地図投影法の授業実践

数学科　川谷内哲二

投影によって，球面である地球が平面上の地図に変換させる。地図の４要素（正積・正方位・正角・正距)がどのように保持されているか，数学的に見てその原理や有用性はどうかを，平面図法(正射図法・心射図法・平射図法)，方位図法（正距方位図法・ランベルト正積方位図法)，円筒図法（ランベルト正積円筒図法・メルカトル図法)，非投影による正積図法（サンソン図法・モルワイデ図法・グード図法)を教材として，地理選択者を対象に，地理担当者とともにTTで授業を実践した。パワーポイントを使用し，視覚的に理解できるように配慮して実践したが，内容的に難しいため，理系生徒には好評で授業のねらいが伝わったが，文系生徒には難しく十分に理解してもらえなかった。本稿は，その授業実践についての報告である。

キーワード：地図投影法　授業実践　数学と地図

1　はじめに

最近の学習指導要領における地理ＡおよびＢの内容の取り扱いでは，地図に関して「地球儀や地図の活用」は謳われているが，「地図の投影法には深入りしないこと」となっている。そのため，地理における地図についての授業では，地図の用途や目的についての内容となり，地図が投影法によってどのように作成されているかについて説明されない。自分が中学生や高校生のときに，サンソン図法やモルワイデ図法は正積図法で分布図などに使用され，メルカトル図法は正角図法で航海図などに使用される，と習ってきた。しかし，なぜ正積図法なのか，なぜ正角図法なのか，疑問に感じていたが納得できなかった。高度な数学を使用しているため，理解することは難しいことは事実であるが，こうだから正積図法であるとか，こうだから正角図法であるという簡単な説明ができないものだろうか。地図の作成方法が納得できれば，地図の用途についての学習も理解しやすいのではないだろうか.

平成17年度から，「空間感覚育成のための教材･教具の開発」をテーマとして，いろいろな空間に関連する教材を扱ってきた。地図もその中の１つの教材である。球面である地球を，いかに平面上の地図に変換するか，その中に現れる数学はたいへん興味深い。空間感覚育成のための教材としてのみならず，微積分などの数学的内容を学ぶよい教材例にもなる。また，多くの先人達の英知を知ることもできる。

そこで，本校の地理担当教員に，「地理の授業で，地図の投影法についての授業を実践してみませんか」と持ちかけたところ，快く了解をいただくことができた。本稿は，その授業実践の報告である。

2　授業の実践

(1)　対象者

新３年生地理選択者27名

13名（すべて文系）と　14名（文系６名，理系８名）の２クラスで実施

(2)　日時

平成20年３月17日（月）～19日（水）

２展開クラス×３時限

本校では，3学期期末試験後に特別時間割を組んで授業を行い，その後春休みに，理科・社会を中心とした春期補習を行っている。その特別時間割のうちの3日間で実践した。

(3) 授業内容（教材）とその展開

授業は，地理担当者とのチームティーチングで実践した。

3時限の授業は，すべてパワーポイントを使用し，液晶プロジェクタで表示して行った。用語の定義から解説までをパワーポイントで作成して授業を展開した。その理由は，通常の地理の授業において，すべてパワーポイントで行われていることもあったが，地図投影法を解説するに当たり，頻繁に球や図形を描かなければならないため，時間の節約と，生徒の理解を助けるためにも効果的であると考えた。また，アニメーション機能をフルに活用し，視覚的にイメージし易いように工夫をして，より理解の促進を図った。

(ア) 第1時限

最初に，地理担当者による地図の用途と種類についての授業が20分ほど行われた。その内容は，一般図と主題図，実測図と編集図の意味，大縮尺・中縮尺・小縮尺の違い，地図の4要素（正積，正方位，正角，正距），方位と方角の違いについての説明であった。

その後で，平面図法について，私が説明を行った。平面図法の3つの図法（正射図法・心射図法・平射図法）のうち，数学的に興味深い円々対応である平射図法に重点をおいた。Grapes 3D※1を使用して，正射図法・心射図法・平射図法によって，球面上の円が，平面上でどのような図形に変換されるかを見せた（図1参照）。生徒用プリントでは，放物線や双曲線に移されることを例に挙げておいたが，授業では解説をせずに，各自の課題とした。平射図法による円々対応については，座標を用いずに，三角形の合同を使って等角であること，球面上の円を接点とする接円錐の頂点の像が対応する円の中心となっていることを解説した。

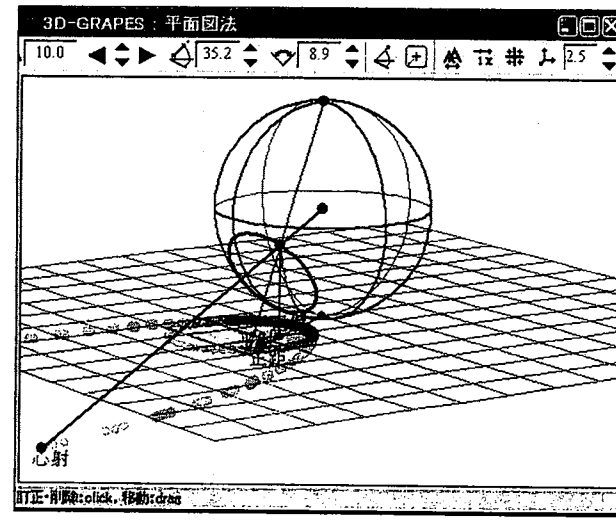


図1　平射図法と正距方位図法（Grapes 3D）

(イ) 第2時限

正距方位図法について，最初にパワーポイントとGrapes 3Dを使って，ミカンの皮をむくようなイメージで球面上の点が平面上の点に変換される様子を見せて，正距・正方位であることを説明した。また，外側ほど面積が拡大されているので，正距を犠牲にして，外側ほど間隔を短くして正積になるように変換したのが，ランベルト正積方位図法であることを紹介した。

地理の授業では，余り使用されず地図としては活用されていないが，数学的に興味深い性質があり，球面の面積を計算するのに有効なのがランベルト正積円筒図法である。

平成15年度の学習指導要領の改訂で，球の表面積についての学習が中学校から高校に変更され，半径rの球の表面積が$4\pi r^2$となることを高校で指導しなければならなくなった。これを説明するのに，教科書で扱われているように指導することもあるが，ここで扱うような扱い方をすることがある。

次ページの図2において，線分ABは点Pにおける円Oの接線でPはABの中点である。円Oに外接する正方形の1辺にABを正射影した線分がCDであ

る。このとき，線分ABを軸NSの周りに回転してできる直円錐台の側面積と，線分CDを軸NSの周りに回転してできる直円柱の側面積（$2h\times 2\pi R$）が常に等しい。扇形の面積を三角形の面積と捉えるように，直円錐台の側面積を台形の面積を捉えて計算すると容易に等しいことを示すことができる。（資料の授業用プリント参照P 37）

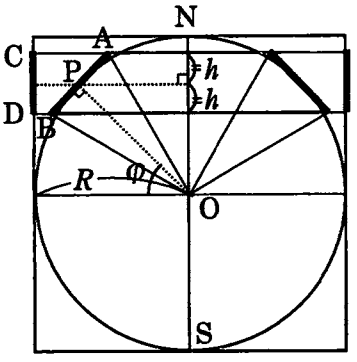


図2　ランベルト正積円筒図法

ここで，$h\to 0$ として，球面上の微小区間が常に円柱の側面積を等しくなるから，半径rの球の表面積が半径r，高さ$2r$の円柱の側面積に等しくなる。しかも，球（地球）において，緯線と緯線の間の部分の面積が，それに対応する外接円柱の側面積で計算できることは，正積図法を考える上でたいへん有効である。

方位図法とランベルト正積円筒図法の説明を終えて10分程度残ったので，地理担当者が正距方位図法を使った演習問題で，この図法の利用法等のまとめを行った。

(ウ)　第3時限

世界地図でよく使われているメルカトル図法についてパワーポイントを使って解説した（図3参照）。地図における縦横の比率が，球面上の縦横の比率と等しくなるように如何に補正されているか，そのため，縦の長さは緯度θに対して，$\frac{1}{\cos\theta}$の定積分によって計算されることを説明した。現在では，メルカトル図法は円筒図法として扱われているが，メルカトルがこの図法を円筒図法として考案したわけではない。海員たちにわかりやすく解説するために，円筒に投影した描画的モデルを利用したものが，現在に至っている。

最後に，地図としてよく用いられるサンソン図法・モルワイデ図法・グード図法を簡単に解説した。これは，非投影による正積図法で，サンソン図法は球の表面に張り合わされた紙を，緯線に沿って細かくはがすイメージでとらえれば，正積であることが理解できるであろう。また，ランベルト正積円筒図法での面積を利用して，モルワイデ図法の楕円の長軸とそれに平行な弦で挟まれた部分の面積が等しくなるような等積変換の式を示し，説明した。

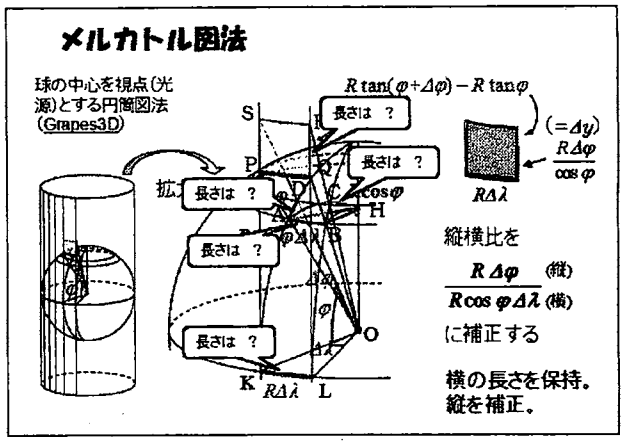


図3　メルカトル図法（スライドの一部）

3　アンケート結果

この授業実践のあとに，授業に関するアンケートを実施した。その結果は，次の通りである。

(1)　授業の内容は難しかったですか。

易しい			←→			難しい
	①	②	③	④	⑤	
文系	0	0	1	8	10	平均
19人	(0%)	(0%)	(5%)	(42%)	(53%)	4.5
理系	0	1	2	5	0	平均
8人	(0%)	(13%)	(25%)	(63%)	(0%)	3.5

(2)　授業は面白かったですか。

面白くなかった			←→			面白かった
	①	②	③	④	⑤	
文系	0	3	5	6	5	平均
19人	(0%)	(16%)	(26%)	(32%)	(26%)	3.7
理系	0	0	1	4	3	平均
8人	(0%)	(0%)	(13%)	(50%)	(38%)	4.3

(3) 授業の内容は理解できましたか。

理解できなかった ←→ 理解できた						
	①	②	③	④	⑤	
文系 19人	1 (5%)	3 (16%)	9 (47%)	6 (32%)	0 (0%)	平均 3.1
理系 8人	0 (0%)	0 (0%)	3 (38%)	4 (50%)	1 (13%)	平均 3.8

(4) 教師の説明はわかりやすかったですか。

わかりにくかった ←→ わかりやすかった						
	①	②	③	④	⑤	
文系 19人	1 (5%)	1 (5%)	5 (26%)	8 (42%)	4 (21%)	平均 3.7
理系 8人	0 (0%)	0 (0%)	3 (38%)	2 (25%)	3 (38%)	平均 4.0

(5) 授業の進め方は速かったですか。

遅かった ←→ 速かった						
	①	②	③	④	⑤	
文系 19人	1 (5%)	1 (5%)	5 (26%)	6 (32%)	6 (32%)	平均 3.8
理系 8人	0 (0%)	0 (0%)	6 (75%)	2 (25%)	0 (0%)	平均 3.3

(6) 授業に興味を持って取り組めましたか。

取り組めなかった ←→ 取り組めた						
	①	②	③	④	⑤	
文系 19人	1 (5%)	3 (16%)	5 (26%)	7 (37%)	3 (16%)	平均 3.4
理系 8人	0 (0%)	0 (0%)	2 (25%)	4 (50%)	2 (25%)	平均 4.0

(7) スライドは見やすかったですか。

見難かった ←→ 見やすかった						
	①	②	③	④	⑤	
文系 19人	0 (0%)	0 (0%)	1 (5%)	6 (32%)	12 (63%)	平均 4.6
理系 8人	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	3 (38%)	5 (63%)	平均 4.6

(8) Grapes 3Dは効果的でしたか。

効果的でなった ←→ 効果的であった						
	①	②	③	④	⑤	
文系 19人	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	6 (32%)	13 (68%)	平均 4.7
理系 8人	0 (0%)	0 (0%)	1 (13%)	3 (38%)	4 (50%)	平均 4.4

(9) 地図図法について，印象に残っている図法を答えなさい。(最大2つまで)

①正射図法　②心射図法
③平射図法　④ランベルト正積方位図法
⑤正距方位図法　⑥メルカトル図法
⑦サンソン図法　⑧モルワイデ図法
⑨グード図法
⑩ほとんど印象に残っていない

	①	②	③	④	⑤
文系 19人	2 (11%)	1 (5%)	8 (42%)	3 (16%)	4 (21%)
理系 8人	0 (0%)	1 (13%)	2 (25%)	6 (75%)	2 (25%)

	⑥	⑦	⑧	⑨	⑩
文系 19人	11 (58%)	1 (5%)	3 (16%)	2 (11%)	1 (5%)
理系 8人	1 (13%)	2 (25%)	1 (13%)	1 (13%)	0 (0%)

実施したアンケート調査をみると，内容の難易，授業の理解度，教材への関心度はいずれも，理系生徒の方が文系生徒より，よい結果を示している。最後の自由記述の部分でも，理系の生徒がコメントを多く記述していて，印象的な授業であったように思われる。

3時限という短い時間に，これだけの分量をこなすことに無理があったこともあり，進度が速いと感じる文系生徒が多かった。この点に配慮し，取り扱う図法も絞って授業を組み立てると，違った結果になっていたであろう。

(9)の印象に残った図法については，アンケートを慌てて使ったため，ランベルト正積円筒図法が抜けてしまった。そのため，それに興味を持った生徒も多かったが，選択肢がなく，文系の生徒はそれをよく見て選択したが，理系の生徒は思い込みで選択した生徒が多いようで，④を，ランベルト正積方位図法をランベルト正積円筒図法と思って回答したようである。

最後の自由記述欄のコメントは，以下の通りである。

文系生徒

・先生の授業が受けれてよかった。グード図法が気持ち悪かった。

・他の学校では絶対学べないことが学べてとてもよかった。

・もう少しゆっくり授業してほしかった。

・ほうーと思いました。ちょっと難しいと思いました。

・とても速かったので，もう少しゆっくりやってほしい。ただ，図法の特徴は，ある程度把握できたので，今度はそれを意識して地図を見ていきたい。

理系生徒（8人中7人コメントあり）

・すっごくおもしろかったです。最高です。

・説明についていくのが大変だったけど，思いもつかない考え方がたくさんでてきて面白かった。球の表面積と円筒の表面積が同じって言われてみればそうだけど，それを利用していろいろできるなんてすごいなあと思いました。

・ちょっと理解するのが難しかったけど，特徴をとらえやすかった。

・内容はほとんど数学ですごく難しかったけど，立体をどうやって平面にうつすかということが知れて面白かったです。今までに見たこともない地図もあって興味深かったです。

・Grapes 3Dは驚きました。でも説明後にもう一回見たかったです。プリントで緯と経が違っていたり，文字の間違いがありました。

・Grapes 3Dを使った説明がすごくわかりやすかったです。

・投影法は聞いているときは，なんとなくでも分かったのですが，いざ自分でやってみようと思うと難しかったです。

4　おわりに

平成17年度に，「空間感覚育成のための教材・教具の開発」と題して，地図投影法を含め，空間の教材について取り組んだ。このときに扱った教材・教具と授業は，以下の通りである。

正多面体の考察，円柱の切断によってできる側面の展開図，地図投影法を主なテーマとして，次の5つのテーマでプリント教材を作成した。

Ⅰ　正多面体を考える

Ⅱ　円柱を切って，その側面の展開図を考える

Ⅲ　地図（サンソン図法）で考える

Ⅳ　地図投影法を考える

Ⅴ　メルカトル図法を考える

これらの教材を学習するにあたって，次のような実験や作業を取り入れた。

① 折り紙でユニットを作成して，それを組合せて，正四面体，正八面体を作成する。

② 多次元構成キットで正多面体（八面体，十二面体，二十面体）を作り，頂点の個数や辺の本数を調べ，考察する。

③ 発泡スチロールの円柱にミラマット（発泡スチロールシート）を巻き付け，発砲カッターで切断して，円柱の側面の展開図を考察する。

④ 演示用に，塩ビパイプを加工して作成した実験機器で，円柱の巻き付けた紙を切断してその側面の展開図について考察する。

⑤ スチロール製球（直径10cm）に両面テールで，細長く切断したサンソン図法による地図を貼り付ける。

このときの取り組みでは，実験や作業が伴う授業は興味深く取り組んでいたが，地図投影法の原理に関する内容の授業では，アニメーションや3D図形描画ソフトなどを使用しなかったため，難しい面ばかりが目立ち，地図投影法を十分に理解してもらえ

なかった。自分で空間のイメージを作れるようになる前に，まず，動画やアニメーション，3D描画なので，見せて，視覚的イメージを持ちやすくした上で，説明する方が生徒は受け入れやすい。

前回は，空間イメージをつけてもらうことを優先し，それが却ってハードルの高い要求となって上手くいかなかった。また，空間感覚の育成のために地図教材を取り上げていて，前後のつながりが明確でなく，取り扱い方が不十分であった。

今回の授業では，地図投影法の流れを意識した教材構成としたことと，パワーポイントによるアニメーション効果とGrapes 3Dによる立体イメージ作りは，生徒の興味・関心を引き出し，理解の助けにつながっていたことは間違いない。パワーポイントのファイルを資料として添付できないのが残念であるが，スライドは全部で25枚あり，1枚のスライドに多いものでは50以上に及ぶアニメーションを設定して，視覚的に理解しやすいように配慮した。今回のファイルを作成するに当たり，1枚のスライドに何時間も費やすことも少なくなかった。この授業を通して，アニメーションや図形描画ソフトが図形のイメージ作りに，特に空間図形のイメージ作りに役立つことを改めて実感した。毎授業でこのようなことができるわけではないが，できるだけさまざまな図形描画ソフトなどを取り扱って，生徒の理解を助けていきたいと思う。

アンケート結果を見ると，今回の授業実践は，理系の生徒には概ね好評で，成功ではないかと思う。できれば，地理担当者とのTTによる地図投影法に関する授業を今後も継続していき，文系の生徒に配慮しながら，地図学への興味と地図における数学的面白さが生徒に伝えられるような研究を進めていきたい。

〔参考文献〕

[1] 教師のための初等数学講座 6
－立体幾何・画法幾何－
柴田敏男著（岩崎書店　1959年）

[2] 球面数学の基礎
黒田轍著（成山堂書店　1975年）

[3] 素晴らしい三角法の世界
－古代エジプトから現代まで－
エリ・マオール著　好田順治訳（青土社　1999年）

※1友田勝久氏（大阪教育大学附属高等学校池田校舎教諭）が作成した3Dグラフ作成のフリーソフト
http://www.osaka-kyoiku.ac.jp/~tomodak/grapes/

（資料）生徒用授業プリント

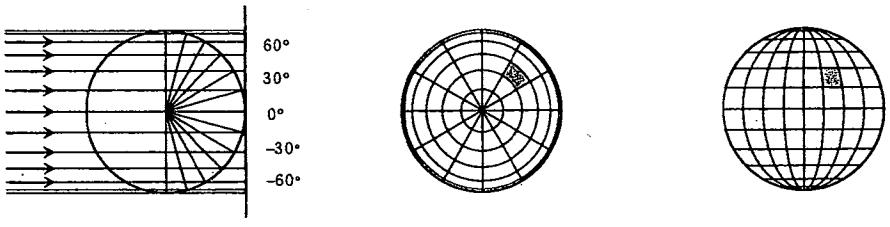
地図投影法

地理では，地図を何の目的にどう使うかが問題であるが，その目的を達成するために，どのようにして地図が作られているかについて考えてみよう。

1　平面図法

平面図法は，一定な点（視点）から，地球をその接平面に投影する方法で，接点から各地点への方位が正しいため，方位図法とも呼ばれる。この図法には，次の３つの図法がある。

(a)　**正射図法** … 視点を無限遠点において，地球を平面上に投影する方法



① 接点が北極（または南極）の場合，経線は中心（接点）を通る線分（直径）として，緯線は接点を中心とする同心円として表される。緯線は高緯度（接点付近）ほど間隔が広く，低緯度（周辺付近）ほど狭い。（中央図）

② 接点が赤道上の地点（例えば緯度・経度ともに0°地点）の場合，緯線は平行な線分で，経線はで表される。（右図）

例１　球面 $S: x^2+y^2+(z-1)^2=1$ を，点 A(0, 0, 1)を通りベクトル $\vec{n}=(0, 1, 1)$を法線ベクトルとする平面αで切った円 C を，xy 平面に正射影してできる曲線の方程式を求める。

〔解〕平面α上の任意の点 P(x, y, z) に対して，

$\overrightarrow{AP} \perp \vec{n}$ となるから，$\vec{n}\cdot\overrightarrow{AP}=0$

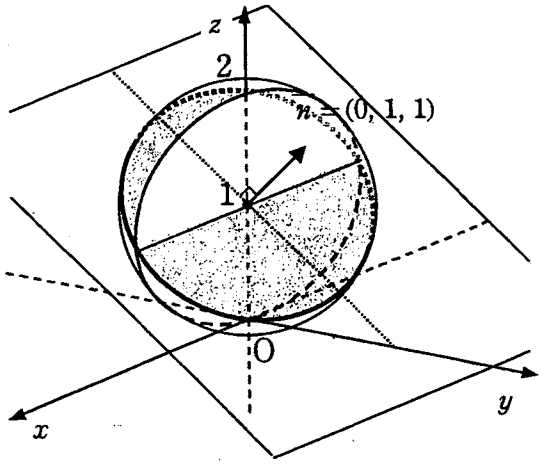
$\vec{n}\cdot\overrightarrow{AP}=(0, 1, 1)\cdot(x, y, z-1)=y+z-1=0$　…①

①より $z=1-y$ を $x^2+y^2+(z-1)^2=1$ に代入して，

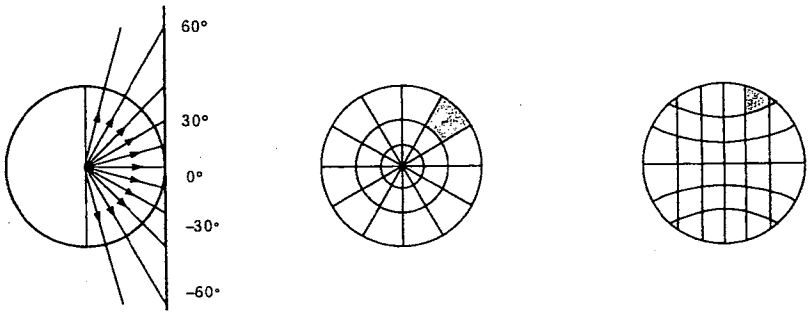
$x^2+2y^2=1$

よって，円 C を xy 平面に正射影してできる曲線は，

楕円 $x^2+2y^2=1\left(x^2+\dfrac{y^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}=1\right)$，$z=0$ である。



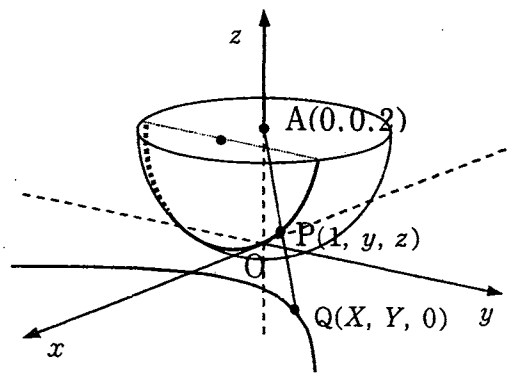
(b)　**心射図法** … 視点を地球の中心において，地球を平面上に投影する方法



① 接点が北極（または南極）の場合，経線は中心（接点）を通る線分として，緯線は接点を中心とする同心円として表される。緯線は高緯（接点付近）ほど間隔が狭く，低緯度になると拡大されすぎ，誤差が大きすぎるため，地図として意味を持たない。（中央図）

② 接点が赤道上の地点（例えば緯度・経度ともに0°地点）の場合，緯線は＿＿＿＿＿で，経線は平行な線分で表される。（右図）

例2 球面 $S: x^2+y^2+(z-2)^2=4$ を，平面 $x=1$ で切ったときにできる半円 $C: x=1$ かつ $y^2+(z-2)^2=3$ $(z<2)$ を，点(0, 0, 2)を視点として，xy 平面に投影してできる曲線の方程式を求める。



〔解〕球面の中心を A(0, 0, 2)とし，半円 C 上の任意の点を P(1, y, z)とすると，

直線 AP のベクトル方程式は，媒介変数 t を用いて

$(X, Y, Z)=(0, 0, 2)+t(1, y, z-2)$

と表される。直線 AP と xy 平面との交点を Q とすると，$Z=0$ であるから，

$Z=2+t(z-2)=0$ $\quad\therefore\ t=\dfrac{2}{2-z}$

よって，点 Q の座標は，$X=t=\dfrac{2}{2-z}$，$Y=ty=\dfrac{2y}{2-z}$ と

表される。ここで，y，z を X，Y で表すと，$X\neq 0$ で，

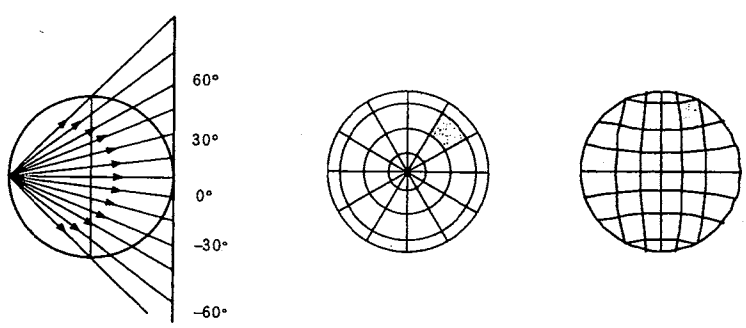
$2-z=\dfrac{2}{X}$ より，$z=2-\dfrac{2}{X}$．$2y=(2-z)Y=\dfrac{2Y}{X}$ より，$y=\dfrac{Y}{X}$

ここで，y, z は $y^2+(z-2)^2=3$ $(z<2)$ を満たすから，$\left(\dfrac{Y}{X}\right)^2+\left(\dfrac{2}{X}\right)^2=3$

よって，$Y^2+4=3X^2$ より，双曲線 $\dfrac{3X^2}{4}-\dfrac{Y^2}{4}=1$ $\left(\dfrac{X^2}{\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)}-\dfrac{Y^2}{4}=1\right)$ である。

ただし，$z<2$ より $x>0$

(c) **平射図法**(ステレオ図法)… 視点を中心に関して接点と対称な点において，地球を平面上に投影する方法



① 接点が北極（または南極）の場合，経線は中心（接点）を通る線分として，緯線は接点を中心とする同心円として表される。緯線は高緯（接点付近）ほど間隔が狭く，低緯度になると拡大されすぎ，誤差が大きすぎるため，地図として意味を持たない。（中央図）

② 接点が赤道上の地点（例えば経度ともに0° 地点）の場合，中央の赤道（緯度0° 線）と経度0° 線はいずれも線分で，それ以外の経線や緯線は＿＿＿＿の一部として表される。（右図）

平射図法の特徴

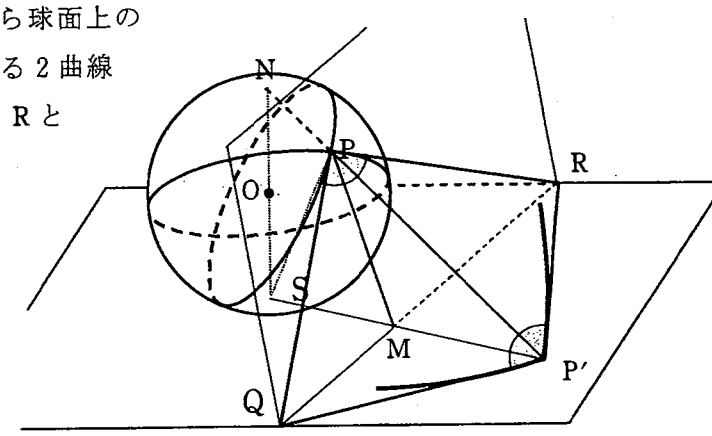
① ＿＿＿＿図法

② ＿＿＿＿対応（視点（光源）を通る円は直線に，視点（光源）を通らない円は円に移される）

〔証明〕

① 等角図法

南極点Sにおける接平面に，北極点Nから球面上の点Pを投影した像をP′とする。点Pにおける2曲線（2つの大円）の接線と平面との交点をQ，Rとする。



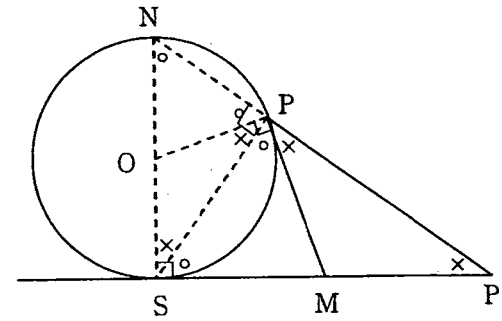
このとき，PQ，PRは接線だから，平面PQRは球のPにおける接接平面である。QRとSP′の交点をM，球の中心をOとすると，

SP⊥NP′，OP⊥PM，ON＝OS＝OP，

△NSP∽△SP′P

であるから，∠OSP＝∠OPS＝∠MPP′＝∠MP′P

よって，MP＝MP′…①



OP⊥平面PQRより，OP⊥QR.

また，NS⊥平面SQRよりNS⊥QR

よって，平面NSPP′⊥QRだから，

∠QMP＝∠QMP′（＝90°）…②

また，QMが共通であるから，①，②より

△PQM≡△P′QM　　∴ PQ＝P′Q

同様に，△RMP≡△RMP′より　PR＝P′R である。

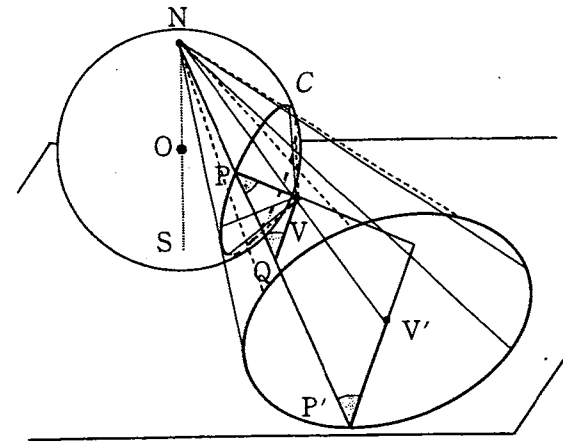
QRが共通であるから，△PQR≡△P′QR である。このことから，∠QPR＝∠QP′Rが成立する。

ゆえに，平射図法が等角図法であることがわかる。

② 円々対応

視点（光源）を通る円が直線に移されることは，円を含み平面と接平面との交線が移される直線であることからわかるであろう。

視点（光源）を通らない円が円に移されることを示そう。



右図のように，球面上の北極点Nを通らない円Cを考える。この球を内接球とし，円Cで接する円錐

を考え，その頂点をVとする。円Cの周上に任意の点Pをとり，その像をP′，Vの像をV′とする。

VPは球面の接線で，V′Pはその像であるから，①等角図法で示したように，直線NP′とのなす角は等しい。すなわち，∠VPP′=∠V′P′Pである。

PP′上に，VQ∥V′P′となるように点Qをとると，∠VQP=∠V′P′Pより∠VPQ=∠VQP

よって，VP=VQ　…　(i)

VQ∥V′P′より，△NVQ∽△NV′P′だから，$\dfrac{V'P'}{VQ}=\dfrac{NV'}{NV}$　…(ii)

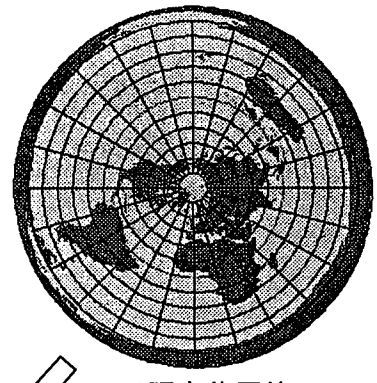
ゆえに，(i)，(ii)より$\dfrac{V'P'}{VP}=\dfrac{NV'}{NV}$（一定）

VPは円錐の母線で長さは一定であるから，V′P′も一定。すなわち，P′はV′を中心とする円周上にある。

2　方位図法

(a)　正距方位図法

緯線は等間隔であり，中心からの距離が正しい。

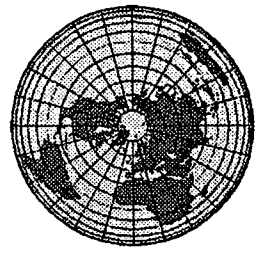


正距方位図法

(b)　ランベルト正積方位図法

正距方位図法をもとに，正積に変換する。

そのため，緯線の間隔は，外側ほど狭い。

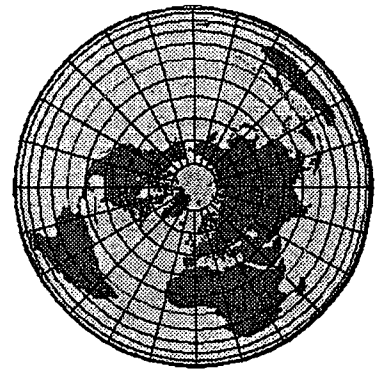


地球の半径をRとすると，正距方位図法では半径πRの円に描かれる。この面積は$\pi(\pi R)^2=\pi^3R^2$である。

半径Rの球の表面積は＿＿＿＿であるから，正積にするためには，半径＿＿＿＿の円として描かなければいけない。

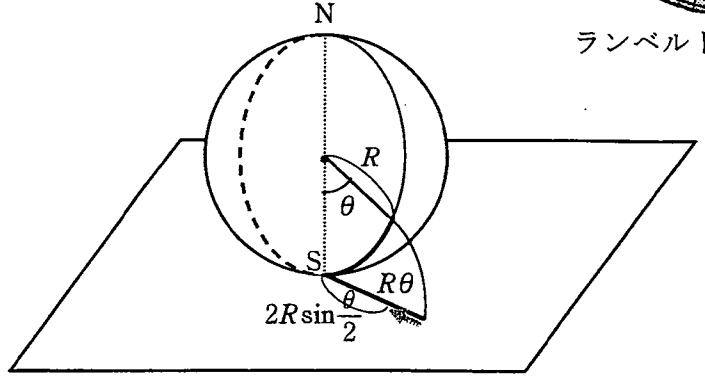
その変換式は，次の式で与えられる。

$$r=2R\sin\frac{\theta}{2}$$



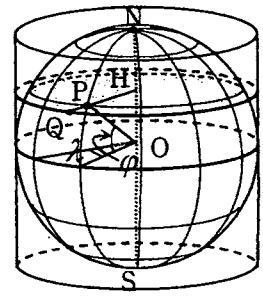
ランベルト正積方位図法

この式の説明は，ここでは省略し，次のランベルト正積円筒図法のところで触れることにする。



3　円筒図法

(a)　ランベルト正積円筒図法



円筒図法の１つで，正積図法であるランベルト正積円筒図法を紹介しよう。

球面を，両極を通る軸を持つ外接円柱面上に投影して，その円柱の側面を展開することによって平面に変換する方法があるが，視点は両極を通る軸である。

これによって作られる地図が等積であることを示そう。

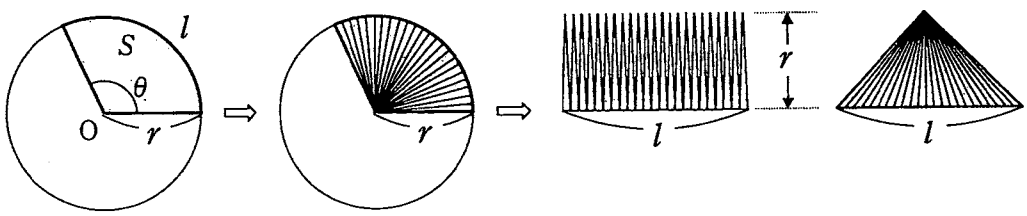
その準備として，円錐面および円錐台の側面の面積について，簡単に述べておこう。

半径 r，中心角 θ の扇形の面積 S は，弧の長さを l とすると，

$S=$ _____ $=$ _____

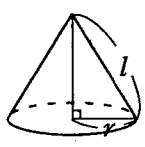
で表される。これは，底辺の長さが l（弧の長さ），高さが r（半径）の三角形の面積と考えられる。

これを参考にして，円錐面および円錐台の側面の面積を簡単に求めよう。



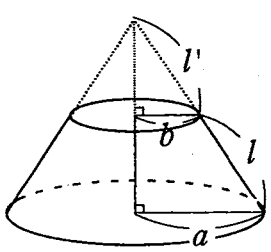
底面が半径 r の円で，母線の長さが l である直円錐の側面積は，弧の長さが $2\pi r$，半径が l の扇形の面積だから，

$\frac{1}{2}\times$ _____ $\times$ ____ $=$ _____



で表される。

次に，右図のような底面の半径が a，上面の半径が b，母線の長さが l である直円錐台の側面積を考えてみよう。

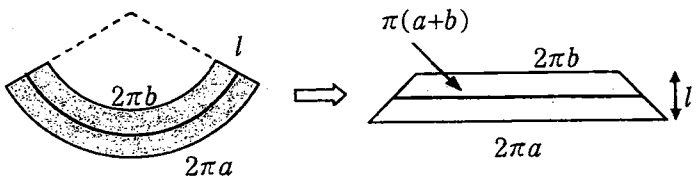


図のように l' をとると，直円錐台の側面は，底面が半径 a，母線の長さが $l+l'$ である直円錐の側面から底面が半径 b，母線の長さが l' である直円錐の側面を除いたものである。すなわち，底辺の長さ a，高さ $l+l'$ の三角形から底辺の長さ b，高さ l' の三角形を除いたものである。

よって，上底の長さ $2\pi b$，下底の長さ $2\pi b$，高さ l の台形の面積に等しいから，

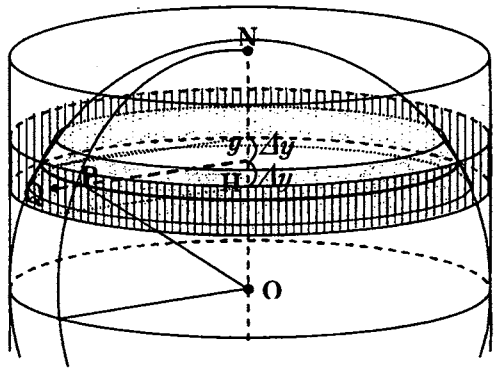
$\frac{1}{2}\times$ _____ $\times$ _____ $=$ _____

直円錐台の側面積　$\pi(a+b)l$（底面の半径 a，上面の半径 b，母線の長さ l）



見方を変えると，直円錐台の側面積は，母線の長さ l と上面の円周と底面の円周の平均，すなわち上面と底面の中央の円周の積で表される。

右図のような緯度 φ で接する外接円錐台を考える。高さを $2\Delta y$ とすると，PH$=R\cos\varphi$ で，母線の長さは軸 NS と P における接線 AB のなす角が φ だから $\dfrac{2\Delta y}{\cos\varphi}$ である。



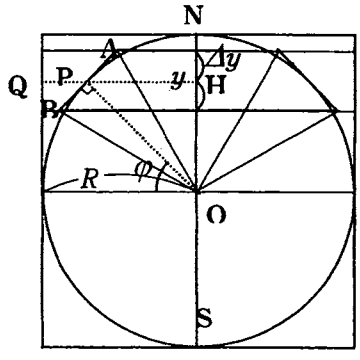
よって，外接円錐台の側面積は，

$$2\pi R\cos\varphi\times\frac{2\Delta y}{\cos\varphi}=2\pi R\times 2\Delta y$$

となる。すなわち，$y-\Delta y$ と $y+\Delta y$ の間の部分にある円柱の側面積に等しい。

Δy を十分小さくとれば，微小の区間における外接円錐台の側面積と同一区間における円柱の側面積が常に等しいから，この変換は，等積変換である。

よって，この図法は正積図法であり，ランベルト正積円筒図法と呼ばれている。



〔参考〕**ランベルト正積方位図法**

ランベルト正積方位図法では，正距方位図法をもとに経線の長さを短くすることにより，等積になるように変換している。具体的には，次のように変換している。

球面上の点 P を S を接点とする平面上の点 Q に変換するとする。

$\angle$POS$=\theta$ とし，SQ$=r$ とする。

球面上の，中心角 θ と $\theta+\Delta\theta$ の間の部分の面積は，ランベルト正積円筒図法の解説の中で出てきたように，半径 R の円筒の側面に投影して考えると，

$$2\pi R\big(R\cos\theta-R\cos(\theta+\Delta\theta)\big)=2\pi R^2\big(\cos\theta-\cos(\theta+\Delta\theta)\big)\quad\cdots①$$

平面に投影した同心円で囲まれる部分の面積は

$$\pi(r+\Delta r)^2-\pi r^2=2\pi r\Delta r+(\Delta r)^2\ \cdots②$$

①，②が等しくなればよいから，

$$2\pi r\Delta r+(\Delta r)^2=2\pi R^2\big(\cos\theta-\cos(\theta+\Delta\theta)\big)$$

両辺を $\Delta\theta$ で割って，

$$r\frac{\Delta r}{\Delta\theta}+\frac{\Delta r}{\Delta\theta}\cdot\Delta r=-R^2\frac{\cos(\theta+\Delta\theta)-\cos\theta}{\Delta\theta}\quad\cdots③$$

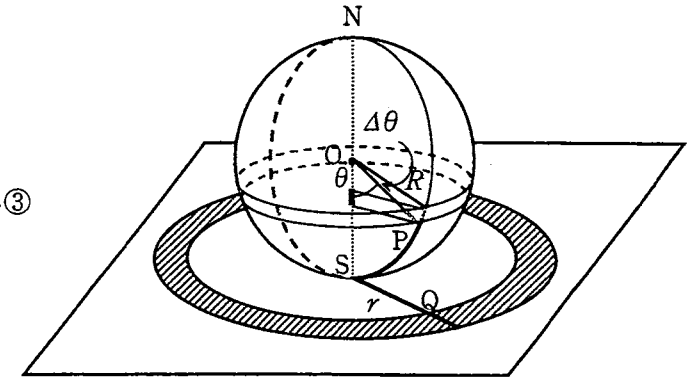
ここで，$\Delta\theta\to 0$ とすると，$\dfrac{\Delta r}{\Delta\theta}\cdot\Delta r\to 0$，

$$\frac{\cos(\theta+\Delta\theta)-\cos\theta}{\Delta\theta}\to-\sin\theta\ (\cos\theta\text{の導関数})$$

となるから，

③より，$r\dfrac{dr}{d\theta}=R^2\sin\theta$

$$r\,dr=R^2\sin\theta\,d\theta$$



両辺を積分して，$\int r dr = \int R^2 \sin\theta d\theta$

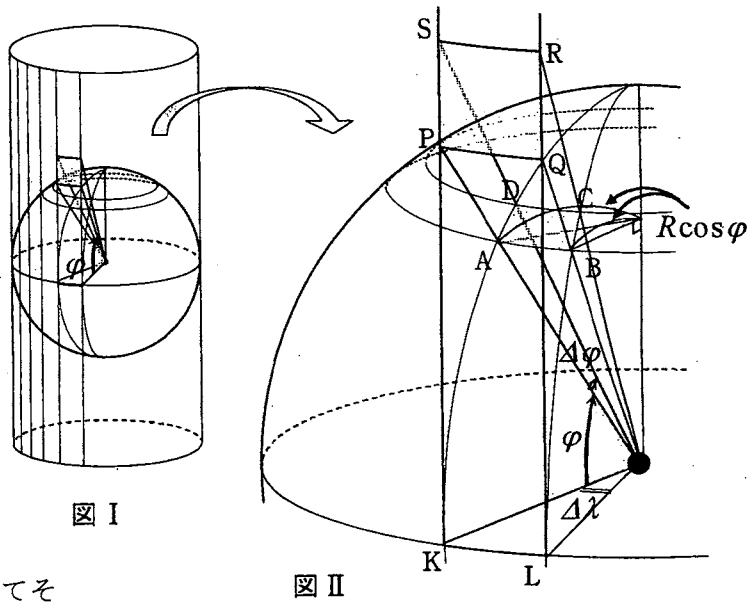
$$\frac{1}{2}r^2 = -R^2\cos\theta + C \quad (C\text{は積分定数})$$

$\theta=0$ のとき，$r=0$ だから $C=R^2$

よって，$r^2 = 2R^2(1-\cos\theta) = 4R^2\sin^2\frac{\theta}{2}$　　$\therefore\ r = 2R\sin\frac{\theta}{2}$

(b) メルカトル図法

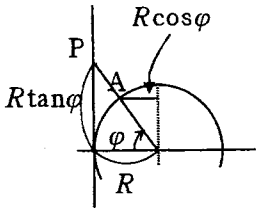
よく用いられる地図に，メルカトル図法がある。これは，1569年にオランダのメルカトルが考案した正角円筒図法で，赤道付近での歪みは小さく，高緯度地方は極端に拡大され，歪みの限界を考えて上下75度付近までを表示することが多い。経線方向の歪みと緯線方向の歪みが等しくなるように，緯線間隔を補正して正角にしています。2地点間に直線を引いて経線となす角度を測ることで方位がわかるので，航海図などに広く用いられていました。この航路は航程線といわれ，大圏コースではない。



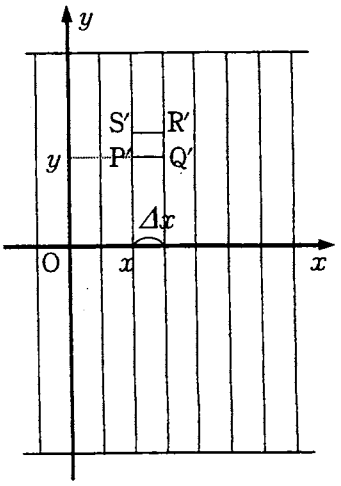
図Ⅰ　　図Ⅱ

ここで，経線方向の歪みと緯線方向の歪みが等しくなるように，緯線間隔を補正することについて考えてみよう。

円筒図法は，すでに述べたように地球の外接円筒面上に地球表面の射影を映してその形を描く方法である。図のように，地球の中心を射影の中心とし，地球の表面ABCDが円筒面上の図形PQRSに投影されるとする。緯度をφ $\left(-\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{\pi}{2}\right.$ 北緯を正，南緯を負）とし，経度をλ（$-\pi\leqq\lambda\leqq\pi$，東経を正，西経を負）とする（図Ⅰ）。



図Ⅲ



図Ⅳ

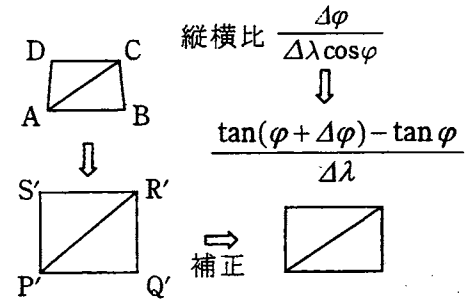
地球の表面を円筒上に射影して，それを展開して平面で表したときの点の座標を(x, y)として考える（図Ⅳ）。このとき，赤道をx軸，経度0をy軸とする。地球を半径Rの球形と考え，地球の表面上の点Aの緯度をφ，経度をλとし，点Cの緯度を$\varphi+\Delta\varphi$，経度を$\lambda+\Delta\lambda$とする（図Ⅱ）。

地球の表面上では，$\widehat{AB}=(R\cos\varphi)\Delta\lambda$，$\widehat{BC}=R\Delta\varphi$ だから，縦横の比率が$\frac{\widehat{BC}}{\widehat{AB}}=\frac{\Delta\varphi}{\Delta\lambda\cos\varphi}$ である。これに対して，地図上に射影された図形P′Q′R′S′では，

$P'Q' = \widehat{PQ} = \widehat{KL} = R\Delta\varphi$,

$Q'R' = QR = R\tan(\varphi+\Delta\varphi) - R\tan\varphi$

となり，縦横の比率が $\dfrac{Q'R'}{P'Q'} = \dfrac{\tan(\varphi+\Delta\varphi)-\tan\varphi}{\Delta\lambda}$ で，地球の表面上の図形 ABCD のそれと異なる。等角（図Vにおいて AC と P'R' が同じ方向）であるためには，この縦横の比率が等しくなければならない。



図V

そこで，図Vにおける右下図の縦の長さを Δy とすると，$\dfrac{\widehat{BC}}{\widehat{AB}} = \dfrac{\Delta y}{P'Q'}$

となるように長さを補正する。すなわち，$\Delta y = \dfrac{R\Delta\varphi}{\cos\varphi}$

となるように補正する。すべての y の値に対してこのようなことを考えると，縦横の比率が等しく，等角になる。

$\dfrac{\Delta y}{\Delta\varphi} = \dfrac{R}{\cos\varphi}$ の関係が成立するように y を定めればよい。

これは，$\dfrac{dy}{d\varphi} = \dfrac{R}{\cos\varphi}$ であることを表している。（途中の計算過程において，図形 ABCD は台形に近い形をしているが，$\Delta\varphi \to 0$，$\Delta\alpha \to 0$ と極限を考えると，AB＝CD となるので長方形のように扱っても差し支えない。）

赤道を $y=0$ にとるとき，緯度 β（ラジアン）に対する地図上の位置は，

$$y = R\int_0^{\beta} \frac{1}{\cos\varphi} d\varphi$$

によって得られる。この定積分は様々な方法で求められるが，ここでは $\tan\dfrac{\varphi}{2} = t$ とおく。

$$\cos\varphi = 2\cos^2\frac{\varphi}{2} - 1 = \frac{2}{1+\tan^2\frac{\varphi}{2}} - 1 = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$\tan\dfrac{\varphi}{2} = t$ の両辺を t で微分して，$\dfrac{1}{2\cos^2\frac{\varphi}{2}}\dfrac{d\varphi}{dt} = 1$　　$\therefore\ \dfrac{d\varphi}{dt} = 2\cos^2\dfrac{\varphi}{2} = \dfrac{2}{1+t^2}$

$\varphi : 0 \to \beta$ のとき，$t : 0 \to \tan\dfrac{\beta}{2}$ だから

$$y = R\int_0^{\tan\frac{\beta}{2}} \frac{1+t^2}{1-t^2}\cdot\frac{2}{1+t^2} dt = R\int_0^{\tan\frac{\beta}{2}} \left(\frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t}\right) dt$$

$$= R\left[-\log|1-t| + \log|1+t|\right]_0^{\tan\frac{\beta}{2}} = R\left(-\log\left|1-\tan\frac{\beta}{2}\right| + \log\left|1+\tan\frac{\beta}{2}\right|\right) = R\log\left|\frac{1+\tan\frac{\beta}{2}}{1-\tan\frac{\beta}{2}}\right|$$

$$y = R\log\left|\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\beta}{2}\right)\right|$$

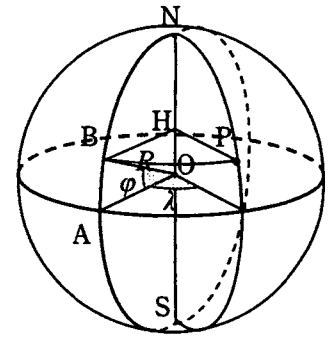
このようにして，メルカトル図法による地図が作られる。

4　非投影による正積図法

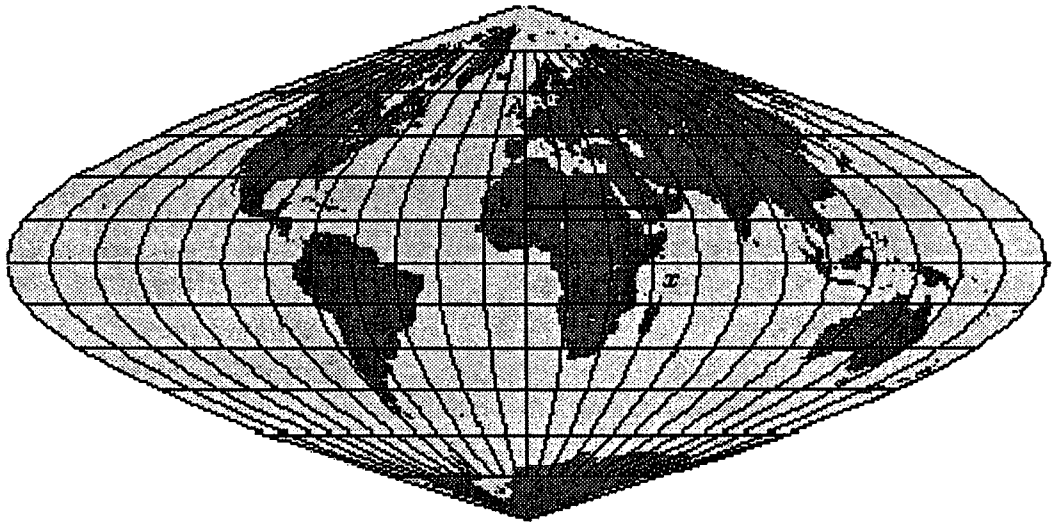
(a)　サンソン図法

経線と緯線に沿って座標をとることにより，球面を平面に変換する。

これから，座標変換を行ったり，微積分で取り扱ったりするので，経度と緯度を度数法で表すのではなく，その角に対応する孤度法で表すことにする。



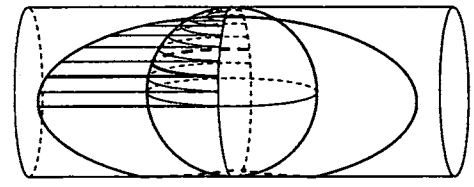
地球の表面（球面）に，経度 0（通常は 0°と書くべきであるが，先の理由から孤度で 0 と書くことにする）を縦軸（y 軸）とし，赤道（緯度 0）を横軸（x 軸）にとることにより座標平面に表す。具体的には，経度λ（東経$\lambda>0$，西経$\lambda<0$），緯度φ（北緯$\varphi>0$，南緯$\varphi<0$）の地球の表面（半径 R の球面）上の点 P を，経線と緯線に沿って向きを付けて長さを測り，それを平面（地図）上の点 Q(x, y) に変換する。



最初の図において，経度 0，緯度φ の点を B とすると，

$\angle$AOB$=\varphi$ だから，$\widehat{\mathrm{AB}}=R\varphi$（符号を含めて）

（孤度法の定義より，弧の長さ＝中心角×半径）



擬円筒図法

地点 B（または地点 P）から地軸 NS に下ろした垂線の足を H とすると，

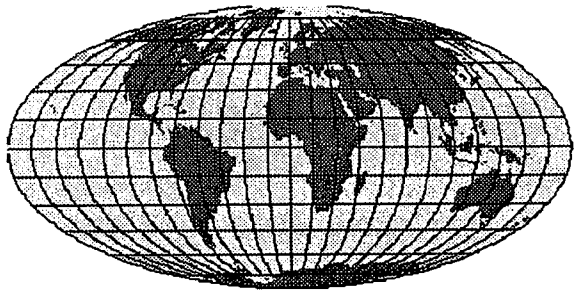
$\mathrm{BH}=R\sin(\frac{\pi}{2}-\varphi)=R\cos\varphi$

$\widehat{\mathrm{BP}}=\mathrm{BH}\times\lambda=R\cos\varphi\times\lambda=R\lambda\cos\varphi$　（符号を含めて）

よって，$x=R\lambda\cos\varphi$，$y=R\varphi$

ここで，λ を定数とみて，$x=R\lambda\cos\frac{y}{R}$ で表されるので，この変換によって経線はサインカーブに移される。

(b)　**モルワイデ図法**



サンソン図法は擬円筒図法であり，中・高緯度の歪みを緩和した図法が，モルワイデ図法がある。

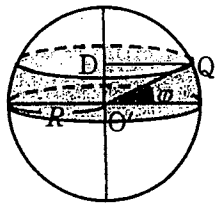
これは，

長半径：短半径＝2：1

である楕円として地図を作っている。

楕円 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ は，円 $x^2+y^2=a^2$ を x 軸基準 y 軸方向に $\frac{b}{a}$ 倍してられるから，カバリエリの原理により，その面積は＿＿＿＿＿である。

半径 R の球の表面積が $4\pi R^2$ であるから，長半径 $2\sqrt{2}R$，短半径 $\sqrt{2}R$ の楕円として，地図が描かれている。



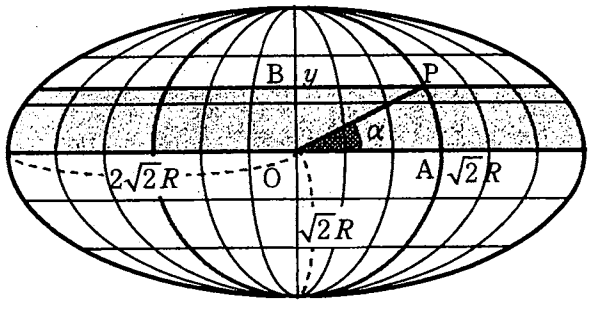
右図において，赤道と緯線 φ で挟まれる部分の面積は

$O'D=R\sin\varphi$ より　$2\pi R^2\sin\varphi$

右図の楕円において，$y=R\sin\alpha$ として

網掛け部分の面積は

$4(\text{扇型 OAP}+\triangle\text{OPB})=2(2R^2\alpha+R^2\sin 2\alpha)$

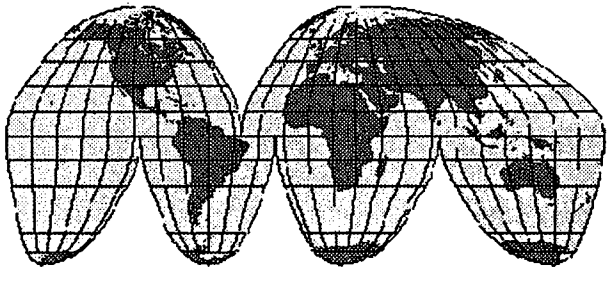


面積を等しいとき，

$\pi\sin\varphi=2\alpha+\sin 2\alpha$

の関係が成立する。この関係式に従って地図を作成している。

(c)　**グード(ホモロサイン)図法**



低緯度地方をサンソン図法で，高緯度地方をモルワイデ図法で描いたものがグード(ホモロサイン)図法である。

モルワイデ図法での緯線の長さは，$4\sqrt{2}R\cos\alpha$ である。

サンソン図法での緯線の長さは $2\pi R\cos\varphi$ である。

サンソン図法とモルワイデ図法で緯線が等しくなるのは，

$2\pi R\cos\varphi=4\sqrt{2}R\cos\alpha$　　すなわち　$\pi\cos\varphi=2\sqrt{2}\cos\alpha$　のとき

これらの関係を満たす φ は，$\varphi=40^\circ 44'12''$ である。