

異学年交流授業の試み

－ 4・4・4制を見据えて－

数学科 塩屋 千学・川谷内哲二・戸田 偉・外山 康平

(要約) 附属学校園の中期計画に盛り込まれている「4・4・4制の検討を含めて、校種間重複単元の精選・再編を主眼とする大胆な一貫教育カリキュラムの開発を検討する」を踏まえて、異校種間の交流授業を昨年度から実施している。異学年による交流授業やグループ学習を通して、コミュニケーション力、すなわち他者理解力と自己表現力が育成されることが期待できる。昨年度と今年度を実施した異学年交流授業を中心とした実践を報告する。

キーワード：異学年交流授業 グループ学習 コミュニケーション力

1 はじめに

個性や能力に応じた教育の多様化に対応するために、生徒や保護者が6年間の一貫教育を選択できるように、中高一貫教育が、平成9年6月の中央教育審議会答申「21世紀を展望した我が国の教育の在り方について(第2次答申)」の提言を踏まえ、平成10年6月に学校教育法等の関係法律が改正され、平成11年4月に制度化された。

21世紀の日本を担う創造性の高い人材の育成を目指して、幅広く今後の教育のあり方について検討するために、教育改革国民会議が平成12年3月より開催されることになった。その中で、座長の江崎玲於奈氏(当時 芝浦工業大学学長)は「高校進学率が97%にも達する今日、高校も義務教育に含め、その際6-3-3制から4-4-4制にする。この方が、各学校がまとまり易く急速に変化する社会に対応し易い。」という考えを示しており、グレゴリー・クラーク氏(当時 多摩大学学長)は「現在は子供の成長が早くなっているため、小学校6年では逆に長すぎる。4-4-4制を考えるべきである。」と述べている。

平成14年3月に自民党の義務教育改革研究会の会

合において、麻生誠氏(当時 放送大学副学長)から「4・4・4制」の提案が行われた。また、研究開発校の指定を受けて、小中一貫教育に取り組んでいる五番町小学校(広島県呉市)の長岡校長から、「小中一貫教育への取組」について説明を受けている。このような中で、当時の遠山文部科学大臣から「今後の初等中等教育改革の推進方策について」の諮問があり、その中で「義務教育など学校教育に係る諸制度の在り方について」の検討が求められている。これを受けて、中央教育審議会初等中等教育分科会において審議され、「(4)学校の区分、学校間の連携」の項目で次のようにまとめられている。

脳科学や発達心理学の分野における研究成果から、子どもたちの発達には、年齢の区分ごとにいくつかの段階があるとされ、小学校4年生に相当する年齢を中心にその前後1年くらいが大きな区切り目の一つとされる。実際の学校教育の場においても、経験的に小学校4年生を区切りとして子どもたちの発達段階が大きく変化するとの意見が強い。身体的な発達のスピードが速まり、思春期の到来も早まっていると言われる小学校高学年の児童に対する指導においては、従来通りの小学校的な指導では限界があ

るのではないかと指摘されている。また、学校間の連携や接続の不十分さについても指摘された。こうした課題を解決するために、6-3制そのものについて見直すべきだとする意見もあったが、その改正は学校現場に与える影響が大きく、慎重であるべきとの意見もあり、小・中、幼・小の接続を改善する観点から、幼小、小中の一貫教育や、カリキュラムを中心とした連携の強化を図るべきとの意見が多く出された。

また、諸外国では、6-3制の義務教育を行っているところが多いが、クェート、ブルガリア、リトアニアなど4-4-4制の教育制度をとっている国もある。

このような社会の変化の中で、実験・研究校である金沢大学教育学部附属として、平成16年度からの6カ年の中期計画に次の項目を設けられている。

中期計画 ②学校運営の改善

- 4・4・4制の検討を含めて、校種間重複単元の精選・再編を主眼とする大胆な一貫教育カリキュラムの開発を検討する。
- 幼稚園、小学校低学年、同高学年、中学校、高等学校及び養護学校の各校種・ステージ間の教員の乗入れ、各ステージ内における実験的カリキュラムの開発を進める。

教育学部と附属5校園が、共通した教育理念・目標のもとで、特色ある附属学校園の教育を実施するために、教育学部と附属学校園による研究推進委員会が組織され、幼稚園から高校までの幅広い連携、特別支援学校と他校種との交流活動の在り方を学部・附属学校園全体で検討するために、毎年、全体協議会を開催し、先進的な教育実践の取り組みについて学んできた。平成16年度より、「心理教育相談」「特別支援教育」「学校安全」「幼・小連携」「小・中連携」「中・高連携」の6小委員会を組織し、それぞ

れのテーマのもとで研究を進めている。中・高連携小委員会では、

- ・「4・4・4制」も視野に入れた一貫した教科教育の在り方を探る。
- ・大学、異校種間との連携に基づく研究活動を通して、教員の資質向上を目指す。

をテーマに継続的に研究を展開している。

これまでに、金沢大学教育学部 大谷 実教授のもとで、教育学部と附属学校の数学担当者が協力して、「中・高の接続性を踏まえた選択教科『数学』の実践的指導法の開発」について取り組んでいる。その折、本校数学科では「小中高の接続と新課程教材」をテーマとして、研究紀要にまとめている。(高校教育研究 第53号2001参照)

附属高校では、中・高連携小委員会の活動・研究を中心にして、中・高間の授業参観及び授業交流等を日常的に実施するとともに、年齢ごとの発達段階、授業形態、授業内容について相互理解を推進し、教員相互の乗入れを試行するなど、実験的カリキュラムの策定に向けて検討を開始した。

附属中学校では、平成16年度において、生徒の心身の発達段階や学習進行状況を把握し、それに基づいた学習内容や学習方法を選択すれば、学力の向上が図れるという観点に立って、教科ごとに授業実践を行ってきた。そのような実践の中から、小中および中高の連携の必要性を感じて、わたり(=連携)の問題から4・4・4制や5・4・3制など制度的な検討に取り組んでいった。平成17年度は、小・中学校のつながりに目を向け、附属小中連携小委員会を中心となって、小・中学校共通の「教育理念・目標・方法」を作成し、生徒・児童に育成すべき重要な力を「問題解決力」と位置づけ、各教科教育の実践に取り組んだ。平成18年度は、問題解決力を育成するには、他者とのかかわりの中で自己実現を図れるようにすることが重要であるという観点から、「共に学ぶ生徒の育成を目指して」を主題として研

究に取り組むこととなった。その中で重要なのは、コミュニケーション力で、それは他者理解力と自己表現力と考えることができる。この能力を育成するための授業として、その授業形態が重要であると考え、グループ学習と異学年交流学习に着目して取り組んできた。

附属中学校数学科における思考水準は、領域「数と式」では、第3水準を「いろいろな数の定義を理解し、定義から計算法則などの公式・定理を導き出し、新たな公式・定理の証明ができる。また、必要に応じて数の場合分けをして、数学的な議論をすすめることができる。」(中学3年～高校3年)、領域「関数」では、第3水準を「関数の概念が理解でき、一段高い視点から関数族を考察する。」(中学3年～高校3年)と考えている。

このような状況の下で、本校数学科および附属中学校数学科では、昨年度より中学3年生と高校1年生との異学年交流授業に取り組んでいる。本稿では、4・4・4制を踏まえて、昨年度からの異学年交流授業の取り組みについて報告する。

2 昨年度の取り組み

昨年度、附属中学校3年の選択数学の生徒達と本校の高校1年生で、初の中高交流授業を行った。本来隣同士の中学校と高校(平和町校舎)だが、この年は高校の校舎改修工事のため、高校生は金沢大学の旧工学部跡地(以下、工学部校舎)で9月から3月まで学習していた。そのため、中学生にバスで工学部校舎に向向ってもらっての活動となった。

以下にその概要を記す。

① 対象者

附属中3年選択数学(51名 担当教諭:戸水吉信)

附属高校1年A組(40名 担当教諭:戸田偉)

② 日時 平成19年2月22日(木)5限

③ 場所 高等学校工学部校舎4階美術室

④ 学習指導

① 題材 高等学校 数学A

(2) 集合と論理 イ. 命題と証明

② 目標

中学生…命題, 逆, 裏, 対偶, 真, 偽などの数学用語と用法をマスターする。

命題とその対偶の真偽が一致すること等を, 具体例を通して確かめる。

高校生…中学生へのレクチャーを通して, 数学の理解の深さの3つのレベル「わかる・できる・教えられる」の違いを感じ, より深い理解を目指す。

③ 準備

・プリント「論理の基礎について学ぼう1, 2」(p34・p35 資料1・2参照)

・1班につき中学生5人, 高校生4人で男女が半々になるように10の班をつくる。

・高校生には前もってプリントを渡し, 班毎に準備しておくように指示する。

・当日, 美術室の机・椅子を班毎にくっつけておく。

④ 学習指導過程 (p36・p37 資料3・4参照)

⑤ 授業後の感想より(抜粋)

→斜体は教員のコメント

①中学生

・論理について学んでみて, 高校生の説明が, 身近にあるものを取り入れたり, 中学で習った図形の証明を例にして説明してくれたりとても分かりやすくよかったです。

→少人数によるレクチャーは概ね好評だったようです。

・今まで手探りで論理の問題を解いてきたけれど, 今日でその法則のようなものが分かり, とても効率的に解法が出せるようになった。論理の基礎に触れることができ, とても有意義だった。

→高校では論理は敬遠されがちな分野ですが, 「楽しかった」感想が多かったのは収穫でした。

・今日の授業でやっと先生が今まで言ってきたこと

が完全に理解できた気がする。逆、裏、対偶を図式化することでそれぞれの真偽が分かるのは画期的だと思った。

→図式化して説明したり、集合の包含関係を使ったり、高校生はいろいろ工夫していたようです。

②高校生

・数学は「わかる（理解できる）」→「解ける」→「教えられる」の3段階だけれども、まともに教えることができなかつたので、まだまだ勉強が足りないと思った。普段普通に授業している先生たちはすごいと思う。自分は一日でもものすごく精神的に疲れた。

→自分の理解の深さを見直す良い機会になったという生徒が多数いました。

・中学生なのに、すごく知識があったから怖かった。
・命題、逆、裏、対偶という言葉や $p \Rightarrow q$ といった表記法を用いて説明したほうがやりやすかつたです。中学生の理解のはやさに驚いた。説明するのには時間が足りませんでした…。

→「中学生の飲み込みのはやさに感心した」という意見も多数ありました。

・論証の導入として簡単な命題をもってくるとき、できれば「カラスは黒い」などの抽象的なものは避けてほしいです。“○○○ならば△△△”とベン図を使うとわかりやすかつたと思います。

→高校では、真偽のアヤシイ命題は避けます。高校生には、『カラスが黒い』は『真』だと認めてくれ！』と言ってありました。

③成果と課題

論理は、高校に入学した生徒が最初に違和感を覚える分野の1つ。そこを「楽しい」としてもらふこと（中学生）、理解の曖昧な部分をしっかりと固めること（高校生）が狙いだった。その手段として、少人数のレクチャー形式、班学習という形をとった。この手法そのものは効果があつたと思う。しか

し、①教材の難易度や②年度末2月という時期（高校入試後）はこれでいいのか？③班学習の評価をどのように個人に反映するか？課題は残る。

昨年度は高校が改装工事のため仮校舎に移転し、中学生にバスで来てもらうという形だったが、平和町に戻れば隣同士。課題を改善し、次年度につなげていきたいと思った。

3 本年度の取り組み

本年度は、これまでに2回の中高交流授業を行った。昨年度の取り組みもあり、本年度は中学校の先生方と打ち合わせも数回行いながら計画を進めた。また、今までは附属中学校と附属高校の授業時間帯が5分間ずれていたのだが、中学校と高校がお互いに授業に行き来できるように、本年度は授業時間帯をそろえてある。第一回目は、昼食後の休み時間中に高校生が附属中学校の方へ移動して5限目の時間帯に活動を行った。第2回目は逆に中学生に、校舎改修で新しくなつた附属高校のほうに来てもらつたの学習活動となつた。

以下にその概要を記す。

19年度第1回交流授業

① 対象者

附属中学校3年2組（40名 担当教諭：戸水吉信）

附属高校1年C組（40名 担当教諭：塩屋千学）

② 日時 平成19年6月12日（火）5限

③ 場所および指導者

附属中学3-2教室（中学生20名、高校生20名）

T1：戸水 吉信（附属中）

T2：塩屋 千学（附属高）

附属中学3-1教室（中学生20名、高校生20名）

T1：松原 敏治（附属中）

T2：菊野慎太郎（金沢大）

④ 学習指導

① 単元 中学校3年「多項式」

高校1年「数学I 数と式」

② 題材 「九九表から規則をみつけよう」

(九九表からいろいろな規則を発見して、それを文字式を用いて説明する)

③ 目標

中学生…目的に応じて式を変形することができ、それを用いることができる。

高校生と共に学び、グループ学習の進め方を通して他者理解のモデルに触れ、他者理解力を伸ばす。

高校生…展開や因数分解の公式を理解し、それらの場合に応じて利用できる。

中学生と共に学び、グループ学習で自分の考えを説明する過程でよりわかりやすい表現を確認することによって、一人一人が自己表現力を向上させる。

④ 準備 (中学校の方でプリントなど準備) (p38 資料5参照)

- ・1班につき中学生3～4名、高校生3～4名で男女が半々になるように12の班をつくり、それを6班ずつ2つの授業クラスにわける。

⑤ 学習指導過程 (p39・p40 資料6・7参照)

⑥ 授業後のアンケート・感想より

いろいろな規則を見つけることが出来たという項目がA評価の生徒は18名であったが、規則がそうなることの理由を説明することができたという項目がA評価の生徒は14名と若干少なかった。

以下、高校生の感想を抜粋した。

- ・中学生とコミュニケーションが取れるようになった後半はすごくよかった。(3名)
- ・中学生に逆に教えられた。(4名)
- ・中学生とあまり差を感じなかった。(1名)
- ・どちらにとってもすごく勉強になったと思う。(3名)
- ・中高両方にとってよい題材だったが、説明するのは意外と難しいと感じた。(4名)

・一つの課題について話し合うことは考えが深まると思った。(2名)

・もっとよい発想ができればよかった。

⑦ 授業を終えて (指導者・塩屋)

今回は、中学校の先生方が中心となり、九九表を題材として、九九表からいろいろな規則を見つけるという課題を設定した。この課題は、規則を表から発見して文字式を用いて説明することをねらいとしている。例えば、九九表の『 2×2 の正方形を取り出すと、右上と左下の数の積と右下と左上の数の積とは等しい』ことを、左上の数を a と b との積とすると、『 $ab \times (a+1)(b+1)$ と $a(b+1) \times b(a+1)$ が等しい』と説明できる。中学3年生と高校1年生ではともに多項式の積について学習している。多少複雑さや難易度に違いはあるものの、中学生にとっては一旦多項式の積の計算方法について理解すれば、高校生の内容を理解するのは比較的容易な単元であるといえる。

また、この授業のもう一つのポイントは、グループ学習を取り入れていることである。数学の学習においては、数学的な議論を重ねていくことが必要不可欠である。そのために、グループ学習を通して個と個が数学的に議論する機会を増やすとともに、全体学習においてよりわかりやすい表現を確認することによって、一人一人が自己表現力を向上させることにもつながると考えられる。

実際の授業では、規則を発見するところでは、中学生と高校生にさほど差はなく、なかにはたくさんの規則性を見つけている中学生もいた。ただ自分の発見した規則を他者に説明する段階で、中学生は日本語で説明しようとしているのに対して、高校生は文字を使って説明しようとしていた。ただ、文字をうまく使わずに、教師側からのヒントを与え、2文字を使用して積やその他の規則を説明することがでる班が増えていった。全体でのグループごとの発表では、各グループ中学生が代表して発表し、ほとんど

の班で文字式を使って説明できていた。

第1回の交流授業での反省と課題は、高校生が思ったほどイニシアチブをとって学習できなかったことであろう。どちらかというとも中学3年生と高校1年生にはあまり差がないという印象が強かった。

(中学生は同じような課題を事前に行っていた。)ただし、グループ学習の中学生にとっての効果としては、説明を聞いてくれる、あるいは分からないところを説明してくれる上級生がいることで交流学习のよさを感じ取ってくれたのではないかと思う。数学的な内容の考察としては、文字を使って規則などを説明するときには、「あることがしたくて文字を使うとうまくいった」という自らの体験や、文字を使うことのよさを感じるによって初めてうまく文字を使えるようになるのではないかと考察できる。高校生にとっては、2次関数などの分野における場合分けの問題などの学習が必要であろう。

19年度第2回交流授業

① 対象者

附属中学校3年2組(40名 担当教諭:戸水吉信)

附属高校1年A組(40名 担当教諭:塩屋千学)

② 日時 平成19年6月29日(金)4限

③ 場所および指導者

附属高校音楽室(中学生20名,高校生20名)

授業担当:川谷内哲二(附属高)

附属高校美術室(中学生20名,高校生20名)

授業担当:塩屋 千学(附属高)

④ 学習指導

① 単元 中学校3年「平方根」

高校1年「数学I 数と式」

② 題材 「平方根の近似値を求めてみよう」

(予め準備された6つの近似値の計算方法のうち一つをそれぞれの班で考える)

③ 目標

中学生…異なる学年の意見や考えを踏まえて、そ

れを自分なりに整理し、それをもとに新たな発見や自分の考えに結び付けられる。

平方根の近似値の計算を通じて、1つの教材に対していろいろな見方や考え方ができることを体験する。

高校生…具体的な数値計算に、これまで学習してきた展開が活用できることを理解し、近似値の意味とその扱いについて理解を深める。

平方根の近似値の計算を通じて、1つの教材に対していろいろな見方や考え方ができることを体験し、事象をさまざまな視点から数学的に考察しようとする態度を育てる。

④ 準備

・プリント「近似値を求めてみよう」

【課題1】および【課題2】(p41~p43 資料8~10参照)

・プリント【課題2】の6つの計算方法を掲示用に方法①~⑥をそれぞれ拡大したもの

・発表用模造紙およびマジック等

・1班につき中学生3~4名,高校生3~4名で男女が半々になるように12の班をつくり、それを6班ずつ2つの授業クラスにわけ、座席表をつくる。

・音楽室,美術室の机・椅子を班ごとのかたまりにしておく。

⑤ 学習指導過程 (p44・p45 資料11・12参照)

⑥ 授業後のアンケート・感想より

半数以上の22名の生徒が近似値を計算することが出来たと答えているが、それを中学生に説明できたと答えた生徒は13名であった。これは時間が足りなかったことと、自分が理解したことを噛み砕いて説明することが難しかったことが原因だと思われる。

以下、高校生の感想を抜粋した。

- ・中学生と学べて楽しかった。(4名)
- ・時間が足りなかった。もっと時間があれば中学生にうまく説明できたと思う。(5名)
- ・理解できても中学生に説明するのは難しかった。教えるというのは難しい。(5名)
- ・内容が難しすぎた。よく分からなかった。(11名)
- ・ $\sqrt{2}$ はできたが、 $\sqrt{10}$ になるとわからなくなった。(1名)
- ・頑張って中学生に説明することができてよかった。交流はよいことだと思う。(2名)

⑦ 授業を終えて(指導者・塩屋)

中学生と高校生がともに取り組める教材として、平方根の近似値を題材として考えた。近似値の求め方をいろいろな角度から考えさせることと、開平法などの計算において、今までに習った展開や因数分解を積極的に活用させることを主眼とした。

しかし、現在の数学的知識では近似値を求める方法を考えるのは難しいことから、あらかじめ6つの方法を教師から与えて考察させた。具体的には $\sqrt{2}$ の近似値の求め方を理解し、高校生が中学生に説明し、それからその方法で今度は $\sqrt{10}$ の近似値を求めるという展開で授業を進めた。

予め準備した6つの近似値の計算方法には、次のような意図がある。

【①作図してみよう】は実際に無理数の値を作図することにより、定規で測る方法である。中学生は三平方の定理を学習していないため、高校生はこれを使用した場合には、中学生に上手く説明しなくてはならないであろう。三平方の定理を使わずに正方形の面積から作図することもできる。

【②平均をとってみよう】は2の近似値 a と $\frac{2}{a}$ (a と掛けて2になる数)との平均を順次とっていく方法だが、これは実は漸化式 $a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + \frac{2}{a_n})$ で与えられる数列を考えていることになる。

【③面積を分割してみよう】は平方根を図形的にとらえ、同じ広さの面積をもつ図形を正方形に変形

すればよいという考え方である。中学生にも比較的考えやすい内容と思われる。

【④一次式で近似しよう】は1次近似式を実際に与えて、それを用いて計算させた。1次近似式は数学Ⅲ微積分で習う内容であるので、今回は近似式を与えて計算させることにとどめた。しかし、 $\sqrt{10}$ の値を求めるには、工夫が必要で思った以上に難しかったようである。

【⑤繁分数で表してみよう】は連分数展開して計算させる課題である。高校生は分母の有理化などの計算を行っているので、内容を理解して中学生に教えることができるとされる。

【⑥正方形で取り尽くしてみよう】は開平方の考え方を図形的に考察させ、計算させるねらいがある。多項式の展開を習ったので、内容を理解してくれるのではないかと。

以上が与えた6つの方法である。

高校生にしてみれば、これらの近似値を求める方法を十分に理解したとしても、自分の考えをそのまま中学生に説明しても通用しない場合がほとんどである。自分が理解した内容を、いかに噛み砕いて説明すればよいかを考えなければならず、そこにはまさに『確かな学力』が必要とされる。このように、中学生に『教える』『説明する』機会を得た高校生は、より理解を深めるとともに確かな学力を身につけるよい学びの場になっていることが感じられたのではないだろうか。

課題と反省は、50分間の授業では内容を理解し、 $\sqrt{2}$ で実際に計算してみて、それを中学生に説明する段階で終わってしまった班がほとんどであった。

実際には2時間～3時間かけてじっくりと考察させたい内容であった。

4 中高の接続教材の実践例

中高の交流授業を始めて2年目になるが、やはり教材の選定には頭を悩ませている。

中学生と高校生では、当然前提となる知識にも差がある。その中で、お互いにとってメリットのあるプログラムになるよう、考えてきた。

昨年度は、(高校生4人+中学生5人)×10班に別れて、高校生が習得している「論理」の教材についてレクチャーし、中学生が発表するという授業形式をとった。中学生にとっては「予習」、高校生にとっては「復習」の効果を狙ったものである。

今年度は、前年度と同じように少人数の班に別れ、第2回では、高校生にとっても初めて見る「 $\sqrt{10}$ の近似値の求め方」について学習した。6つの解法を提示し、それぞれの班で1つずつの解法を実践し、発表するという授業形式をとった。中学生・高校生双方にとって未体験の問題に、様々な方法で挑むことにより、「関心・意欲の喚起」「数学的な見方・考え方を身に付けること」を狙ったものである。

正直なところ、昨年度の課題は易しく、今年度の第2回目の課題は限られた時間の中では難しかったと思う。その前後の授業でのフォローがなければ、生徒にとって有意義な時間とは言い難い面もあった。

発達段階や前提となる知識の異なる異学年交流授業では、どのような教材選定が望ましいのか？大きく分けて、3つの教材が考えられると思う。

- I 高校で習うもの(昨年度の論理)
- II 中学生も高校生もできないもの(今年度の第2回、近似値)
- III 中学生も高校生もできるもの(今年度の第1回、九九の規則)

これまで取り組んできた、授業や学校外での数学教育活動の中から、中高の接続教材のヒントを与えてくれそうなものを、いくつかピックアップしてみよう。

金沢市には、平成16年度に金沢大学教育学部の大谷実教授が中心となって始めた、「算数・数学チャレンジクラブ(以下数学CC)」という取り組みがある。

算数・数学に興味のある小学5年～中学3年の児童生徒を対象に、1回120分、年間12回程度の特別授業を行っているのだ。

本校の教員も、平成17年度から数学CCの講師として参加しており、その中で中学生対象に行なった活動に、次のものがある。

(1) 未解決問題に挑戦！(平成18年 数学CC)

・授業プリントより抜粋

ゴールドバッハ予想(1742年)

4以上の偶数=素数+素数？

問1 ゴールドバッハ予想を確かめてみよう！

$$4 = 2 + 2$$

$$6 = 3 + 3$$

$$8 = 3 + 5$$

$$10 = 3 + 7 = 5 + 5$$

$$12 =$$

$$14 =$$

$$\dots\dots\dots$$

$$34 =$$

$$\dots\dots\dots$$

$$48 =$$

$$\dots\dots\dots$$

$$60 =$$

一見、正しそうなのですが、コンピュータでいくら大きな偶数まで調べても、予想が正しいことを示したことにはなりません。どこかで反例(素数+素数とならない4以上の偶数)が見つければ、「予想は正しくない」という結論が得られますが…。

「ゴールドバッハ予想が解決できた人には100万ドル(約1億1千万円)あげる！」

2000年にはアメリカとイギリスの出版社からの懸賞金がかかりましたが、誰も解けていません。

数学の世界には、ゴールドバッハ予想のように長い間誰も解けていない問題や、フェルマーの大定理のように何百年もたってやっと解けた問題がありま

す。

今日は、いつものように「解ける問題」ではなく、誰も解けていない問題に触れてみましょう……

コラッツ予想（日本では角谷予想）

自然数 n が奇数なら 3 倍して 1 を足し、偶数なら 2 で割る。これを繰り返すと、最初にどんな自然数 n を選んでも、いつかは $1 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1$ を繰り返す。

問 2 コラッツ予想を確かめてみよう！

$1 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1$

$2 \rightarrow 1 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1$

$3 \rightarrow 10 \rightarrow 5 \rightarrow 16 \rightarrow 8 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1$

$4 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1$

……

27 →

……いくつかの未解決問題について実験し体感……

問 6 問 1 ~ 5 のうち、21 世紀の間に解けそうな予想は？ また、解けるとしたら、どんな形で？

・終了後の考察

ゴールドバッハ予想は、1 通りで良いのだが、何通りかに表せる数が出てくることを感じてもらうため、すべての表し方を考えてもらった。

コラッツ予想の 27 では、非常に長い計算の末に

$1 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1$ となる。

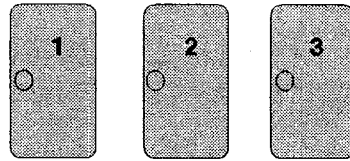
時間内には計算が終わらず、悔しがった生徒もいたが、作業を通して未解決問題を味わうというのは、概ね好評だった。

これは前述のタイプ II 「中学生も高校生もできないもの（というか全人類がまだ解けない問題）」ではあるが、使う道具はタイプ III 「中学生も高校生もできるもの」で、接続教材としては面白いのではないかと思う。

(2) モンティホールジレンマに挑戦！（平成 19 年 数学 CC）

・授業プリントより抜粋

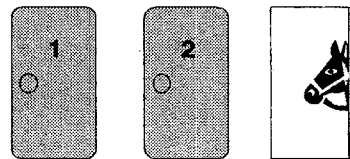
タカコさんは今、3 つのドアの 1 つを選んで賞品を獲得するゲーム番組に出ています。



司会者：ドアの 1 つには賞品があります。残りの 2 つのドアはハズレで馬がいます。それではタカコさん、当たりだと思うドアを 1 つ選んでください。

タカコ：うーん、悩みますが 1 のドアにします。

司会者：私は、正解のドアを知っていますので、残りの 2 つのドアのうち、ハズレのドアを 1 つ開けてあげましょう。



司会者は 3 のドアを開けました。そこには馬がいました。

タカコ：よかった、3 を選ばなくて！

司会者：さて、ここで 1 度だけドアを交換することが出来ます。

先ほど選んだ 1 のままにしますか？

それとも、まだ残っている 2 に変えますか？

タカコ：うーん、困りました。数学チャレンジクラブの 2、3 年生に聞いてみます。

司会者：3 択です。必ず一回手を上げて下さい。

A どちらを選んでも当たる確率は等しい。

B 変えたほうが当たる確率は高い。（2 が有利）

C 変えないほうが当たる確率は高い。（1 が有利）

タカコ：皆さん、お願いします！

ここで手を上げさせたところ、

- A 確率は等しい。……25人
- B 変えたほうが当たる確率は高い。
(2が有利) ……1人
- C 変えないほうが当たる確率は高い。
(1が有利) ……0人

であった。正解は、当然B(ちなみにただ1人の正解者は、この問題を知っていたそうです。)なのだが、あえて正解をいわずに、トランプを用いて次の実験をした。

- ①2人1組になってもらい、赤い数字のトランプ1枚と、黒い数字のトランプ2枚を各班に配る。
- ②1人が司会者、もう1人がタカコさんになって、赤いトランプが当たりということにして、「変えない作戦」で20回、「変える作戦」で20回、実験をし、当たった回数を数える。
- ③13班分のデータを集計し、どちらが有利だったかを検証する。

その結果が次の表である。

	変えない作戦で当たった回数 /20回	変える作戦で当たった回数 /20回
1 班	11	12
2 班	12	18
3 班	8	15
4 班	6	11
5 班	7	10
6 班	4	9
7 班	9	15
8 班	7	15
9 班	8	10
10 班	8	11
11 班	6	11
12 班	8	14
13 班	4	11
計	98回/260回	162回/260回
当たる確率	38%	62%

改めて「どちらが有利か？」を問うたところ、当然全員が「変えたほうが有利」と答えた。特に、自らヒントを与えていることになる司会者役をした生徒たちは、「変えたほうが有利」な事実を体感したようだ。なお、当たる確率は

$$\text{変えない場合} \cdots \frac{1}{3}, \text{変える場合} \cdots \frac{2}{3}$$

であるという理論的な裏づけは後で行った。

5 おわりに

異学年交流授業の場合、下の学年は、上の学年から受ける刺激は大きく、同一学年で学習するより、理解や定着の効果は十分に期待できるが、それに対して、上の学年では、授業内容そのもの以外に交流授業を通して、下の学年から得るものは果たして何であろうか。こういう疑問を少し抱えながら、この交流授業に取り組んでみた。

今年度行われた2回の異学年交流授業において、中学3年生の目標の1つに、「高校生と共に学び、グループ学習の進め方を通して他者理解のモデルに触れ、他者理解力を伸ばす」を、高校1年生の目標の1つに、「中学生と共に学び、グループ学習で自分の考えを説明する過程でよりわかりやすい表現を確認することによって、一人一人が自己表現力を向上させる」を設定した。授業後の高校生の感想をみると、「中学生とコミュニケーションがとれるようになりよかった」、「どちらにとってもすごく勉強になった」、「理解できても説明するのは難しかった」、「中学生と楽しく学べた」など、肯定的な感想が多く、こちらの予想以上の高校生の反応であったと思う。実際に、2回目の交流授業において、三平方の定理を知らない中学生が、高校生に三平方の定理を教えてほしいと要望し、それを一所懸命に説明している場面もあり、高校生にとって日頃の授業とは異なり、数学的な内容を深めるよい機会になったようである。

このような異学年交流授業は、年間を通して恒常

的に実施することは難しいかもしれないが、不定期に何度か実施することは可能であり、これによってコミュニケーション力、他者理解力と自己表現力を育成することができると考えられる。高校1・2年生、2・3年生でも実施可能であるが、異校種間における交流授業ということも、普段接することがない生徒同士ということでその効果も高いのではないかと考えられる。また、発達段階でみると、思考水準が第3水準の初期の段階である中3生と第3水準にすでに達している高1生との組み合わせというところにもよい効果が出ていると考えられる。

交流授業を実施するにあたって、一番難しいのは教材の選択である。例えば、中学3年生と高校1年生の場合、両学年ともに学習している内容、一方のみが学習している内容、両学年とも学習していない内容が考えられるが、それぞれの場合にどのような場面設定・教材構成でグループ学習させるかということである。今年度の1回目の交流授業では、中学生だけが予めそれに近い内容に取り組んだ上での交流授業で、高校生とのバランスが取れていたように思われる。また、昨年度実施したものについては、高校生の方が十分に準備をして、中学生をリードすることを前提として行っている。それに対して、今年度の2回目の交流授業では、高校生にとっても難しく、それを中学生に解説したり、共に考えるというところまで至らなかった。しかし、テーマは興味深いものがあり、2時間連続の授業などで実施するとおもしろい結果になった可能性もある。異学年交流授業ということで、普通の座学の授業ではなく、グループ学習、グループ発表などを取り入れることも含めて考えると、教材の選択がますます限られてしまい、難しい。

今後も、このような異学年交流授業を継続していく予定である。このあと予定している交流授業は、高校生が中学生に確率の指導をする授業、相似な図形の面積比を教材とする授業、2次関数のグラフを

1次関数と基本の2次関数を加え合わせることにより描く授業などである。これらの授業を積み重ねていき、生徒の反応、学力の向上、教材の構成などについて分析をし、試行を繰り返すことで次のステップへ繋げていきたいと考える。現段階では、成果の報告はほとんどなく、単なる実践の報告である。新しい学習形態として、いろいろな学校現場において実践していただけるような成果が報告できるように、今後も取り組んでいきたい。

[参考文献]

研究紀要第49号

共に学ぶ生徒の育成を目指して

～コミュニケーション力を高める実践研究～

平成18年度 金沢大学教育学部附属中学校

義務教育に係る諸制度の在り方について

(初等中等教育分科会の審議のまとめ)

今後の初等中等教育改革の推進方策について

(諮問)

高校教育研究第53号2001

金沢大学教育学部附属高校内

高校教育研究会

論理の基礎について学ぼう 1

年 組 番 氏名 ()

1. 「カラスは黒い」について

(1) 次のことは正しいですか。

- ①カラスは黒い。
- ②黒いものはカラス。
- ③カラスでないものは黒くない。
- ④カラスでないものは黒い。

(2) 仮定と結論を入れ替えたり、それぞれを否定してみたり、いろいろな組み合わせを考えて、正しいものはどれか考えてみましょう。

(3) 「カラスは黒い」について、仮定と結論のそれぞれを否定したり、それを入れ替えたりした場合、正しくなるのはどんな場合か、まとめてみましょう。

論理の基礎について学ぼう 2

年 組 番 氏名 ()

2. 「キムチは辛い」についても, 1. (3) と同じようなことがいえますか。

3. 何か自分で面白い例を考えて, 論理が正しくなる場合はどんな場合か, 考えてみましょう。

論理の基礎について学ぼう 3

年 組 番 氏名 ()

4. 「野口英世が載っているお札は1000円札である。」の場合, 例えば「野口英世が載っていないお札は1000円札でない。」のように, 正しくなる場合が増えることがあります。これはどういう場合ですか。また, そうなる例をあげなさい。

中高交流授業報告（数学）

金沢大学教育学部附属中・高等学校 数学科
(文責 高等学校 戸田 偉)

- 1 対象者 中学校 3年選択数学 (51名 担当教諭: 戸水 吉信)
高等学校 1年A組 (40名 担当教諭: 戸田 偉)
- 2 日時 平成19年2月22日(木) 5限
- 3 場所 高等学校工学部校舎4階美術室
- 4 本時の学習指導
- (1) 題材 高等学校 数学A (2) 集合と論理 1. 命題と証明
- (2) 目標 中学生… 命題, 逆, 裏, 対偶, 真, 偽などの数学用語と用法をマスターする。
命題とその対偶の真偽が一致すること等を, 具体例を通して確かめる。
高校生… 中学生へのレクチャーを通して, 数学の理解の深さの3つのレベル
「わかる・できる・教えられる」の違いを感じ, より深い理解を目指す。
- (3) 準備 プリント「論理の基礎について学ぼう1,2」
1班につき中学生5人, 高校生4人で男女が半々になるように10の班をつくる。
高校生には前もってプリントを渡し, 班毎に準備しておくように指示する。
当日, 美術室の机・椅子を班毎にくっつけておく。

(4) 学習指導過程

学習内容及び学習活動	時間	教師の支援活動
1 本時の課題を確認する。 (i) 「カラスは黒い」「カラスは黒くない」という命題の逆, 裏, 対偶をつくる。 (ii) それら8つのうち, 真になるものはどれかを考える。 (iii) 他の真の命題でも(i)を考え, (ii)と同じになるかどうかを考察する。	10	戸水 (中学) ・ 自己紹介を兼ねて班毎に50音順・時計回りに着席するよう指示。
2 高校生によるレクチャー ・ 用語の確認と8命題の文章化 ・ 個別の命題の真偽を中学生が考察する ・ いくつかの例と下図を用い, 中学生が気づいたことをまとめていく ① $p \Rightarrow q$ ← 逆 → ② $q \Rightarrow p$ ↑ ↘ ↗ ↑ 裏 対偶 裏 ↓ ↙ ↘ ↓ ③ $\overline{p} \Rightarrow \overline{q}$ ← 逆 → ④ $\overline{q} \Rightarrow \overline{p}$ ⑤ $p \Rightarrow \overline{q}$ ← 逆 → ⑥ $\overline{q} \Rightarrow p$ ↑ ↘ ↗ ↑ 裏 対偶 裏 ↓ ↙ ↘ ↓ ⑦ $\overline{p} \Rightarrow q$ ← 逆 → ⑧ $q \Rightarrow \overline{p}$	25	戸水 (中学) ・ 戸田 (高校) 机間巡視。次の点をチェック ・ 中学生・高校生とも意欲的に参加しているか (関心・意欲・態度) ・ 「 $p \Rightarrow q$ が真」かつ「 $q \Rightarrow p$ が偽」のときと, 「 $p \Rightarrow q$ が真」かつ「 $q \Rightarrow p$ が真」のときの8命題の真偽を考察できているか (数学的な見方・考え方) 高校生が出来ていない場合は教員がサポート 高校生が出来ていて, 中学生に伝えきれていない場合も助言
3 中学生による発表 1(iii)について, 気がついたこと (対偶の真偽一致) や, 特殊な具体例 (必要十分の場合) の発表	10	・ 教室を前後5班ずつに区切り, 前黑板1~5班は戸田 (高校) 後黑板6~10班は戸水 (中学) がコメント

		<ul style="list-style-type: none"> 真の命題の対偶も真であることや、必要十分の場合のみ真の命題が4つになることに気づいた班を褒める。
4 まとめ	5	戸田（高校） <ul style="list-style-type: none"> 用語の確認 真の命題の対偶は真である事を確認。 実は偽の命題の対偶は偽である事を紹介。 今回は個別に命題の真偽を検討したが、高校以降では集合の包含関係を用いて考えることを紹介。

5. 授業後の感想より（抜粋）→斜体は教員のコメント

(1) 中学生

- 論理について学んでみて、高校生の説明が、身近にあるものを取り入れたり、中学で習った図形の証明を例にして説明してくれたりとても分かりやすくよかったです。
→少人数によるレクチャーは概ね好評だったようです。
- 今まで手探りで論理の問題を解いてきたけれど、今日でその法則のようなものが分かり、とても効率的に解法が出せるようになった。論理の基礎に触れることができ、とても有意義だった。
→高校では論理は敬遠されがちな分野ですが、「楽しかった」感想が多かったのは収穫でした。
- 今日の授業でやっと先生が今まで言ってきたことが完全に理解できた気がする。逆、裏、対偶を図式化することでそれぞれの真偽が分かるのは画期的だと思った。
→図式化して説明したり、集合の包含関係を使ったり、高校生はいろいろ工夫していたようです。

(2) 高校生

- 数学は「わかる（理解できる）」→「解ける」→「教えられる」の3段階だけれども、まともに教えることができなかつたので、まだまだ勉強が足りないと思った。普段普通に授業している先生たちはすごいと思う。自分は一日でもすごく精神的に疲れた。
→自分の理解の深さを見直す良い機会になったという生徒が多数いました。
- 中学生なのに、すごく知識があったから怖かった。
- 命題、逆、裏、対偶という言葉や $p \Rightarrow q$ といった表記法を用いて説明したほうがやりやすかったです。中学生の理解のはやさに驚いた。説明するには時間が足りませんでした…。
→「中学生の飲み込みのはやさに感心した」という意見も多数ありました。
- 論証の導入として簡単な命題をもってくるとき、できれば「カラスは黒い」などの抽象的なものは避けてほしいです。“○○○ならば△△△”とベン図を使うとわかりやすくなったと思います。
→高校では、真偽のアヤシイ命題は避けます。高校生には、「『カラスが黒い』は『真』だと認めてくれ!」と言ってありました。

(3) 収穫と課題

論理は、高校に入学した生徒が最初に違和感を覚える分野の1つ。そこを「楽しい」と思ってもらうこと（中学生）、理解の曖昧な部分をしっかりと固めること（高校生）が狙いだった。その手段として、少人数のレクチャー形式、班学習という形をとった。この手法そのものは効果があったと思う。しかし、①教材の難易度や②年度末2月という時期（高校入試後）はこれでもいいのか？③班学習の評価をどのように個人に反映するか？課題は残る。

今年度は高校が改装工事のため仮校舎に移転し、中学生にバスで来てもらうという形だったが、平和町に戻れば隣同士。今年度の課題を改善し、次年度につなげていきたい。

九九表から規則を見つけよう

年 組 番 氏名 ()

下の図のように、2数のかけ算の結果を表にしたものを「九九表」といいます。

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

(見つけた規則)

(そうなることの説明)

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

(見つけた規則)

(そうなることの説明)

3年2組 (附属中学校) 数学科 学習指導案
1年C組 (附属高校)

平成19年6月12日(火) 第5限
指導者 3-2教室 T1: 戸水 吉信 (附属中学校)
T2: 塩屋 千学 (附属高校)
3-1教室 T1: 松原 敏治 (附属中学校)
T2: 菊野 慎太郎 (金沢大学)

1. 単元名 中学校3年「多項式」 高校1年「数学α: 数と式」

2. 目標

- ・文字を用いた簡単な多項式について、式の展開や因数分解ができる。(中3)
- ・目的に応じて式を変形することができ、それを用いることができる。(中3)
- ・展開や因数分解の公式を理解し、それらを利用して、展開や因数分解ができる。(高1)
- ・絶対値記号の意味を理解し、場合分けして絶対値記号を用いずに表すことができる。(高1)

3. 評価の観点及び規準 (本時に関係ある部分を、評価規準表から抜粋。詳しくは別紙を参照。)

① 数学的への関心・意欲・態度

式の展開や因数分解を利用して問題を解決しようとする。

② 数学的な見方や考え方

具体的な場面で式を目的に合うように変形し、数量の関係などを考察することができる。

4. 指導にあたって

【指導観】

数学科では、「他者理解力と自己表現力の育成～思考水準に応じた指導～」を今年度の研究主題として研究をすすめている。昨年度は「自己表現力」の育成を中心に研究をすすめたが、今年度は、「他者理解力」の育成も視野に入れて研究をすすめることにした。先の校内研修会において金沢大学の岡谷先生より、数学の学習においては、数学的に議論をすすめていくことが必要不可欠であるとの指摘を頂いたが、そういった活動を円滑にすすめていくには、まさに個々の、または集団としての自己表現力と他者理解力が必要不可欠である。

そのためには、グループ学習やレポートの評価活動などを多く取り入れて、個と個が数学的に議論する機会を増やすとともに、全体学習において「より分かりやすい表現」を確認し合うことで、全体的な自己表現力の向上を目指したい。また、昨年度、高校生との交流授業を行った際、生徒から「高れは高校生のグループ学習の進め方が分かりやすく、参考になった」という感想が多々聞かれた。これらから高校生が中学生の理解の程度を把握し、自分たちの考えを分かち合ったりやすくと考え、中学生が他者理解力をつけていくことができるのではないかと考え、高校生との交流授業を行っていきこととした。昨年度は1グループ8～10人という多人数だったため、うまく話し合いが進まない班があったことも反省として、今年度は1班6人～7人の班編成で授業に臨みたい。

【教材観】

中学校3年生、高校1年生ではともに多項式の積について学習する。中学校3年生は $(a+b)^2$ などの多項式×多項式の計算で、高校1年生は $(a+b)^3$ などの多項式×多項式×多項式など、積一般について学習となる。複雑さや難易度に差はあるが、中学校3年生にとっては、一旦多項式の積の計算方法を理解すれば、高校1年生の学習内容を理解するのは比較的容易である。そのため「多項式」の単元は、中学校3年生と高校1年生の交流学習を行うには適切な単元であるといえる。(中学校2年生では、多項式の和と差の交流学習を思えば、「多項式」の単元は、中学校2年生と3年生の交流授業を行うよりも中学校3年生と高校1年生の交流授業の方がはるかに行きやすいのである。) 本時では、多項式の計算を利用して数学的な事象を考察し、お互いの考えを発表し合う中で、共に学ぶことができる授業を目指した。具体的には「九九表」を教材として用い、その中から様々な規則を見つけ、それを多項式の計算を用いて考察する授業を試みることとした。これは、見つけた規則によつては3次、4次の計算が必要で、中学校3年生にとつては少し発展的な計算になるが、高校1年生とともに学習することで、理解することが可能であると考えた。また、高校1年生にとつても、難易的に丁度よい教材であると考えた。また、規則を見つけることに関して、お互いの思考のレベルに差はないと考えている。高校生も中学生と議論をすすめる中で、新たな発見があるかもしれないのではないだろうか。

【生徒観】

中学校3年生と高校1年生の思考水準は、ともに第2水準に到達し、第3水準へ移行する時期にあたり、思考水準が似ている。そのため、数学的に同じ土俵で議論することが比較的容易であると考えられている。しかし、第3水準的な議論にはやはり高校1年生が慣れていると思われるため、自己表現力よりも他者理解力に差があると考えられる。その差がうまく働いて中学校3年生の他者理解力を引き上げる結果につながれば、と考えている。

※本校数学科で考えている「数と式」領域の思考水準 (作業仮説)

第1水準 具体的な物を使つての計算から、「数学」での機械的操作による計算ができる。

第2水準 いろいろな法則を見つけ、それを具体的な事象に照らすなどして、一般的に成り立つことが説明できる。

第3水準 いろいろな数の定義を理解し、定義から計算法則などの公式・定理を導き出し、新たな公式・定理の証明ができる。

また、必要に応じて数の場合分けをして、数学的な議論をすすめることができる。

5. 指導計画および評価計画

中学校3学年「多項式」(総時数15時間)

- 第1次 多項式の計算 (6時間)
- 第2次 因数分解 (5時間)
- 第3次 式の計算の利用 (4時間)
 - 第1時 カレンダーからいろいろな規則を見つけ、説明しよう
 - 第2時 九九表からいろいろな規則を見つけ、説明しよう【本時】
 - 第3時 展開や因数分解を利用していろいろな数の計算をしよう
 - 第4時 展開や因数分解を利用して数や図形の性質を見つけよう

評価計画

- ①②③④
- ①②③④
- ①②③④
- ①②
- ①②
- ③
- ② ④

高等学校1学年

- 第1次 整式の加法・減法および乗法(展開公式)【本時】
- 第2次 整式の因数分解
- 第3次 約数と倍数, 分数式の計算
- 第4次 絶対値, 平方根の計算

- ①②③④
- ①②③④
- ①②③④
- ①②③④

6. 本時の学習(中学校3学年 第3次中第2時 高等学校1学年 第1次中)

- (1) 題材名 「九九表から規則を見つけよう」
- (2) わらい
 - ・目的に応じて式を変形することができ、それを用いることができる。(中3)
 - ・展開や因数分解の公式を理解し、それらを利用することができる。(高1)
- (3) 評価の観点および規準(別紙の評価規準表を参照)
 - ① 数学的への関心・意欲・態度
式の展開や因数分解を利用して問題を解決しようとする。
 - ② 数学的な見方や考え方
具体的な場面で式を目的に合うように変形し、数量の関係などを考察することができる。
- (4) 「他者とのかかわり」「共に学ぶ」や「他者理解力」「自己表現力」育成に関する学習活動について
高校生と関わり合いながら他者理解のモデルに触れ、他者理解力を伸ばし、全体発表会で、分かりやすい表現を確認し合い、自己表現力を伸ばす活動。
- (5) 本時の展開

時間 学習形態	学習活動	予想される生徒の反応(☆)および 指導上の留意点(※)・評価(◆)・支援(◎)																																																																																	
3分	・アイス・ブレイキング 自己紹介を兼ねて「名前神経衰弱」をする																																																																																		
<課題> 九九表から規則を見つけ、なぜそうなるのかを発表しよう。																																																																																			
	<table border="1" style="display: inline-table; border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>7</td><td>8</td><td>9</td></tr> <tr><td>2</td><td>4</td><td>6</td><td>8</td><td>10</td><td>12</td><td>14</td><td>16</td><td>18</td></tr> <tr><td>3</td><td>6</td><td>9</td><td>12</td><td>15</td><td>18</td><td>21</td><td>24</td><td>27</td></tr> <tr><td>4</td><td>8</td><td>12</td><td>16</td><td>20</td><td>24</td><td>28</td><td>32</td><td>36</td></tr> <tr><td>5</td><td>10</td><td>15</td><td>20</td><td>25</td><td>30</td><td>35</td><td>40</td><td>45</td></tr> <tr><td>6</td><td>12</td><td>18</td><td>24</td><td>30</td><td>36</td><td>42</td><td>48</td><td>54</td></tr> <tr><td>7</td><td>14</td><td>21</td><td>28</td><td>35</td><td>42</td><td>49</td><td>56</td><td>63</td></tr> <tr><td>8</td><td>16</td><td>24</td><td>32</td><td>40</td><td>48</td><td>56</td><td>64</td><td>72</td></tr> <tr><td>9</td><td>18</td><td>27</td><td>36</td><td>45</td><td>54</td><td>63</td><td>72</td><td>81</td></tr> </table>	1	2	3	4	5	6	7	8	9	2	4	6	8	10	12	14	16	18	3	6	9	12	15	18	21	24	27	4	8	12	16	20	24	28	32	36	5	10	15	20	25	30	35	40	45	6	12	18	24	30	36	42	48	54	7	14	21	28	35	42	49	56	63	8	16	24	32	40	48	56	64	72	9	18	27	36	45	54	63	72	81	例:(見つけた規則) 2×2の正方形で、右上と左下の数の積は右下と左上の数の積に等しい (その理由) 左上の数をaとbの積とすると $ab \times (a+1)(b+1)$ と $a(b+1) \times b(a+1)$ が等しい
1	2	3	4	5	6	7	8	9																																																																											
2	4	6	8	10	12	14	16	18																																																																											
3	6	9	12	15	18	21	24	27																																																																											
4	8	12	16	20	24	28	32	36																																																																											
5	10	15	20	25	30	35	40	45																																																																											
6	12	18	24	30	36	42	48	54																																																																											
7	14	21	28	35	42	49	56	63																																																																											
8	16	24	32	40	48	56	64	72																																																																											
9	18	27	36	45	54	63	72	81																																																																											
全体学習 2分 個別学習 10分 総活動 20分	<ul style="list-style-type: none"> ・本日の課題の説明 簡単な例を挙げながら、本日の課題について説明する ・最初は個別に考える。 ・わからなければ相談する。 ・自分が見つけた性質を班で発表する。 順に発表する。他の生徒はそれをしっかりと聞く。 ・班の中で1つ全体発表で発表する。 発表者はできるだけ中学生。 高校生は中学生がうまく発表できるように助言する。 (他者理解力のモデリング) 	<ul style="list-style-type: none"> ※2×2の正方形で囲まれた数について、何か気づくことはないかきく。 ☆和は?積は?積の差は? ※例は最後まで検証しない。個別の追求へとうつらせる。 ◆①式の展開や因数分解を利用して問題を解決しようとする。(机間巡視) ◎まずはいろいろな例を考えるように支援する。計算機の利用も促す。 ◆②具体的な場面で式を目的に合うように変形し、数量の関係などを考察することができる。(机間巡視, レポート用紙) ◎文字のおき方について、九九表だから、aとbの2文字を使うことを助言する。 ※できるだけ多様な性質が出るように、机間巡視で規則の種類の調整をする。 																																																																																	
<課題2> 班ごとに、見つけた規則を発表しよう。																																																																																			
全体活動 15分	<ul style="list-style-type: none"> ・各班の発表を聞く。 ・それぞれの発表について意見交換をする 	<ul style="list-style-type: none"> ※発表の中でわかりやすい表現、いい表現をとりあげ、全体で共有する。(自己表現力のモデリング) 																																																																																	

準備するもの ワークシート, 電卓(班に1台), マジック, 発表用用紙, マグネット
 班構成 中学校3年3人~4人+高校1年3人~4人 計6人~7人班
 全部で6班×2クラス 男女混合

近似値を求めてみよう

実数には、分数で表される有理数 (rational number) と分数で表されない無理数 (irrational number) がある。

無理数は無数にあるが、その中には、代数的数^{*1} $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ などと超越数^{*2} π などがある。これらの値は、およそどれくらいか、その値をどのように計算することができるかについて考えてみよう。

【課題1】近似値を求めてみよう

問1 次のおよその値は知っていますか。

$$\sqrt{2} = 1.4142135623730950488016887242097 \dots$$

$$\sqrt{3} =$$

$$\sqrt{5} =$$

$$\sqrt{6} =$$

$$\sqrt{7} =$$

$$\pi = 3.1415926535897932384626433832795 \dots$$

問2 $\sqrt{10}$ の値を、小数第2位まで求めなさい。(どのような方法が考えられるだろうか。)

*1 有理数を係数とする代数方程式を満たす数。

*2 代数的数でない数。

資料9

【課題2】 近似値を求めてみよう

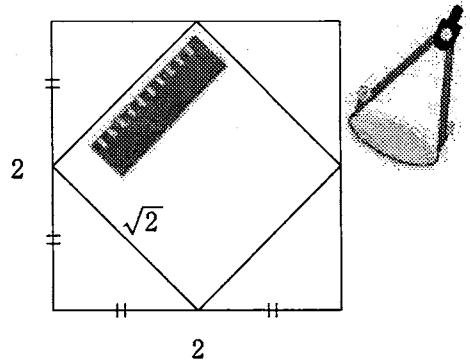
例として6つの近似値の計算方法を挙げてみました。これらの方法で $\sqrt{2}$ の近似値を求めると…

例① 作図してみよう

$\sqrt{2}$ の長さを作図すると右図のようになる。

実際に作図して $\sqrt{2}$ の長さを測る。

一つだけ書いて計っても誤差が出てくる。より正確な値を出すにはどうしたらよいだろうか。



例② 平均をとってみよう

$\sqrt{2}$ の近似値として1をとる。この1と、2を1で割ったもの(=2)の平均を計算する。すなわち

$$\frac{1}{2}\left(1 + \frac{2}{1}\right) = \frac{3}{2} (=1.5)$$

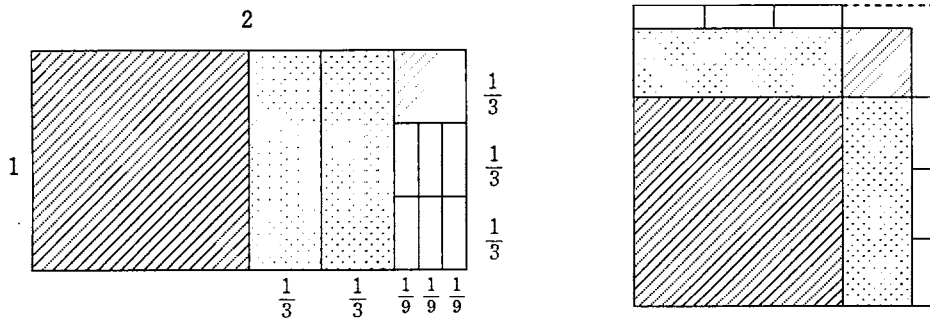
今度はこの $\frac{3}{2}$ を近似値として、 $\frac{3}{2}$ と、2を $\frac{3}{2}$ で割ったものの平均を計算する。すなわち、

$$\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2} + \frac{2}{\frac{3}{2}}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2} + \frac{4}{3}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{17}{6} = \frac{17}{12} = (\quad) \text{となる。}$$

同様に、 $\frac{17}{12}$ と、2を $\frac{17}{12}$ で割ったものの平均を計算し、小数にしてみよう。

例③ 面積を分割してみよう

$\sqrt{2}$ が分数(有理数)で表せないことは、古代ギリシアのピタゴラス学派により発見されたが、その近似値を図形を用いて求めた人がいる。面積が2の長方形を、正方形に作り変えればよい。なぜなら面積が2の正方形の一辺の長さは()ですね。ただし、ぴったり正方形にはならないので、近似値になります。



これより $\sqrt{2} \approx 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} = \frac{13}{9}$

(文献では $\sqrt{2} \approx 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{12}\left(1 - \frac{1}{34}\right)$ ということが述べられている。)

資料10

例④ 一次式で近似しよう

紀元前 2200 ころバビロニアの数学の記録では、

平方根の近似値として $\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{1}{2}x$ が用いられている。(ただし、 x が十分 0 に近いとき)

(文献では、もっと一般的な式で与えられている。)

この式によると、 $\sqrt{1+\frac{1}{49}} \approx 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{49}$ である。(両辺を 2 乗して、ほとんど等しいことを確かめよう)

従って、 $\sqrt{1+\frac{1}{49}} = \sqrt{\frac{50}{49}} = \frac{5\sqrt{2}}{7}$ であるから、 $\frac{5\sqrt{2}}{7} \approx 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{49} = \frac{99}{98}$ より

$\sqrt{2} \approx \frac{7}{5} \cdot \frac{99}{98} = \frac{99}{70} = (\quad)$ となる。

例⑤ ^{はん} 繁分数で表してみよう

$\sqrt{2}$ を整数部分と小数部分に分けると $\sqrt{2} = 1 + (\sqrt{2} - 1)$

となる。これは $\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{1+\sqrt{2}}$ となるから、(この変形は高校生は分かるよね。)

$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{1 + \left(1 + \frac{1}{1+\sqrt{2}}\right)}$ ここで最後の $\sqrt{2}$ を $\sqrt{2} \approx 1$ として

$\sqrt{2} \approx 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{\frac{5}{2}} = 1 + \frac{2}{5} = \frac{7}{5} = 1.4$ さらに分数をもう一段進めると

$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1+\sqrt{2}}}} \approx 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{5}{5}} = 1 + \frac{5}{12} = \frac{17}{12} = (\quad)$ となる。

例⑥ 正方形で取り尽くしてみよう

面積が 2 である正方形の一辺の長さが () であるから、その一辺の長さを求めてみよう。

整数の範囲で辺の長さを考えるとき、その正方形の面積が 2 を超えない辺の長さは 1 である。この正方形を取り除くと、残りの面積は 1 になる。

次に、小数第 1 位までの範囲で辺の長さを考えるとき、残りの面積 1 を超えないように追加して正方形を取り除く。すなわち、

1 辺の長さ a の正方形 A と 2 辺の長さ 1 と a の長方形 B を 2 個の和 $(1+1+a) \times a$ が面積 1 を超えないような a を見つけると、

$$a = 0.4$$

である。この面積を除くと、残りの面積は 0.04 である。

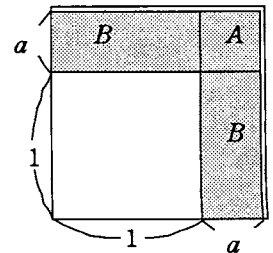
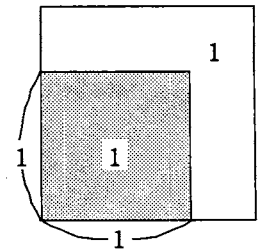
$$\begin{array}{r} 2. \square \\ \times 0. \square \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2.4 \\ \times 0.4 \\ \hline 0.96 \end{array}$$

次に、小数第 2 位までの範囲で、正方形を考えるとき、残りの面積 0.04 を超えないように考える。すなわち、

1 辺の長さ b の正方形と 2 辺の長さ 1.4 と b の長方形 2 個の和 $(1.4+1.4+b) \times b$ が面積 0.04 を超えないような b を見つけると、

$$b = 0.01$$

である。これを繰り返すと、順に 0.004, 0.0002, ... が見つかる。



$$\begin{array}{r} 2.8 \square \\ \times 0.0 \square \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2.81 \\ \times 0.01 \\ \hline 0.0281 \end{array}$$

数科学習指導案

平成 19 年 6 月 29 日 金 曜 4 限
 クラス 高校 1 年 A 組, 中学 3 年 2 組
 使用教室 美術室・音楽室

授業担当者 川谷内 哲二・塩屋 千学

科目名 数学 I 使用教材 東京書籍 数学 I, 授業用プリント

1 単元名 中学校 3 年「平方根」 高校 1 年「数と式」

2 単元の目標

- ・平方根の意味を理解し、数の平方根の近似値を求めることができる。(中学 3 年)
- ・文字を用いることよさや必要性についての理解を深める。(中学 3 年)
- ・展開や因数分解を、事象の考察に積極的に活用しようとする。(高校 1 年)
- ・目的に応じて、的確に式を変形する方法を考察することができる。(高校 1 年)

3 指導に当たって

(1) 生徒の状況

中学生は平方根の学習を終えてから、それほど期間が経っていないので、平方根の近似値の計算についても、電卓で扱ったときのように、 $\sqrt{10}$ を 3.1 と 3.2 の間、3.16 と 3.17 の間というように挟み込んでいく考え方をしている生徒が多いであろう。

高校生は数学 I で分母の有理化などの平方根の計算を扱っているが、近似値の計算についてはほとんど触れていない。そのため、中学生と同様に挟み込むような考え方をしている生徒が多いと思われるが、開平方について少し触れているので、開平方することによって平方根の近似値を計算する生徒もいると思われる。

中学生は二次関数を学習していない段階であり、また高校生は二次関数のグラフと方程式を学習していない段階なので、ニュートン法のようなグラフを利用した近似値の計算などについて考えさせることは難しい。

(2) 指導方針・方法

中学生と高校生の交流を図るために、中学生と高校生を合わせて 1 グループ 6~7 名になるように 12 グループに分け、6 グループずつで授業を展開する。

平方根は、三平方の定理などによって辺の長さとして表れる場面が多いが、中学生はその内容をまだ学習していない段階である。教材はその点を配慮して作成しているが、高校生が中学生に対して未習内容をある程度解説や指導を加えながら議論を進めていくことを期待している。

平方根の近似値の計算方法について、現段階での知識では、多くの方法が考えつかないと予想される。それで、前半は自由に思考し、各グループで近似値計算の方法について議論し、後半は教師側が提示した近似値計算の方法も取り入れて、それらを合わせて検討する。グループで議論を繰り返す中で、平方根の理解が深まると共に、新しい計算方法や計算の工夫が発見されるであろう。

4 単元の指導計画

中学校 3 年「数と式」

第 1 次 素因数分解

第 2 次 平方根【本時】

第 3 次 根号を含む式の計算

高校 1 年「数と式」(総時数 16 時間)

第 1 次 整式の加法, 減法および乗法

(展開公式) (3 時間)

第 2 次 整式の因数分解 (6 時間)

第 3 次 約数と倍数, 分数式の計算 (3 時間)

第 4 次 実数と絶対値, 平方根の計算 (4 時間)【本時】

資料12

5 本時の指導計画

(1) 本時のねらい

異学年交流授業を通して、異なる学年の意見や考えを踏まえて、それを自分なりに整理し、それをもとに新たな発見や自分の考えに結び付けられることを期待している。

具体的な数値計算に、これまで学習してきた展開が活用できることを理解し、近似値の意味とその扱いについて理解を深める。

平方根の近似値の計算を通じて、1つの教材に対していろいろな数学的な見方や考え方ができることを体験し、事象をさまざまな視点から数学的に考察しようとする態度を育てる。

(2) 準備・資料等

授業用プリント、掲示用模造紙

(3) 本時の展開

時間	学習内容	生徒の学習活動	教師の指導・支援	評価規準 (観点・評価方法)
11:45	○アイスブレイキング	○カードで順番を決めて、1人15秒で自己紹介する。		
11:50	<p>【課題1】近似値を求めてみよう</p> <p>問1 次のおおよその値は知っていますか。 $\sqrt{3}$、$\sqrt{5}$、$\sqrt{6}$、$\sqrt{7}$</p> <p>問2 $\sqrt{10}$ の値を、小数第2位まで求めなさい。</p>			
	○本時の課題について説明する。 $\sqrt{10}$ の近似値を求める。	○本時の課題を理解し、最初は個別に、その後グループで考える。 ○求めたいいくつかの値を全体に紹介する。	○アイデアがでない生徒に対しては、グループで相談するように促す。	○整式の展開を積極的に活用しようとしている。 (関心・意欲・態度) 【観察】
12:00	<p>【課題2】近似値を求めてみよう</p> <p>予め準備した6つの近似値の計算方法(①作図 ②相加平均 ③面積の分割 ④一次近似式 ⑤連分数展開 ⑥開平法)のうちの1つをそれぞれの班で考える。</p>			
	○より正確に $\sqrt{10}$ の近似値を求める。	○中学生が学習していない内容について、高校生が説明する。 ○求めた近似値がどの程度正確であるかを考える。	○近似値の計算方法がそれほど多く思いつかないと予想されるので、こちらであらかじめ準備しておく。 ○進んでいないグループには、ヒントを与える。	
12:18	<p>【課題3】</p> <p>各グループごとに、求めた近似値と、その求め方などについて発表する。</p>			
	○グループごとに発表する。	○各班の発表を聞く。 ○各班の考えが正しい根拠に基づいた値かどうかを考察する。	○近似値の求め方が正しい根拠に基づいていることを最後に確認する。	○この授業で興味を持ったこと、発見したことなどについて自己評価する。 (関心・意欲・態度、見方・考え方) 【自己評価シート】
12:32	○まとめ			