$

この関数を $g(s)=\sqrt{2}s\left(\frac{3}{2}-\frac{s^2}{2}\right)$ $\left(1\leqq s<\sqrt{2}\right)$ とする。

$g'(s)=\frac{3\sqrt{2}}{2}-\frac{3\sqrt{2}}{2}s^2$ となるので，増減表は以下の通りである。

s		1	・・・	$\sqrt{2}$
g'		0	−	
g		$\sqrt{2}$	↘	1

よって，$g(s)$ の最小値は $s=\sqrt{2}$ のときに

$g\left(\sqrt{2}\right)=3-2=1$ である。

よって，$\frac{B}{A}\geqq 1$ である。

よって，$B\geqq A$ である。

5．まとめと今後の課題

これまで解答の多様性に着目した教材を開発してきたが，空間図形の教材ばかりであった。本稿では，不等式の証明の題材で，新しく多様な解答を含んだ教材を開発することができた。

開発した教材には，３つの本質的なアイディアの異なった解答が内在されていること，それぞれの解答が同様なレベルで考察が必要である解答同士であることが満たされており，多様な解答を議論する授業を実践するに十分な教材であり，その開発が本稿の成果であると考える。

しかし，今回の教材研究を経て，考えることは，そもそも「解答が異なるとはどういうことか？」である。ただ多様に解答を内在している教材では，授業の実践を考えた場合まだ適切な教材とは言えない。例えば，解答が多様に存在するといったところで，それぞれの解答が，「途中計算だけ異なる」であったり，「途中からは一緒である」であったり，「表記だけが異なっている」であったりした場合，それらは生徒の議論の中では，議論の対象にならない。むしろ，生徒の議論の中では，同じ解答とみなされるであろう。

多様な解答を議論する授業を想定した場合に，必要とされる教材の条件として，教材に内在する解答の多様性には，それぞれに「本質的なアイディアの違い」があることが重要である。そのため，十分に教材研究をし，解答の多様性が本当に多様かどうか検討することが求められる。

さらに，内在する解答同士が，１つの解答だけ簡単でありすぎたり，難しすぎたりしても，解答同士の議論がベストアンサーを決めるのに，十分な議論にならない。答えが決まってしまうからである。どれも同等に考察が必要であるような解答同士が望ましいであろう。

今後の課題として，授業実践がまだであるので，まずは今回の教材をもとに実際に授業し，生徒たちの解答についての価値観を整理することが一番の課題である。生徒がこの教材に対して「どのような価値観を持っているのか」について明らかにし，生徒たちが数学を実際に体験し活発に議論してくれることを期待したい。

引用参考文献：

・高等学校学習指導要領　平成21年３月告示　文部科学省

・カッツ 訳中根美知代ほか(2005)．数学の歴史．共立出版．