新学習指導要領における「課題学習」の教材例

―導入・内容理解・発展の各場面における扱い―

数学科　川谷内哲二・戸田　偉・外山　康平・大島　崇

（要約）　平成24年度から先行実施される学習指導要領において，数学Ⅰおよび数学Aにおいて数学的活動を重視した「課題学習」が導入される。その教材例として，すでに教科書等で紹介されているが，学校の実情に応じた適切な課題を設定し，実践することが望ましい。そこで，数学Ⅰのデータの分析，数学Aの場合の数と確率，整数の性質，図形の性質の４つの領域について，導入時の課題，内容理解のための課題，発展教材としての課題という位置付けで，課題学習として教材を作成した。本稿では，課題学習の教材例とその扱いについて紹介する。

キーワード：課題学習，数学的活動，新学習指導要領

1.　はじめに

平成25年度から施行される高等学校における新学習指導要領が平成21年３月に公示された。数学と理科については，１年前倒しで平成24年度から施行される。

現行学習指導要領においても「数学的活動」を重視するように目標に掲げられているが，今回の改訂では，さらに重視されている。課題学習は，実生活に関連付けたり，学習内容を発展させたりして，生徒の関心や意欲を高める課題を設け，数学的活動を特に重視して行うために設定されている。

本校数学科では，一昨年と昨年の２年間にわたり，数学的活動を重視した教材の開発とその実践に取り組んできた。今年度は，これまでの実践を踏まえて，課題学習としての具体的な教材の開発に取り組むこととした。学習指導要領では，数学Ⅰおよび数学Aの課題学習は，「内容またはそれらを相互に関連付けた内容を生活と関連づけたり発展させたりするなどして，生徒の関心や意欲を高める課題を設け，生徒の主体的な学習を促し，数学のよさを認識できるようにする」とある。また，内容の取扱いでは「それぞれの内容との関連を踏まえ，学習効果を高めるよう適切な時期や場面に実施するとともに，実施に当たっては数学的活動を一層重視するものとする」とある。教科書には，課題学習の例がいくつか掲載されているが，各学校の実情に応じた課題の内容や方法が重要である。このことを踏まえて，導入としてや，内容を理解するための扱いとして，および発展教材としてなど，指導する時期や場面を考慮した具体的な教材について検討した。その教材例について紹介する。

2.　数学Ⅰ「データの分析」における課題学習

(1)　導入時の課題学習

(ア)　教材案

> 時間を正確に計る，その正確さについて考えよう。
>
> 各グループ内で，ストップウォッチの時計表示を見ずに10秒を計ってみよう。一人５回ずつで合計30回計測し，その結果を分析する。手順は，以下の通り。
>
> １．まず，グループ内の計測結果を『結果記入

シート』(図1参照) に記入しよう。
2．記入後，度数を『ヒストグラムシート』でヒストグラムに表してみよう。
3．『結果記入シート』をもとに，『10個の数値シート』を計算しながら埋めてみよう。
4．『10個の数値シート』をもとに，どのグループが「もっとも正確に時間を計れる」と判断できるか。各個人で，投票し，その理由も記述しなさい。

(イ) 展開例

本時の内容は，データ分析における単元「データの整理」(実教) の導入的課題として，本課題学習を位置付けたい。

まず，(1)に対して，各グループ6人1グループで，10秒を時計表示を見ずに計っていく。各グループ3つのストップウォッチを準備し，3人が計測，3人が記録，それを5回で交代するような形で，時間を短縮し，各自の記録をとっていく。

次に(2)では，得られた結果を，ヒストグラムに表示する。階級値7.5から12.5まで0.5秒幅ずつとり，各階級の度数をまとめていく。

最後に(3)で，各グループ10個の数値を計算していく。10個の数値は，以下の通りである。

1．平均値
(度数×階級値の総合計)÷(30－外れ値の数)
2．中央値
(15番目の階級値＋16番目の階級値)÷2
3．最頻値
(最も度数が高い階級)
4．四分位範囲
(23番目の階級値 (即ち，第3四分位数)
－8番目の階級値 (即ち，第1四分位数))
5．範囲
(最大値－最小値)
6．階級値【10.0】の%
(階級値【10.0】の度数)÷30×100
7．階級値【9.5，10.0，10.5】の%
(階級値【9.5，10.0，10.5】の度数合計)
÷30×100
8．外れ値の%
(外れ値の度数)÷30×100
9．階級値【10.0】が4点，階級値【9.5，10.5】が2点，階級値【9.0，11.0】が1点の合計点
10．階級値【9.5，10.0，10.5】が1点，外れ値が－1の合計点

これらを特に，導入的な課題学習として位置付けるために，名称を与えずに，計算させてまとめさせておく。正確さを計るための考察の切り口が多様であること，またそれぞれの切り口を次節以降の授業の中で，用語化して理解を深めてもらう。

最後に，(4)では，各グループの10個の数値をもとに，正確さを判断し，その理由も記述して，「どのグループが最も正確か」を投票してもらい，順位を決めていく。

結果記入シート

階級	階級値	度　数
外れ値 (短すぎ)		
7.25 ～ 7.75	7.5	
7.75 ～ 8.25	8	
8.25 ～ 8.75	8.5	
8.75 ～ 9.25	9	
9.25 ～ 9.75	9.5	
9.75 ～ 10.25	10	
10.25 ～ 10.75	10.5	
10.75 ～ 11.25	11	
11.25 ～ 11.75	11.5	
11.75 ～ 12.25	12	
12.25 ～ 12.75	12.5	
外れ値 (長すぎ)		

図1．結果記入シート

(2) 内容理解のための課題学習

(ア) 教材案

> プロバスケットボールチームのリンク栃木と日立サンロッカーズの2チームの個人スタッツがある。各チームの成績表を基にして，次の問いに答えなさい。
>
> (1) 各チームの平均得点率について，最大値，最小値，第一四分位数，第二四分位数，第三四分位数を求めなさい。
>
> (2) 各チームの平均得点率について，箱ひげ図を作りなさい。
>
> (3) この結果から，各チームの特徴，チームカラーを分析し，その理由も答えなさい。

与えるデータは，以下の通り。

JBL2010-2011シーズンの個人スタッツから引用したものである。

No	選手名	G	リバウンド TOT	STL	BLK	AVG
0	田臥　勇太	31	82	40	3	8.71
6	ランディー・ホーカム	22	126	9	10	12.23
8	大宮　宏正	36	71	11	8	3.19
9	山田　謙治	19	11	6	0	1.47
13	安齋　竜三	31	41	11	2	3.81
15	竹田　謙	36	83	21	5	5.67
21	町田　洋介	13	3	0	0	1.85
32	ショーン　ヒンクリー	10	17	1	2	2
34	伊藤　俊亮	35	181	18	10	6.66
37	並里　成	10	8	1	0	2.1
40	田中　健	30	132	21	5	5.87
41	タイラー ニュートン	12	59	1	8	5.83
91	片岡　大晴	35	42	14	1	5

図1；リンク栃木個人スタッツ2010-2011

No	選手名	G	リバウンド TOT	STL	BLK	AVG
5	上山　博之	34	27	5	1	3.53
6	小林　大祐	36	75	23	2	12
8	大屋　秀作	14	13	3	0	1.79
9	西村　文男	36	72	30	0	7.78
10	山田　哲也	9	4	1	0	0.33
12	アルフレッド・アボヤ	28	125	19	7	6.75
14	中濱　達也	24	22	1	2	1.17
15	竹内　譲次	36	438	27	44	13.31
16	松井　啓十郎	36	57	10	2	8.42
20	佐藤　稔浩	24	71	22	1	3.38
21	岩隈　隆士	31	19	4	1	1.74
27	近森　裕佳	14	7	1	0	1.14
28	酒井　泰滋	15	19	7	2	1.27
31	井上　聡人	0	0	0	0	0
35	タイラー・スミス	36	221	35	7	13.86
45	鹿野　洵生	3	2	0	0	0

図2；日立サンロッカーズ個人スタッツ2010-2011

(イ) 展開例

本時の内容は，データ分析における単元「データの整理」(実教) の内容理解を深めることを第一義とした課題として，本課題学習を位置付けたい。

まず，得られる箱ひげ図は以下の通りである。

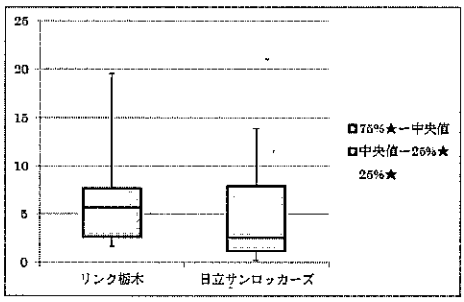


図1：平均得点

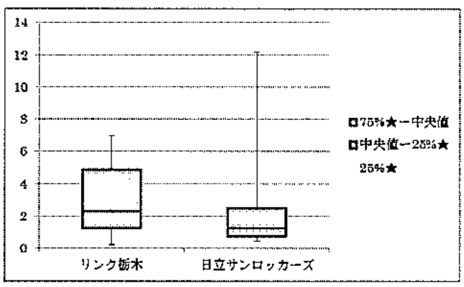


図2：平均リバウンド

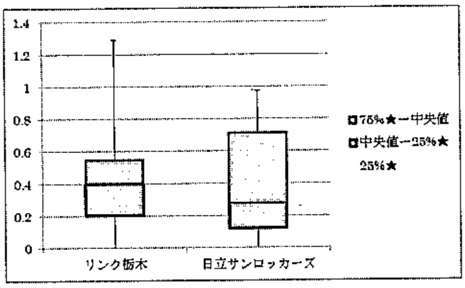


図 3：平均スティール

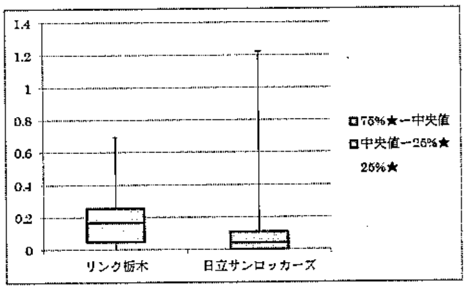


図 4：平均ブロック

箱ひげ図から読み取れることは，以下の通りである。

リンク栃木

・箱ひげ図の位置が高い位置にあることから，得点力はリンク栃木のほうが高い．四分位範囲もリンク栃木のほうが小さいので，たくさん点を取れる選手がいる一方で，ほかの選手も均等に点数をとるチームの特徴がうかがえる。

・リバウンドについては，日立サンロッカーズは最大値は大きく勝っているが，箱の位置は低いので，一人がたくさんリバウンドをとりほかの選手はリバウンドを取れていないチームの特徴がうかがえる．一方で，リンク栃木は全員でリバウンドをとっている。

昨年のチームの順位は，日立サンロッカーズが4位で，リンク栃木は5位であった。その結果からも，平均得点の高いチームが決して勝つのではなく，リバウンドの強いチームが勝つことがわかる。バスケットにおける「リバウンドを制するものはゲームを制す」が理解される例となっている。

(3) 発展学習としての課題学習

(ア) 教材案

都道府県庁所在市別1世帯当たり年間の野菜品目別購入数量（二人以上の世帯）2010年のデータに関して次の問いに答えなさい。

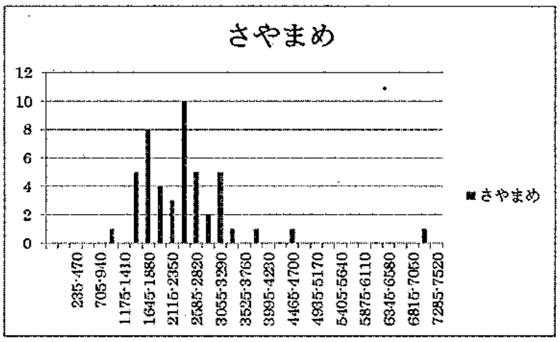
(1) 6つの野菜の購入数量のヒストグラムをそれぞれ作成しなさい。

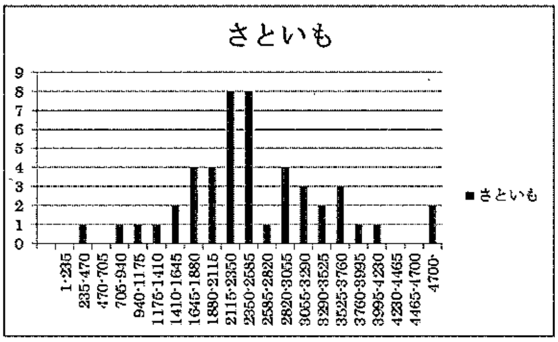
(2) 平均数量の値が近い，2種の野菜の組（ブロッコリーとほうれんそう，だいこんとたまねぎ，さといもとさやまめ）それぞれに対して，四分位偏差を調べることによって，どちらのデータがより値がちらばっているかを調べなさい。

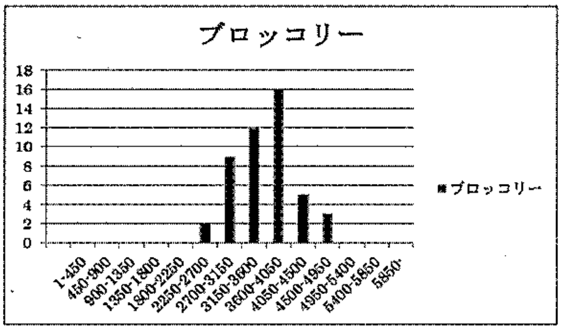
(3) 外れ値のあるデータに対して，その外れ値が存在する理由を考察しよう．考察するために必要となるデータがあれば調べてみよう。

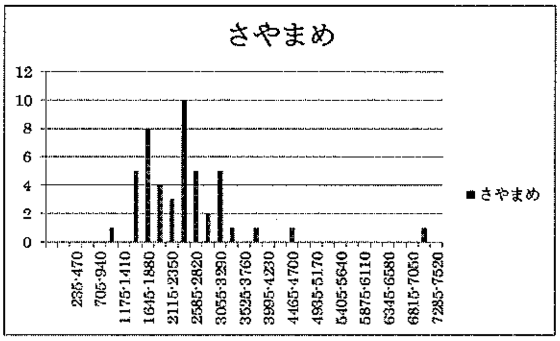
都道府県庁所在市	ブロッコリー	ほうれんそう	だいこん	たまねぎ	さといも	さやまめ
札幌市	3,100	4,223	17,785	21,341	1,082	1,766
青森市	3,269	4,427	15,111	17,843	917	2,889
盛岡市	4,054	4,943	16,713	18,218	1,989	2,539
仙台市	3,714	4,549	17,942	15,215	2,393	2,406
秋田市	4,249	5,567	14,536	15,075	1,414	4,587
山形市	4,811	5,745	11,152	13,319	3,585	3,216
福島市	3,059	3,759	13,405	13,466	2,115	2,486
水戸市	4,049	3,936	15,451	17,662	2,097	2,294
宇都宮市	3,897	4,149	19,826	15,535	2,999	2,573
前橋市	3,819	3,815	15,094	14,043	3,837	2,256
さいたま市	4,513	4,520	20,889	18,572	2,577	3,179
千葉市	4,017	4,177	16,553	16,578	3,209	3,841
東京都区部	4,673	3,858	16,112	16,244	2,376	3,458
横浜市	4,204	3,495	15,103	17,775	2,155	3,249
新潟市	3,745	4,144	18,566	17,692	4,933	7,084
富山市	3,609	4,002	13,186	14,224	2,943	2,371
金沢市	3,668	4,002	14,492	15,094	2,312	2,431
福井市	3,369	4,167	10,209	14,209	3,320	1,789
甲府市	3,449	3,203	14,029	13,438	2,369	2,008
長野市	3,784	3,554	18,320	12,867	2,317	1,968
岐阜市	4,016	3,950	12,525	13,856	3,553	2,657
静岡市	3,801	4,452	16,083	15,544	3,045	2,813

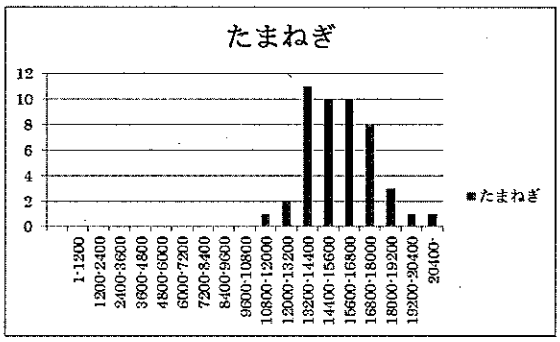
名古屋市	3,834	4,092	14,351	15,808	4,082	2,525
津市	3,178	3,949	13,709	16,636	2,504	2,557
大津市	3,331	4,261	14,008	15,927	2,159	1,849
京都市	3,478	4,334	16,101	19,397	2,419	3,215
大阪市	3,956	3,649	13,873	17,547	1,947	2,556
神戸市	4,433	4,295	12,939	14,281	1,652	2,133
奈良市	4,082	3,938	13,268	15,424	2,289	3,235
和歌山市	3,659	3,072	12,192	14,123	2,180	2,376
鳥取市	3,495	3,780	12,509	13,296	1,963	2,592
松江市	3,662	4,356	13,948	16,532	2,409	1,788
岡山市	3,486	3,117	11,164	14,743	1,749	1,633
広島市	2,659	4,053	16,326	16,230	2,679	2,678
山口市	2,845	3,491	10,055	15,025	1,836	1,656
徳島市	2,964	4,168	10,295	15,903	1,862	2,717
高松市	2,946	3,641	11,708	14,884	1,270	1,633
松山市	3,017	3,480	10,422	12,189	2,362	3,020
高知市	2,845	3,346	11,421	11,832	1,639	1,648
福岡市	3,054	2,966	11,859	16,603	3,226	1,833
佐賀市	3,605	4,486	12,998	17,498	3,215	2,060
長崎市	3,265	2,764	10,522	17,173	2,176	1,903
熊本市	3,220	3,244	9,812	14,359	3,579	1,678
大分市	2,746	3,446	12,499	18,485	4,850	1,459
宮崎市	3,533	2,734	12,886	16,627	3,394	991
鹿児島市	3,258	2,434	12,929	17,300	2,870	1,520
那覇市	2,607	2,720	14,457	15,077	409	1,511
全国平均	3,423	3,540	13,745	15,262	2,222	2,320









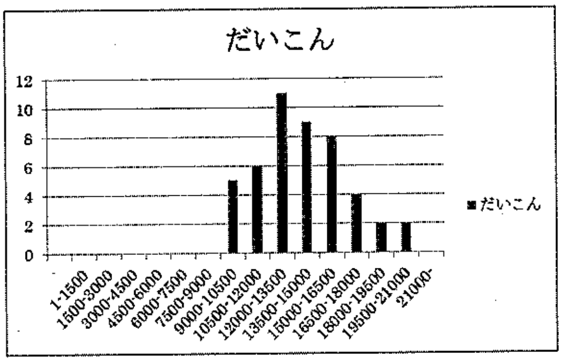


(イ) 展開例

本時の内容は，データ分析における単元「データの整理」(実教出版) の発展的課題として，本課題学習を位置付けたい。

まず，(1)に対して，ヒストグラムを作成していく。作成にあたっては，まず，階級の幅をどう決めるかという問題がある．ここでは，決め方を教師側が指導せず，生徒たちに決めさせるように授業展開していく。

階級の幅は，それぞれであるが，以下のようにヒストグラムを作成することができる。



作成に当たっては，小グループを作成し，作成時間の短縮をさせてもよいように考える．例えば，6人1グループに対して，1人1ヒストグラムを作成すれば，スムーズに展開できるように考える。

(2)では，平均数量の近い2つの値のどちらがよりデータが散らばっているかが問題となる。ここでは，四分位偏差を調べる活動を意図している。平均数量が異なれば，四分位偏差の大小を比較したところで，平均数量そのものが異なっているために，単純に四分位偏差の大小が散らばり具合の基準にならない。したがって，ここでは，平均数量の近い野菜を2つで1組とし，四分位偏差で散らばり具合を比較できるように設定した。

また，「四分位偏差は，外れ値に影響しにくい。」ことを確認できればよいと考える。つまり，散らばりを調べるにあたって，範囲（最大と最小の差）では，外れ値に影響されてしまい，散らばり具合を確実に調べることができないデメリットもある。そこで，四分位偏差をとる。四分位偏差は，第一四分位値と第三四分位値の値しか計算に用いないことで，外れ値に影響がないのである。四分位偏差の意味を理解するだけでなく，実感してもらうことがそのねらいである。

さやまめの四分位偏差は1024÷2=512，さといもの四分位偏差は1246÷2=623，ほうれんそうの四分位偏差は781÷2=390.5，ブロッコリーの四分位偏差は778÷2=389，たまねぎの四分位偏差は3076÷2=1538，だいこんの四分位偏差は3891÷2=1945.5である。近い平均値の組同士に着目すれば，たまねぎよりはだいこんの方がよりデータが散らばっている，さやまめよりはさといものほうがよりデータが散らばっている，ブロッコリーとほうれんそうは散らばり具合もほぼ等しいという結果が得られる。

さらに，さやまめの範囲は最大値7084，最小値991であり，さといもの範囲は最大値4933，最小値409である。したがって，範囲の大きさだけなら，さやまめの方が大きい。ところが，これは，新潟県の数量が大きすぎるだけであり，最大値が外れ値となっている。つまり，外れ値を見なければ，散らばり具合はさといもの方が大きく，ヒストグラムを見ても読み取れる。よって，外れ値に影響せず，範囲に影響せず，四分位偏差の大小で，散らばり具合を調べられるいい具体例となっていることがわかる。

最後に，外れ値に対する考察である。特に，さやまめに対する新潟県の値の大きさは著しく，ヒストグラムを見れば，外れ値であることがわかる。「外れ値は，除外する点ではなく，理由を考えることで新たな発見を可能とする」値である。ゆえに，ここでは，「逆に，外れ値になっている理由は何だろう？」を考察する．調べてみると，新潟県はもともとさやまめの作付け面積が日本一であり，枝豆を非常によく食べる習慣があるようである。このような新しい発見を，外れ値から読み取ることができる活動は，教科書においては扱われないが，現実世界では重要な活動であると考える。

３．数学Ａ「確率」における課題学習

(1)　課題学習の教材作成に当たって

このたびの学習指導要領改訂の基本方針には，「数学的な思考力・表現力を育て，学ぶ意欲を高めるようにする。」，「自分の考えを分かりやすく説明したり，互いに自分の考えを表現し伝え合ったりすることなどの指導を充実する。」とある。これは，数学的思考力を身に付けさせると同時に，自身で課題を発見し，その解決に向けて，考えを練り，思考の過程を適切に表現し，他人と共有する能力の育成を目指すものだと考える。そのためには，課題発見的な教材の作成と，考えさせ，それを表現させる授業の実施が求められる。そうした授業の一案として，以下のような課題学習を考案した。

(2)　導入時の課題学習

(ア)　教材案

(1)「赤球２個と白球３個が入っている袋がある。この袋から同時に２個の球を取り出すとき，２個とも白球である確率を求めなさい。」という問いに対して次の２つの解答を得た。

解答１

２個とも白球であるかそうでないかのどちらかなので，求める確率は $\frac{1}{2}$

解答２

２個の球の取り出し方は，(白，白)，(白，赤)，(赤，赤)の３通りだから，2個とも白球である確率は $\frac{1}{3}$

問．上記の２つの解答を考察しなさい。

(2)「区別のない３個のサイコロを同時に投げて，その目の和が10となる確率を求めなさい」の問いに対して次の解答を得た。

解答

３個のさいころの目の出方の総数は，異なる６個から重複を許して３個取り出す組合せの総数なので

$${}_6H_3 = {}_{6+3-1}C_3 = 56\text{通り}$$

また，和が10となるのは

（6，3，１），（6，2，２），（5，4，１），（5，3，２），（4，4，２），（4，3，３）　の６通り

したがって求める確率は $\frac{6}{5}=\frac{3}{28}$

問．上記の解答は正しいかどうかいいなさい。もし正しくないならば，誤りを指摘し，正しい解答を作りなさい。

(イ)　教材の扱い方

本時の内容は，「確率」の導入時の課題として位置付けたい。ただし，課題に取り組む前に基本的な確率の求め方まで学習しているものとする。（１時間程度）

「根元事象が同様に確からしい」とはどういうことかを確認し，理解するのに適する問題といえる。一見正しそうな解答を示し，考えさせることが重要。(1)で，「赤玉100個と白球２個」といった極端な例を用いて完璧に理解させ，(2)につなげたい。

(3)　内容理解のための課題学習

(ア)　教材案

Ａ君は次のように考えた。

「サイコロを６回振ることにする。m=1, 2, 3, 4, 5, 6 のおのおのについて，m回目に１の目が出る確率は $\frac{1}{6}$ である。したがって，６回のうちに少なくとも１回１の目が出る確率は

$\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=1$ である。すなわち，サイコロを６回振れば少なくとも１回は１の目が出る。」

問．Ａ君の考えは正しいかどうかをいいなさい。もし正しくないならば，誤りの原因をなるべく簡潔に指摘しなさい。

（80年京大）

(イ) 教材の扱い方

本時の内容は,「確率」の内容理解を深める課題として位置付けたい。

導入の教材同様,一見正しそうな解答を示し,考えさせることが重要。この課題では,排反事象では加算することができるという点と,m回目に1の目が出る確率は独立であり排反ではないという点の確認をしたい。また,余事象で求めるだけでなく,加算で求めるならば事象をどのように設定すればよいかを考えさせたい。(1回目に1が出る,1回目に1が出ずに2回目に1が出る,…)さらに,投げる回数を減らすなどをして,乗法定理の確認をしたい。

(4) 発展学習としての課題学習

(ア) 教材案

A．次の表はサマージャンボ宝くじにおける1ユニット当たりの順位,当選金額,本数である。1ユニットは,空くじを含めて1,000万枚,宝くじの販売金額は1枚300円である。

	金 額	本 数
1等	200,000,000 円	1 本
前後賞	50,000,000 円	2 本
組違い賞	100,000 円	99 本
2等	100,000,000 円	1 本
3等	5,000,000 円	10 本
4等	500,000 円	100 本
5等	50,000 円	2,000 本
6等	3,000 円	100,000 本
7等	300 円	1,000,000 本
ラッキーサマー賞	10,000 円	20,000 本

B．ある祭事の夜店に木製の手回し抽選器を使ったくじがある。この抽選器は100円で1回回せるという。運営者は慈善事業の一環として出店したらしく,くじ1回あたりの期待収益率は103%になっている。期待収益率とは,支出に対する収入の割合を意味する。

問．上記の2つのくじを考察し,どちらか一方のくじを行うとするならばどちらを行うか答えなさい。

(イ) 教材の扱い方

本時の内容は,「確率」の発展的課題として位置付けたい。新学習指導要領では,「期待値」の単元は数学Bに移行されたので扱いには注意したい。

Aでは期待値(ジャンボ宝くじは140円前後に設定されている)や勝率(購入金額に対して得られる金額が同額以上)などの観点から,買うか買わないか,また買うとすればどのような買い方をするかといった話だけではなく,販売元や収益の利用といった発展的話題にも触れられる。さらにBと比較することで,くじを行うかどうかの判断材料が期待収益率だけであるか,それ以外の要素が含まれるのか,というような点にも追求できると思われる。

(5) 授業実施時の留意点

導入,内容理解,発展のすべてにおいて,問題を解くことのみを重視しない。内容によって,ペア学習やグループディスカッション,クラス内でのディベート活動といった様々な学習形態を工夫できる。ペアやグループ内で意見をまとめ発表したうえで,クラス全体で共有するというように段階的に指導することで,自分自身の意見をより効果的に説明する能力や,論理的思考力がさらに高まるものと期待される。

4．数学A「整数の性質」における課題学習

(1) 整数の性質について

整数の性質については,小学校以来学習してきているがまとめて扱われてはいなかった。そこで,今回の改訂から設けられたのがこのセクションである。

以下に新指導要領における内容と，学習項目の概要を記す。

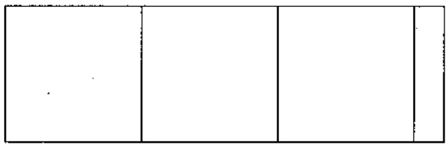
数学A
(2) 整数の性質
整数の性質についての理解を深め，それを事象の考察に活用できるようにする。
ア 約数と倍数
素因数分解を用いた公約数や公倍数の求め方を理解し，整数に関連した事象を論理的に考察し表現すること。
イ ユークリッドの互除法
整数の除法の性質に基づいてユークリッドの互除法の仕組みを理解し，それを用いて二つの整数の最大公約数を求めること。また，二元一次不定方程式の解の意味について理解し，簡単な場合についてその整数解を求めること。
ウ 整数の性質の活用
二進法などの仕組みや分数が有限小数又は循環小数で表される仕組みを理解し，整数の性質を事象の考察に活用すること。

一昨年度の紀要において，主に(ア)や(イ)の指導の具体例を，昨年度の紀要において(ウ)の具体例を考えた。今年度は，課題学習における教材例とその展開を考えてみた。

(2) 導入時の課題学習
(ア) 教材案
ユークリッドの互除法

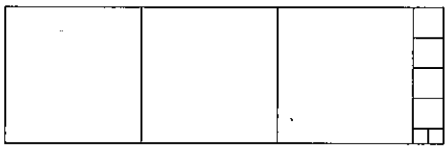
(1) 縦18cm，横58cmの長方形を，できるだけ大きな正方形で敷き詰めたい。このときの正方形の一辺の長さを求めなさい。
(2) 縦391cm，横529cmの長方形を，できるだけ大きな正方形で敷き詰めたい。このときの正方形の一辺の長さを求めなさい。

(イ) 教材の扱い方
時期としては，約数と倍数の指導が終わり，ユークリッドの互除法に入る時期が適当と思われる。
(1)は「18と58の最大公約数2を求めればよい」ことに気付く生徒がいるだろう。しかし，(2)のような大きな数の場合，2数を素因数分解して最大公約数を求めるという方法は，試行錯誤を伴い，難しいことが認識できる。（$391=17\times23$，$529=23\times23$ を見つけることができた生徒がいれば立派だが。）
そこで，(1)について，正方形の1辺を求める方法を紹介する。
(i) 1辺1cmの正方形なら敷き詰められるが，できるだけ大きな正方形で敷き詰めるので，長方形の短い方の辺（18cm）を1辺とする正方形でやってみると， 18cm×4cmの長方形が残る。



(ii) 次に，余った18cm×4cmの長方形を，できるだけ大きな正方形で敷き詰める。長方形の短い方の辺（4cm）を1辺とする正方形でやってみると， 2cm×4cmの長方形が残る。

(iii) 最後に，余った2cm×4cmの長方形を，できるだけ大きい正方形で敷き詰めることを考えると，1辺が2cmの正方形で敷き詰めることができる。



実際に方眼用紙を用いて切りながら学習することも考えられる。割り算とその余りと対応させながら，「2つの正の整数で始めれば，必ず有限回で終わ

る」「最後に最大公約数が表れる」ことを確認する。

58=18× 3 + 4

18= 4 × 4 + 2

4 = 2 × 2

このアイディアを用いて(2)を解決できないか？と課題を提示する。この方法の良さは？と発問する。

(3) 内容理解のための課題学習

(ア) 教材案

> (1) 2つの整数 44521 と 47053 の最大公約数を求めなさい。ただし，正の整数 a, b の最大公約数を $gcd(a, b)$ と表すことにする。
>
> (2) 2つの整式 $x^5+5x^4+7x^3-x^2-8x+2$ と $x^4-2x^2+12x-8$ の最大公約数を求めなさい。ただし，整式 A, B の最大公約数を $gcd(A, B)$ と表すことにする。
>
> (平成23年度1年1学期中間考査より)

(イ) 教材の扱い方

時期としては，(1)ユークリッドの互除法の学習中（数学A)，(2)は本来整式の割り算（数学Ⅱ）を学習した後であるが，割り算や組み立て除法を先取りし，本年の一年生に中間考査で出題した。事前の質問はかなり多かった（参考書・問題集にないためか？）が，(1)(2)ともに良く取り組んでいた。

(1) 47053=44521× 1 +2532 …①

44521=2532×17+1477 …②

2532=1477× 1 +1055 …③

1477=1055× 1 +422 …④

1055=422× 2 +211 …⑤

422=211× 2 …⑥

よって

$gcd(47053, 44521)$

$= gcd(44521, 2532)$ （①より）

$= gcd(2532, 1477)$ （②より）

$= gcd(1477, 1055)$ （③より）

$= gcd(1055, 422)$ （④より）

$= gcd(422, 211)$ （⑤より）

$= 211$ （⑥より）

(2) $x^5+5x^4+7x^3-x^2-8x+2$

$= (x+5)(x^4-2x^2+12x-8)$

$+9x^3-3x^2-60x+42$ …①

$x^4-2x^2+12x-8$

$= \left(\frac{1}{3}x-\frac{1}{9}\right)(3x^3-x^2-20x+14)$

$+\frac{43}{9}x^2+\frac{86}{9}x-\frac{86}{9}$ …②

$3x^3-x^2-20x+14=(3x-7)(x^2+2x-2)$

…③

$gcd(x^5+5x^4+7x^3-x^2-8x+2,$

$x^4-2x^2+12x-8)$

$=gcd(x^4-2x^2+12x-8,\ 9x^3-3x^2-60x+42)$

（①より）

$=gcd(x^4-2x^2+12x-8,\ 3x^3-x^2-20x+14)$

$=gcd\left(3x^3-x^2-20x+14,\ \frac{43}{9}x^2+\frac{86}{9}x-\frac{86}{9}\right)$

（②より）

$=gcd(3x^3-x^2-20x+14,\ x^2+2x-2)$

$= x^2+2x-2$ （③より）

ユークリッドの互除法は，整数環の2要素の最大公約数を求めるために用いられることが多いが，多項式環の2要素についても同様に最大公約数を求めることができる。生徒には，直接因数分解がしにくい大きな2整数や，共通因数のみつけにくい2つの整式も，ユークリッドの互除法によって最大公約数が見つかることを体験してもらいたい。

(4) 発展学習としての課題学習

(ア) 教材案

> A版やB版の用紙は，長い方を半分に折ると，もとの用紙と相似になる。

(1) A版やB版の用紙の短い方の辺の長さを1としたとき，長い方の辺の長さはどうなるか。

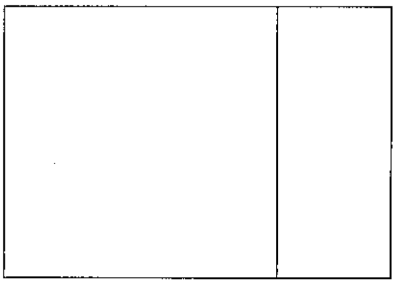
(2) A4のコピー用紙から1辺が短い方の辺の長さの正方形を切り取ると，1つの長方形が残る。この長方形から一辺が短い方の辺の長さの正方形を切り取ると，1つの長方形が残る。この操作を繰り返すとき，【導入課題】のように，有限回で終わるか？終わらないか？

(3) (2)を用いて，$\sqrt{2}$が無理数であることを示しなさい。

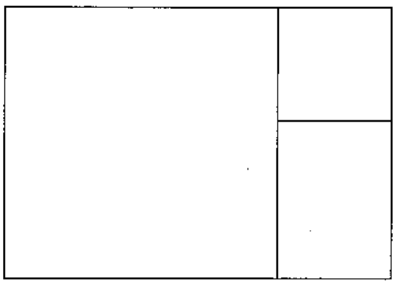
(イ) 教材の扱い方

時期としては，ユークリッドの互除法の学習後（数学A）がよいだろう。

(1)の$1:\sqrt{2}$は与えてしまってもよいが，主目的は(2)(3)である。生徒に考えを発表させたい。以下のような解答が考えられる。



(2) で，$1:\sqrt{2}$の長方形から1辺の長さ1の正方形を切り取ると，$1:(\sqrt{2}-1)$ すなわち $(\sqrt{2}+1):1$の長方形が残る。



この長方形から1辺の長さが短い方の辺の長さの正方形を1つ切り取ると，$\sqrt{2}:1$ の長方形が残る。よって，この操作はいつまでも続く。

(3) もし$\sqrt{2}$が有理数$\frac{n}{m}$（m, nは自然数）なら，(2)で縦m横nとおくことができ，操作は有限回で終わるはずである。ところが，いつまでも続くので，$\sqrt{2}$は有理数ではない。

学習後に，次のような話を添えると良いだろう。

「ユークリッドとピタゴラス

ユークリッドは紀元前300年頃に活躍した数学者であり，『ユークリッド原論』という数学書を編纂したといわれている。『ユークリッドの互除法』も，その原理がこの書に記されている。

『ピタゴラスの定理』で有名なピタゴラスは，紀元前500年頃の人である。当時の古代ギリシャ人にとっては，数とは自然数を意味しており，線分も点の粒子がビーズのようにつながってできていると考えられていたと言われている。

その考えによれば，2つの線分の長さの比は，ビーズの個数の比，すなわち整数と整数の比で必ず表せることになる。

しかし，このことに反する例が発見され，ピタゴラスと彼の弟子たちに，大きな衝撃を与えたと言われている。すなわち，無理数の発見である。

その反例とは，正方形の辺と対角線の長さの比（発展課題(3)）であった。」

5．数学A「図形の性質」における課題学習

(1) 導入時の課題学習

(ア) 教材案

(a) 与えられた線分を，作図によって3等分しなさい。

(b) 与えられた長さを1として，$\frac{3}{5}$の長さの線分を作図しなさい。

(c) 大きさ45°，30°，15°の角を作図しなさい。

(イ) 教材の扱いについて

中学校の図形の復習とこの章の学習内容の紹介のための課題である。相似条件や特殊な三角形（30°，60°の直角三角形と直角二等辺三角形）について確認することが主な目的である。特に，この章の最後の

節は，作図をテーマとして扱うため，このような課題を設定した。

$\frac{3}{5}$の長さの線分の作図は，1次方程式$5x=3$の解を作図によって求めたことになっている。このことから1次方程式$ax=b$（a, bが正の整数）の解を作図によって求めることが可能であることがわかる。

また，一般の角の3等分の作図は不可能であるが，折り紙や特殊な定規を利用することによって作図は可能である。この課題では90°や45°のような特殊な角の3等分の作図を行ったことになる。

この導入課題の扱い方，展開の方法によっては，生徒の更なる興味を持たせることが可能であろう。

⑵ 内容理解のための課題学習

㋐ 教材案

(a) 与えられた三角形の5心（重心，外心，内心，垂心，傍心）を作図しなさい。
(b) 5種類の正多角形を，コンパスと定規を用いて，実際に作図しなさい。
(c) 正十二面体を，画用紙などを用いて作りなさい。

㋑ 教材の扱いについて

(a) 例えば，△ABCの外心Oについて言えば，外接円の中心，すなわちOA=OB=OCであることはわかっていても，それが3辺の垂直二等分線の交点になっていることに結び付かない生徒がいる。そのような生徒に外心の定義を定着させるという意味で，実際に作図させることは重要である。また，解析，作図，証明，吟味という段階を踏まえて解答させることで，作図題の手順が確認できるとともに，基本的であるが一度はやらせておきたい課題である。

(b) 描きやすい正三角形，正方形，正六角形の他に，正十二角形や正二十四角形，正五角形などを描かせたい。これらの正多角形を含めないと5種類にならない。正十二角形や正二十四角形の作図は，作図の解法は比較的容易であるが，実際に作図することは，細かい作業になって難しい。理論と実際の違いを感じることができる場面でもある。正五角形の作図については，理論が難しいがいろいろなものに取り上げられているので，それらを参考にして取り組んでほしい。ただ，どのような課題についても，自分なりの工夫や考えがまとめられなければならない。最近，指摘されているコピペのレポートで終わらないような指導が必要である。

(c) (b)で作図するだろう正五角形を使って，正十二面体を作らせる。正四面体や立方体は中学生のときからよく見ているので，イメージはある程度できているが，正八面体や正十二面体はほとんどの生徒がイメージできていない。実際に作ってみることでその様子を観察できて，イメージを持たせることができ，空間感覚を養うのに役立つとともに，多面体の復習につながる。

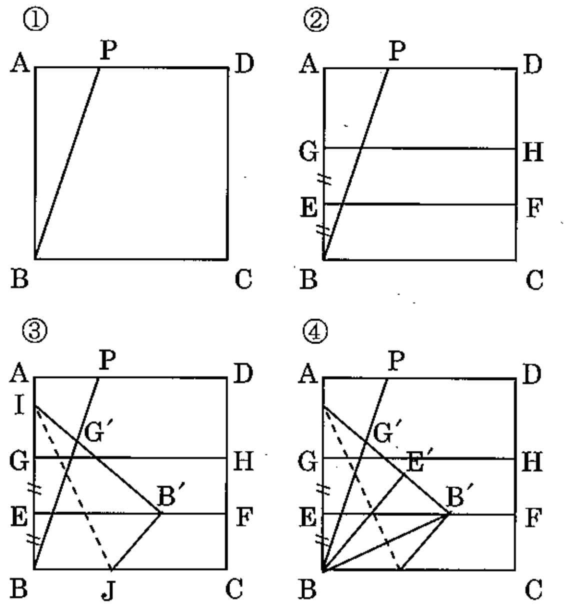
⑶ 発展学習としての課題学習

㋐ 教材案

(a) 与えられた長さを1として，2次方程式$x^2+2x=1$の正の解を，作図によって求めなさい。
(b) nを正の整数として，作図できる$n°$の角は，nがどのような値か。また，実際に作図しなさい。
(c) 折り紙では，通常の作図が可能な上，任意の角の3等分の作図が可能である。具体的には，次の手順で角の三等分線が作図できる。

　これを証明して，折り紙を使って20°の角を折ってみよう。

〔角の三等分線の作図手順〕



① 折り紙ABCDの辺AD上の任意の点Pに対して，折り目BPを付ける。

② 辺AB上に，BE=EGとなるように，折り目EF，GHを付ける。

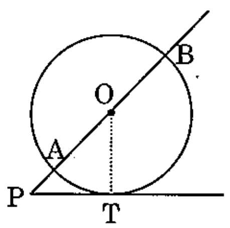
③ 点BがEF上に，点GがBP上にくるように折り返す。

④ G，E，Bが折り返された点をG′，E′，B′とするとき，∠G′BE′=∠E′BB′=∠B′BCとなる。

(イ) 教材の扱いについて

(a) 方程式$x^2+2x-1=0$を解の公式で解くと，$x=-1\pm\sqrt{2}$であるから，与えられた長さ1を基準として，長さ$\sqrt{2}$の線分を作図し，そこから1を引いて，$\sqrt{2}-1$を作図することができる。多くの生徒はそのように考えて作図するであろう。それを方べきの定理を利用することで，解の公式を用いて解を求めずに作図することができる。

右図のように，点Pから円の中心Oを通る割線PABと接線PTを引くと，方べきの定理よりPA・PB=PT^{2}が成立する。これを利用することにより，方程式$x(x+2)=1^2$の解が作図できる。PA=x，PB=x+2，PT=1となるようにとればよい。すなわち，半径1の円に，長さが1の接線PTをとり，Pと円の中心Oを結ぶとき，Pに近い方の交点までの長さがこの方程式の解である。



導入課題で，1次方程式$ax=b$（a，bが正の整数）の解を作図によって求めることができた。さらに，2次方程式$x(x+a)=b$，$x(x-a)=b$，$x(a-x)=b$（a，bが正の数）の正の解を作図することができる。

(b) 導入課題で，15°の角の作図をし，内容理解のための課題で，正五角形の中に現れる18°の作図が可能である。よって，3°の角の作図ができる。角の3等分線の作図ができないので，これ以上小さな角の作図はできない。ゆえに，3の倍数の角，すなわち$3m$°の角の作図が可能ということになる。

(c) 折り紙による作図と通常の定規とコンパスによる作図の違いについて考えさせるのもよい。

6．おわりに

今回は，新学習指導要領から新たに加わった「課題学習」の教材例について検討した。それぞれが担当した領域について，お互いに充分な協議ができていない。そのため，課題の設定の仕方や内容が各担当者に任された形になってしまった。1つの課題に対して，授業中に扱うのか，レポートとして課すのか，授業で扱うのであればその時間はどの程度か，また学習形態はどうかなど，実施するにあたってまだ不十分な点が多い。

昨年度までの2年間に取り組んできた「数学的活動を重視した指導　～新学習指導要領における教材開発～」が教材の開発に役立っていることは間違いないが，課題学習における数学的活動についての考察ができていない。ただ，生活に関連付けたり発展させたりしてという面について，充分に考慮されていると思う。これらのことを踏まえて実践ができる

ように進めていくとともに，授業を実践することが今後の課題といえよう。

課題学習は，指導する時期や場面によるが，オープンエンドの問題が，個人の課題としてグループの課題として，いずれにおいてもそれぞれ学力に応じた取り組みができると思われる。今回は，そのようなオープンエンドの問題を盛り込むことがなかなかできなかったが，いろいろな領域においてこのような教材を検討することが1つの課題である。

来年度から新学習指導要領がスタートし，課題学習を実践していく。先の述べた課題を踏まえて改善を加え，よりよい課題学習の教材ができ上がるように研究を進めていきたい。

（文責　1，5，6　川谷内，2　外山，3　戸田，
4　大島）

〔参考文献〕

・高等学校学習指導要領解説　数学編
文部科学省

・岡本和夫　数学A　実教出版

・山本誠志　[図解]確率がわかる本　Gakken

・あらのHP宝くじの話
http://ara.moo.jp/etc/kuji.htm

・吉田稔　飯島忠
心を揺する楽しい授業　話題源数学　とうほう