小中高の接続と新課程教材

数学科　岡山　正歩・川谷内哲二・矢部　篤雄・戸田　　偉

新しい教育課程においては，すべての学校教育の段階で「総合的な学習の時間」が中学校段階においては，種々の「選択教科」が導入される。選択教科「数学」については全国各地の中学校において試行され，その内容と形態は実に多様性に富んでいる。このことは，学校の実態と，生徒の能力・適正，興味・関心等にも配慮してのことであろうが，この教科の中で何を目標としていくかを考えたとき，学校段階の接続性や子どもの論理的思考力の発達段階に配慮した，この選択教科を考えるもう一つの観点が生まれてくるように思える。

今回は，できるだけ中高の接続性を配慮しながら中学校の「選択数学」の授業にも高等学校の授業にも通用する教材を，中学校から高等学校へ移行する内容のもの，中学校でも高等学校でも扱う内容のものを中心に考えてみた。その一例を紹介する。

キーワード：選択数学

1．はじめに

今日，学校教育は自ら学び，自ら考える力などの「生きる力」の育成を基本とし，教育内容の厳選と基礎・基本の徹底を図ることなど，いろいろな要因で，小学校，中学校および高等学校の新しい教育課程において指導する内容がかなり変更された。

現在，私達は教育学部の大谷実教授の下，「中・高の接続性を踏まえた選択教科“数学”実践的指導法の開発」というテーマで附属学校も参加して共同研究を行っている。今回は学校の実態，生徒の能力・適正・興味・関心等に配慮しながらも学校段階の接続と数学の系統性を失うことのないよう，適切に計画することができないかという観点で，図形，数と式，数量関係という３つの分野からそれぞれ考察し，いくつかの教材について工夫してみた。今後もこの研究を継続していきたいと考えている。

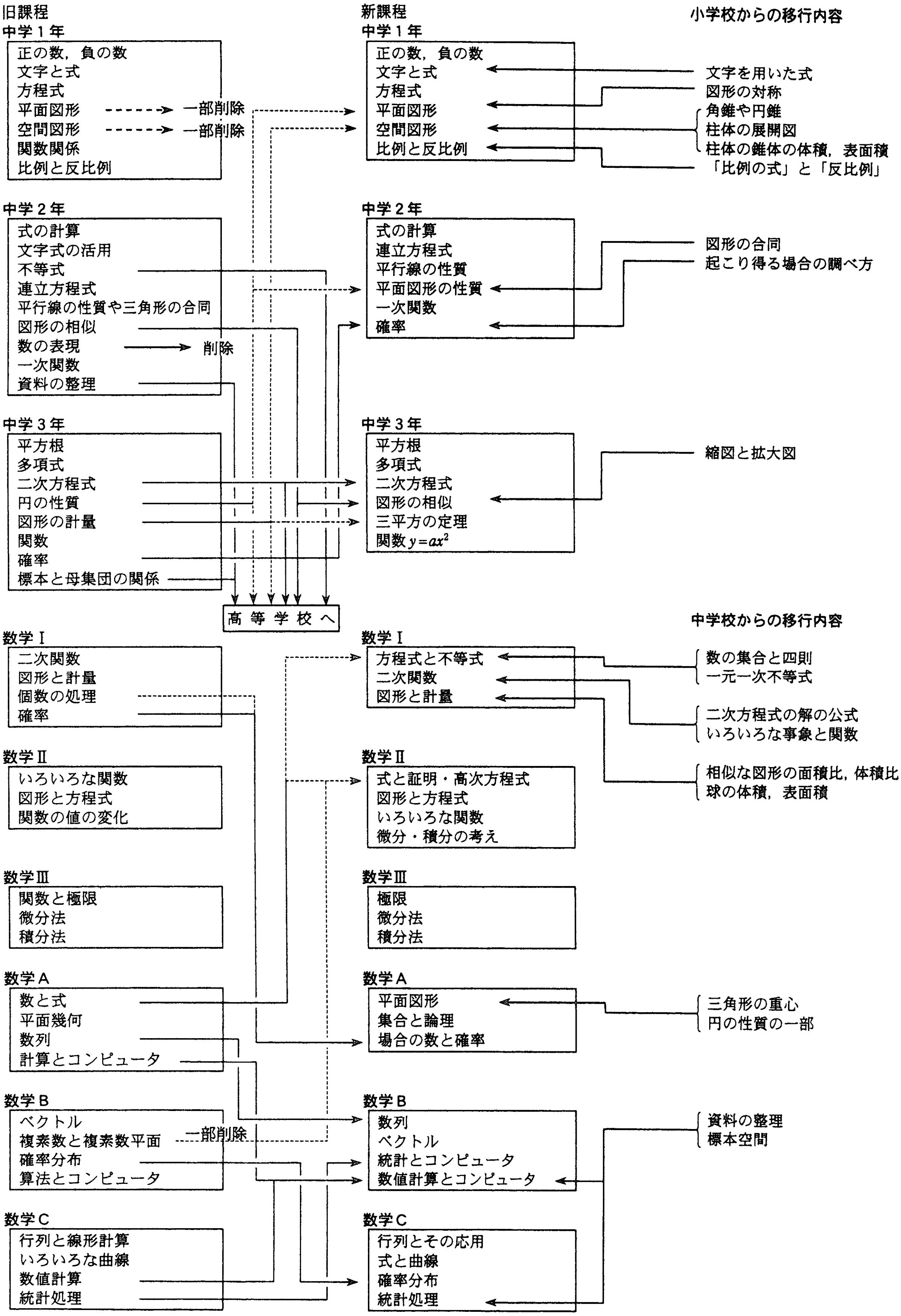
2．新旧の学習指導要領の比較

今回の学習指導要領の改訂では，これまで小学校で指導されていた内容が中学校へ，中学校で指導されていた内容が高校へと移行されたものが多いように思われる。主な改訂点について挙げてみよう。

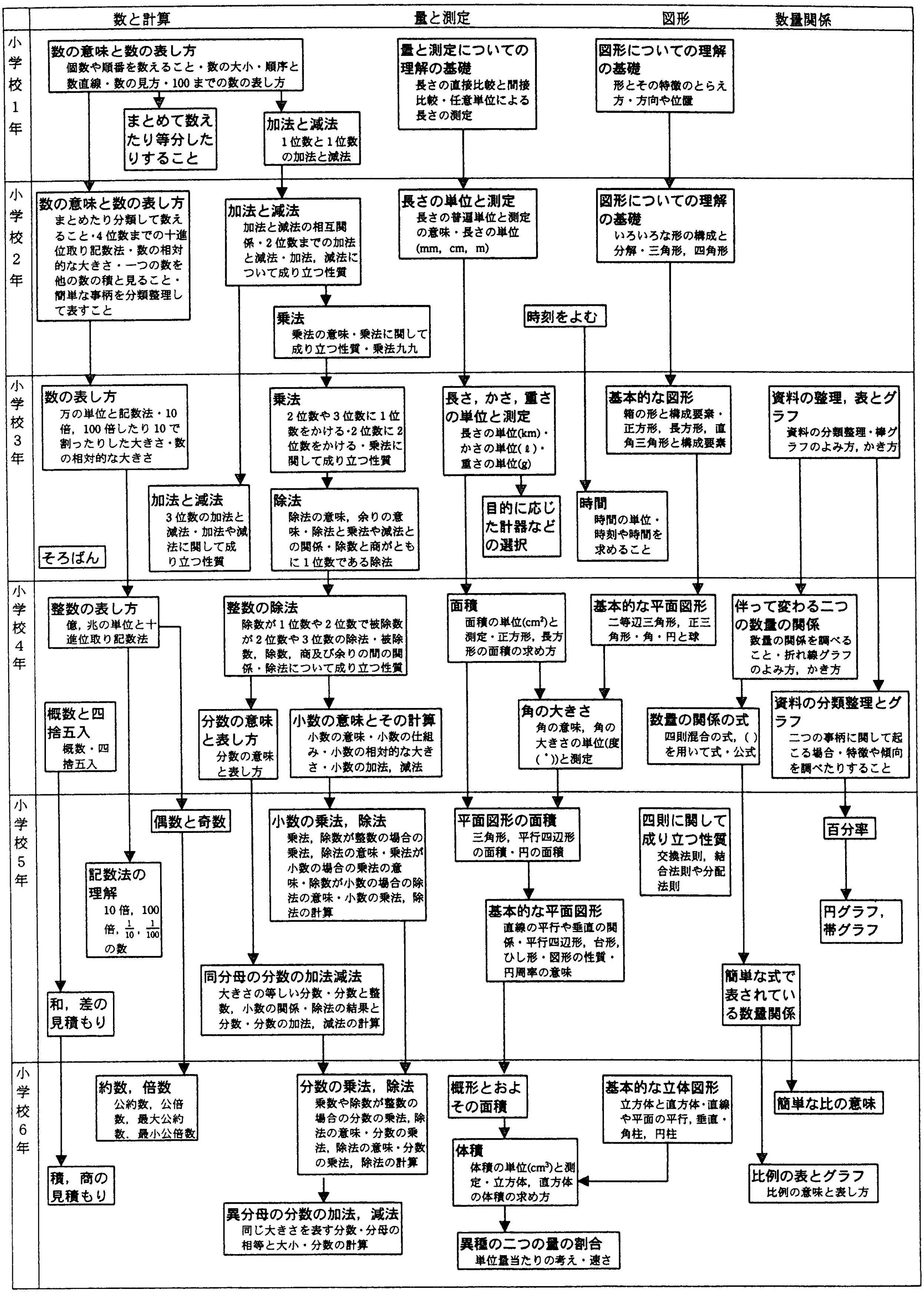
小学校から中学校へ移行された内容に，文字式や角錐・円錐，柱体・錐体の体積・表面積などの空間図形に関する内容がある。また，中学校から高校へ移行した内容には，二次方程式の解の公式，円の性質の一部，不等式などがある。このことを踏まえて指導にあたらなければならないが，年々生徒の論理的思考力が落ちてきている現状で，学習内容が先送りされるような教育課程で考える力が養われるのかが心配である。発達段階に応じた適切な精選された教材と，効果的な指導が必要になってくる。

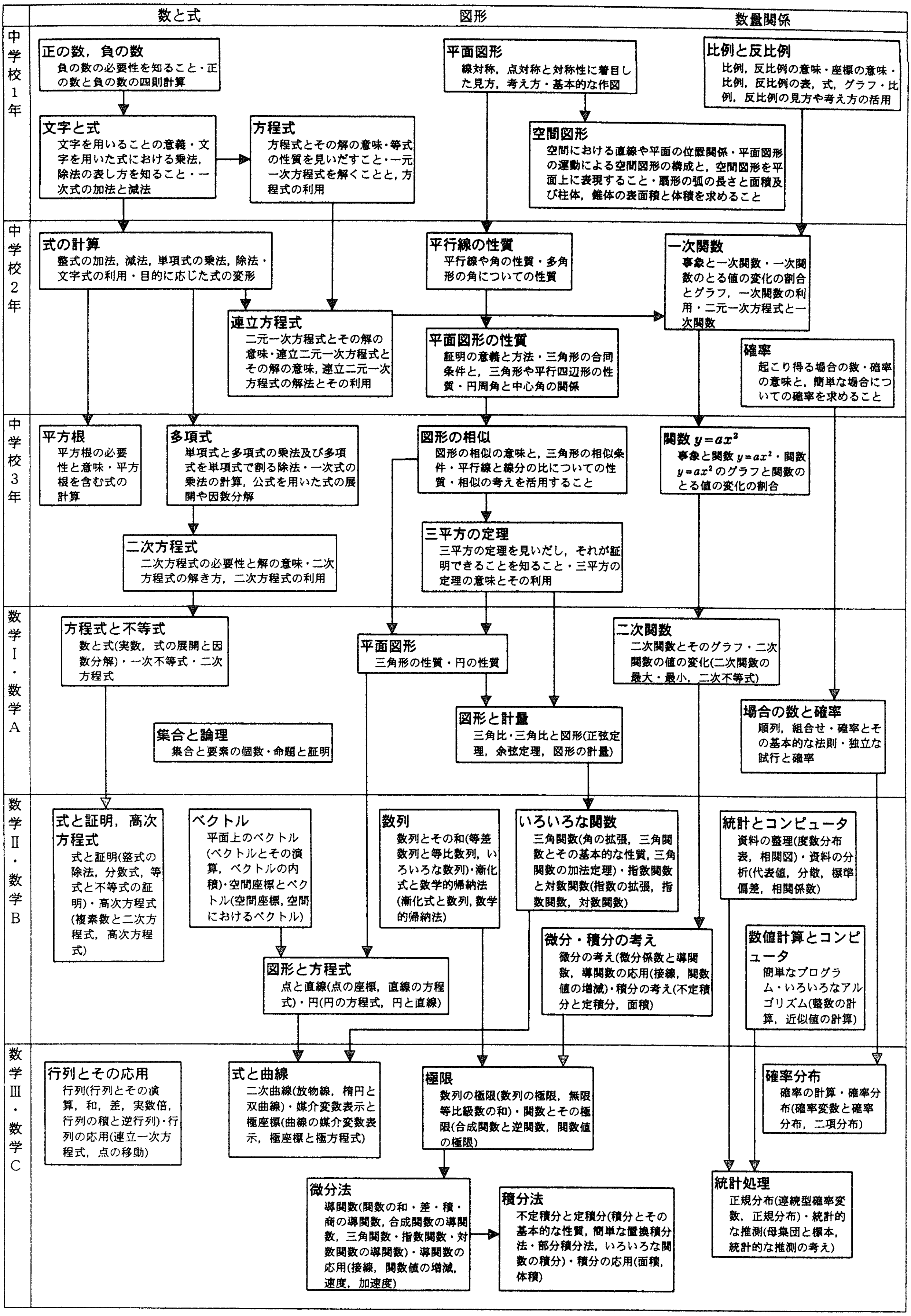
次の資料は，中学校と高等学校における新旧の学習指導要領の変更点と，小学校から高等学校までの学習内容の系統を表にまとめたものである。

資料Ⅰ　新旧の学習指導要領の変更点



資料Ⅱ　新学習指導要領における算数・数学の系統表




数と式
図形
数量関係
中学校1年
正の数，負の数
負の数の必要性を知ること・正の数と負の数の四則計算
文字と式
文字を用いることの意義・文字を用いた式における乗法，除法の表し方を知ること・一次式の加法と減法
方程式
方程式とその解の意味・等式の性質を見いだすこと・一元一次方程式を解くことと，方程式の利用
平面図形
線対称，点対称と対称性に着目した見方，考え方・基本的な作図
空間図形
空間における直線や平面の位置関係・平面図形の運動による空間図形の構成と，空間図形を平面上に表現すること・扇形の弧の長さと面積及び柱体，錐体の表面積と体積を求めること
比例と反比例
比例，反比例の意味・座標の意味・比例，反比例の表，式，グラフ・比例，反比例の見方や考え方の活用
中学校2年
式の計算
整式の加法，減法，単項式の乗法，除法・文字式の利用・目的に応じた式の変形
連立方程式
二元一次方程式とその解の意味・連立二元一次方程式とその解の意味，連立二元一次方程式の解法とその利用
平行線の性質
平行線や角の性質・多角形の角についての性質
平面図形の性質
証明の意義と方法・三角形の合同条件と，三角形や平行四辺形の性質・円周角と中心角の関係
一次関数
事象と一次関数・一次関数のとる値の変化の割合とグラフ，一次関数の利用・二元一次方程式と一次関数
確率
起こり得る場合の数・確率の意味と，簡単な場合についての確率を求めること
中学校3年
平方根
平方根の必要性と意味・平方根を含む式の計算
多項式
単項式と多項式の乗法及び多項式を単項式で割る除法・一次式の乗法の計算，公式を用いた式の展開や因数分解
二次方程式
二次方程式の必要性と解の意味・二次方程式の解き方，二次方程式の利用
図形の相似
図形の相似の意味と，三角形の相似条件・平行線と線分の比についての性質・相似の考えを活用すること
三平方の定理
三平方の定理を見いだし，それが証明できることを知ること・三平方の定理の意味とその利用
関数 $y=ax^2$
事象と関数 $y=ax^2$・関数 $y=ax^2$ のグラフと関数のとる値の変化の割合
数学I・数学A
方程式と不等式
数と式(実数，式の展開と因数分解)・一次不等式・二次方程式
集合と論理
集合と要素の個数・命題と証明
平面図形
三角形の性質・円の性質
図形と計量
三角比・三角比と図形(正弦定理，余弦定理，図形の計量)
二次関数
二次関数とそのグラフ・二次関数の値の変化(二次関数の最大・最小，二次不等式)
場合の数と確率
順列，組合せ・確率とその基本的な法則・独立な試行と確率
数学II・数学B
式と証明，高次方程式
式と証明(整式の除法，分数式，等式と不等式の証明)・高次方程式(複素数と二次方程式，高次方程式)
ベクトル
平面上のベクトル(ベクトルとその演算，ベクトルの内積)・空間座標とベクトル(空間座標，空間におけるベクトル)
数列
数列とその和(等差数列と等比数列，いろいろな数列)・漸化式と数学的帰納法(漸化式と数列，数学的帰納法)
いろいろな関数
三角関数(角の拡張，三角関数とその基本的な性質，三角関数の加法定理)・指数関数と対数関数(指数の拡張，指数関数，対数関数)
統計とコンピュータ
資料の整理(度数分布表，相関図)・資料の分析(代表値，分散，標準偏差，相関係数)
図形と方程式
点と直線(点の座標，直線の方程式)・円(円の方程式，円と直線)
微分・積分の考え
微分の考え(微分係数と導関数，導関数の応用(接線，関数値の増減))・積分の考え(不定積分と定積分，面積)
数値計算とコンピュータ
簡単なプログラム・いろいろなアルゴリズム(整数の計算，近似値の計算)
数学III・数学C
行列とその応用
行列(行列とその演算，和，差，実数倍，行列の積と逆行列)・行列の応用(連立一次方程式，点の移動)
式と曲線
二次曲線(放物線，楕円と双曲線)・媒介変数表示と極座標(曲線の媒介変数表示，極座標と極方程式)
極限
数列の極限(数列の極限，無限等比級数の和)・関数とその極限(合成関数と逆関数，関数値の極限)
確率分布
確率の計算・確率分布(確率変数と確率分布，二項分布)
微分法
導関数(関数の和・差・積・商の導関数，合成関数の導関数，三角関数・指数関数・対数関数の導関数)・導関数の応用(接線，関数値の増減，速度，加速度)
積分法
不定積分と定積分(積分とその基本的な性質，簡単な置換積分法・部分積分法，いろいろな関数の積分)・積分の応用(面積，体積)
統計処理
正規分布(連続型確率変数，正規分布)・統計的な推測(母集団と標本，統計的な推測の考え)

3．教材について

(1) 図形

いろいろな意味で幾何教材が見直されている昨今である。今回の改訂学習指導要領において，図形の合同，対称，拡大・縮小や柱体，錐体の表面積，円錐などの立体図形の内容が小学校から中学校へ，三角形の重心，円の性質に関する内容の一部が中学校から高等学校へ移行された。

高等学校においては，数学基礎（２単位）または数学Ｉ（３単位）が必修科目として位置づけられた。すべての内容が必修となった数学Ａ（２単位）においては，平面幾何で，三角形の五心と円の諸性質を中心に学習することになった。中学校においては選択教科としての数学もあって，移行された内容をすでに学習して入学してくることも予想される。また生徒の高等学校の一年生後半の数学的な学力の背景と中学校の生徒のそれとにはかなりの開きがある。中学校で学ぶ内容をそのまま高校で学ぶという通り一遍の授業を試みることに躊躇いがあって，その授業の可能性について考えてみた。

現在，教育学部の大谷実先生の下で「中・高の接続性を踏まえた選択教科“数学”の実践的指導法の開発」というテーマで附属学校も参加して共同研究を行っている。授業の可能性は，その選択教科“数学”のことも考慮して考えた。また八月の初旬に教育学部で愛知教育大学の飯島康之先生の集中講義を拝聴する機会があって，コンピュータを利用した授業の教材を操作していていろいろなことを考えさせられたことも背景となっている。両先生のご配慮に，心から感謝申し上げる次第です。

数学基礎が一つの科目となるかなり以前からユークリッド原論を教材化したいと考えていたことがその可能性を考える直接的な一因となっている。「数学セミナー」1979年３月号で小平邦彦氏は次のように述べている。

「…。大脳生理学の知見のこのような短絡的解釈が正しいかどうか疑問がないわけではないが，正しいとすれば昔われわれが中学校で学んだユークリッド平面幾何は数学の初等教育のための最適な教材であることになる。平面幾何では図形を見ながら論証を進める。図形を見るのは右半球の働き，論証は左半球の働きであるから，平面幾何は左右の両半球を互いに関連させて同時に訓練することになる。殊に証明のための補助線を引くには図形全体のパターンを眺めて総合的に判断することが必要である。ゆえにそれは右半球のためのもっとも良い訓練である。アダマールがいうように発見が「無意識」すなわち右半球の働きであるとすれば，したがって平面幾何は創造力を養うためにも最適な教材であることになる。

近年ユークリッド平面幾何は数学の初等教育からほとんど追放されてしまったが，それによって失われたものは普通に考えられているよりもはるかに大きいのではないかと思う。」

また，「ユークリッド幾何から現代幾何へ」の著者小林昭七氏は，この著作の冒頭で次のように書いている。

「…。距離を測るとか，円のように自然な曲線の長さを求めるというのは日常生活にも結びついた自然な問題であるから，どの文明においても最初に考えられて不思議でない。ある量をどのようにして求めるか，そしてその量の値は何かといった how to, how largeということをまず考えるのが当然で，その証明，whyといったことにまで考えが及ぶというのは自然なこととは言えないであろう。ましてや公理をきちんとたてて，それから命題を次々と証明していくという数学をはじめたギリシャ文明は，偉大であると同時に不思議でもある。Euclid幾何の公理系を眺めてみると，どうしてあのように公理をえらんだのか実に不思議な気がする。」

この二人の数学者の言葉に代表されることを，数多くの数学及び数学教育に関わる人達が述べてきている。少しでもそのことを生徒達とともに体験することのできる授業の可能性について迫りたいという希望を持っていた。

授業計画と展開は大学との共同研究の中で詳述することを考えているので教材の骨子のみを後述するが，教材作成の観点は次のようなものである。

＊平面幾何が組み立てられた歴史の原点を追体験し，その感動を共有すること。

＊初歩的な論理と論証の手法を会得すること（命題の否定，背理法，同値など）。

＊発見にいたる試行錯誤の手法を考えること。発見を論証すること。

そのために，次のテーマに絞って具体的な教材の骨子を考えた。

ユークリッド原論の第一巻を題材にして次の三つを教材化する。

＊ユークリッドは，ある点を中心として任意の長さの半径をもつ円をどのようにして作図したか。

＊ユークリッドは，“二等辺三角形の両底角は等しい”という命題をどのようにして証明したか。

（この二つはともに，“ユークリッドのコンパス”に規定されたものであるが，それゆえのアイディアのすばらしさが共有できることを授業の一つの目標としたい。）

＊ユーグリッドは，いわゆる“平行線の公理”を，その存在（と一意性）の証明の中でどのように用いているか（公理の周辺を考える)。

三角形の五心と円の性質について，コンピュータ等を用いた授業のための教材を作成する。

＊識別できない重心，内心，外心，垂心のかき込まれた三角形を動かして識別のための方法を考える。（オイラー線の発見。重心，外心，垂心の線分比の関係の発見。）

＊円周角の定理，接弦定理を発見するための教具を作製し，この二つの定理の間の関係について考える。

＊円周角の定理，接弦定理，方べきの定理の一つの証明のための，またこれらの同値性について検討できるためのコンピュータ教材を作成する。

（もちろん五心の存在の証明，それらが関係する三角形の種々の計量を求める方法や円に関する諸定理とその同値性についての論証などの，これまでに使用してきた教材も再構成する。）

ユークリッドの「原論」は，点，直線，平面，円，各種多角形などの23個の定義に始まり，有名な五つの公準が述べられている。それは，原典の意味を損なわない表現をすれば次のようになる。

公準１．任意の点から任意の点へ直線を唯一つ引くことができる。

公準２．任意の直線は，どちらの側にも限りなく延長することができる。

公準３．任意の点を中心として任意の点を通る円を唯一つかくことができる。

（これは，任意の点を中心として任意の半径の円をかくことができるといっているのではない，半径は中心を端点とする線分として与えられていなければならないということである。）

公準４．すべての直角は互いに等しい。

公準５．二直線と交わる一つの直線よって同じ側につくられる内角の和が二直角より小さいとき，二直線をその側に延長すればどこかで交わる。

（以上からわかるように，ユークリッドの意味の直線とは“有限な”直線のことである。）

この五つの公準に続いて，幾何だけではなく数学一般に適用される公理が述べられている。公準と同様に，原典の意味を損なわない表現をすれば以下のようになる。

公理１．$a=b$，$a=c$ならば，$b=c$である。

公理２．$a=b$，$c=d$ならば，$a+c=b+d$である。

公理３．$a=b$，$c=d$ならば，$a-c=b-d$である。

公理４．互いに一致するものは相等しい（重ね合わすことのできるものは合同である）。

公理５．全体は部分より大きい。

これらのみを忠実に用いて，次のようなテーマで学習を試みる。

教材Ⅰ

（テーマ）ユークリッドは，任意の点を中心として任意の長さの半径の円をどのようにしてかくことができると考えたか。

（問）指示にしたがって，図(ｉ)においてこの円を作図しなさい。またそれぞれの段階でそのことが可能である根拠となる公準，公理を言いなさい。

＊線分 AB を作図しなさい。

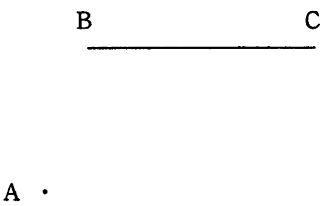
＊線分 AB を一辺とする正三角形 ABD を作図しなさい。

＊点 B を中心として点 C を通る円と，この円と線分 DB の B 側の延長との交点 G を作図しなさい。

＊点 D を中心として点 G を通る円と，この円と線分 DA の A 側への延長との交点 H を作図しなさい。

＊点 A を中心として半径 BC の円がかける理由を公準と公理を用いて説明しなさい。

図(ｉ)



教材Ⅱ

（テーマ）ユークリッドは，「AB＝AC の二等辺三角形 ABC の底角は等しい（∠B＝∠C)」ことをどのようにして証明したか。

（問）以下の問に答えなさい，

＊命題「二等辺三角形の底角は等しい」を証明しなさい。(中学校の既習事項)

＊この命題を次のように証明した。直角三角形の合同条件はどのようにして導かれたかを考えて，次の証明について批評しなさい。

「頂点 A から辺 BC に垂直な直線を引いて，辺 BC との交点を H とする。直角三角形において斜辺と他の一辺がそれぞれ等しいから，⊿ABH≡⊿ACH　∴ ∠ABC＝∠ACB」

＊ユークリッドの証明は次のようなものである。それぞれの段階でそのことを可能にする根拠となる公準，公理を言いなさい。

「線分 AB を B 側に延長して，その上に任意に点 D をとる。

A を中心として D を通る円と，線分 AC の C 側への延長との交点を E とする。

AB＝AC，AE＝AD，∠DAE は共通だから，⊿ABE と⊿ACD は重ね合わすことができる。

（原論では，この三つを重ね合わすことができれば，三角形の残りの辺と角はすべて重なることを，ここにいたるまでに，二つの線分は面積を囲まないことを根拠にして“証明”している。)

このとき，CD＝BE，BD＝AD－AB＝AE－AC＝CE，∠BDC＝∠CEB であるから，⊿BDC と⊿CEB は重ね合わすことができる。

ゆえに，∠ABC＝∠ABE－∠CBE＝∠ACD－∠BCD＝∠ACB である。」

＊中学校で学んだ証明とこの証明を比較して，ユークリッドはなぜこのような手法をとったのかについて考えなさい。

（ユークリッドが彼の“コンパス”に，現在のような役割を与えなかったのは何故なのだろうか。その役割を与えて原論を展開することは考えられなかったのであろうか。与えなかったからこそ“原論”があるとも言える。自然であることは頷けるが，少しばかりの疑問が残る。)

教材Ⅲ

（テーマ）原論第一巻の最初に始まる23個の定義の最後に“平行線とは，同一の平面上にあって，両方向に限りなく延長しても交わらない直線である。”とある。

（この定義を忠実に守るとき）どのようにして，任

意の点を通り任意の直線に平行な直線が存在することと唯一つしかないことが論証できるのだろうか。

（問）任意の点をP，Pがその上にない直線をLとして，ユークリッドの手法をたどることにする。以下の問に答えなさい。

《存在すること》

＊L上に二点Q，Rをとり，PからQに直線を引く。このとき，∠PQR＝∠QPSとなるように直線PQに関してRと反対側に点Sを作図しなさい。また，この点Sを作図できる根拠をユークリッドの立場に立って考えなさい。

＊直線PSが求める直線であることを示すためには，“錯角が等しければ二直線は平行である”ことを示せばよい。この命題を否定して“錯角が等しく，平行でない二直線がある”とすると，どのような矛盾が生ずるか考えなさい。（初歩的な論理の知識が前提である。）

《唯一つしかないこと》

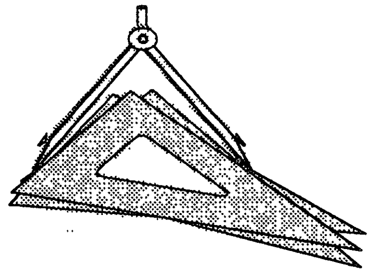
＊命題を否定して，平行なものが二つあったとする。これをm_1，m_2として，三直線に交わる直線nを引くとき，L // m_1より錯角は等しい，同様にL // m_2より錯角は等しい。命題を否定して，これらのことを証明しようとすれば公準5が必要である，その理由を考えなさい。またm_1とm_2が一致する理由についても考えなさい。

（平行線が唯一つしかないことと平行線の公準とは同値な命題である。したがって，原論では唯一つしかないという命題をストレートに表現した形の命題はどこにもみられない。このことや，この公準が原論第一巻において果たしている役割が，長い長い公準の証明の試みの歴史と不可分ではないような気がする。）

教材Ⅳ

旧課程東京書籍中学3年生の教科書に下図(ⅱ)のような写真を見かけた。これをヒントにして円周角の定理と接弦定理を発見するための教具を作る。

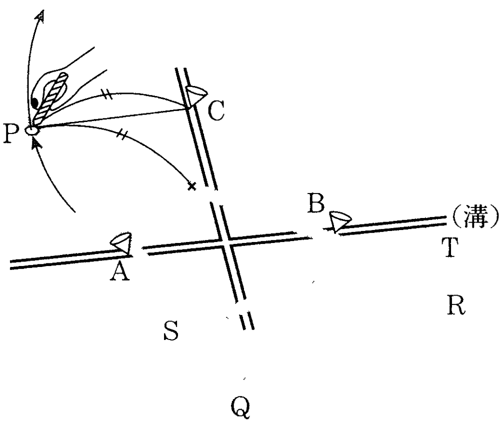
図(ⅱ)



東京書籍教科書
『新しい数学3』より

（ホワイト）ボードにマークされた二定点A，Bにピンを打ち，ピンの幅は自由に変えれるようにしておく。（透明な樹脂製の）細長い棒を用意して，その上に半直線PQ，PRをマークし，点Pを重ね合わせてそこにマーカーが通るような穴を作る。線分PQ，PR上に，それぞれ点S，TをST＝AB，∠PSTが直角となるようにとり固定する（∠QPR（鋭角）の大きさは自由に変えれるようにしておく）。こうしてPQ，PRがそれぞれ常に点A，Bに接しているようにこれを動かす。（図(ⅲ)）

図(ⅲ)



＊点Pのえがく図形は何になるだろうか。

（検証のために線分ABの垂直二等分線上の，ACの長さがPTの長さの半分になる点Cにピンを打っ

て，ACに等しい長さの紐でCとPとを結んで同様にしてPを動かしてみる。）

＊点Pが最初に点Aにあるとして，この扇形QPRを動かすとき，PA，PBの長さが最も長くなるのは，点Pがそれぞれどのような位置にあるときか。またそのときの，∠PAB，∠PBAはそれぞれ何度であると予想されるか。

（ここでもCとPとを結んだ紐をつけて考えてみる。合わせて，このときの∠APBと∠ACBとの関係についても考える。）

＊Pが最初に点Aにあるとき，PQはこのPの描く図形に対してどのような位置にあるだろうか。

＊以上の予想した結果を論証しなさい。

教材Ⅴ

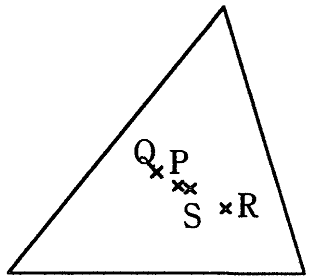
昨秋，奈良女子大学附属中等教育学校の公開研究会で中学二年生の授業を参観した。授業は“四角形のコマはどこに心棒を通せばよいか”が主題で，自分で立てた仮説をコンピュータ教材を利用して検証するというものであった。三角形の場合は重心に通せばよいということは既習で，四角形を三角形に近づけていくと心棒の位置は三角形の重心に近づいていくか，というのが検証の方法の一つであった。

そしてこの八月，教育学部数学教室の集中講義で，愛知教育大学，飯島康之先生が作成された教員支援のための作図ツールコンソーシアムのいくつかを拝見する機会があった。“動画”を目にしていると，目標に向かってどのような試行錯誤を行なうべきかを考える。不変な性質にも気づく。筆者の浅学ゆえに，これまで関係を持って考えたことのなかった二つの性質が結びついたりする。紙と鉛筆だけの世界では獲得が困難な別の能力が鍛えられているような実感をもった。

その一例を紹介することにする。

それは，重心，外心，垂心，内心のかきこまれた三角形があって，“頂点を動かしながら図中の点P，Q，R，Sのどれがどれかを推定しなさい”というものであった。（図(iv)）

図(iv)



＊識別のためには，どんなことを考えたらよいか。

（特殊な三角形を考える。三角形の一つの頂点に注目してそれを直線的に動かす，この場合にどんな方向に動かしたらよいかなど。）

＊P，Q，R，Sがどこにあっても不変な性質はないか。

（オイラー線の存在。試行錯誤の中で重心，外心，垂心の三点を結ぶ線分の線分比を知る手がかりはないか。）

といったことをテーマにして授業を試みることができる気がしてとても新鮮に感じた。

そこでこの手法を手本にして，円周角の定理，接弦定理，方べきの定理の同値性を中心にした学習が可能なコンピュータ教材ができるのではないかと考えた。

定円Oと円外の定点Pを通る二直線L_1，L_2があって，L_1は点Qで円Oに接し，L_2は円Oの割線で点R，Sで交わっている。（図(v)）

＊　直線L_2を，円Oに接する状態から始めて，円に交わらせながら限りなくL_1に近づけていく。線分RSがこの円の直径に一致するとき，∠RQSは何度であると予想できますか。（図(vi)）（証明は二等辺三角形の性質による。）

＊　（上の予想を認めることにする）

線分RSがこの円の直径であるとする。この性

質を保ちながら点Pが直線L_2上を動いても変わらない性質は何かを考えなさい。(図(vi))

線分QSがこの円の直径であるとする。この性質を保ちながら点Pが直線L_1上を動いても変わらない性質は何かを等しい角に注図して考えなさい。(図(vii))

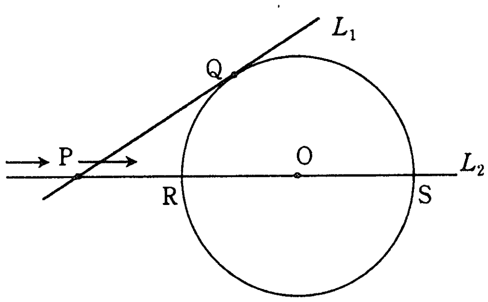
(いずれの場合においても，∠QSRと∠QORの関係を考えなさい。)

*　図(vii)において，この図を残して，点Rを固定して点Pを直線L_1に沿って点Qの方へ動かす。このときの点P，Sの位置をそれぞれP'，S'とする。各点を結んだ図において相似な三角形を見ぬいて，互いに等しい角をさがしなさい。(図(viii))

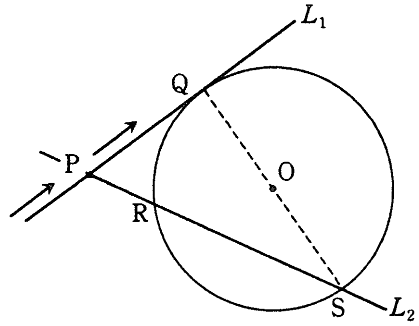
次に，点Rを固定して点Pを直線L_1に沿って点Qから遠ざかる方向に動かす。このときのSの位置をS'，点Rの直線QSに関する対称点をR'として，各点を結んだ図において相似な三角形を見ぬいて，互いに等しい角をさがしなさい。(図(ix))

*　最初の状態の図(v)にもどって，直線L_2を動かして，PR・PSの値が定数になる理由を考えなさい。

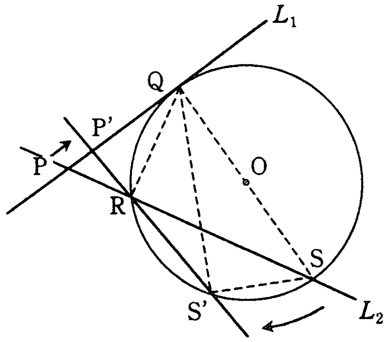
図(vi)



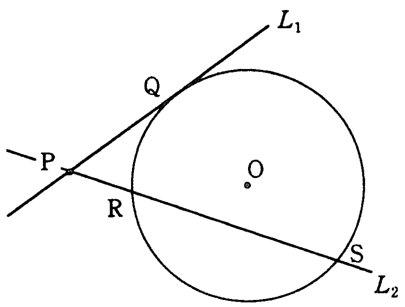
図(vii)



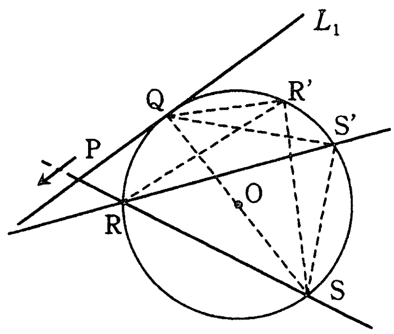
図(viii)



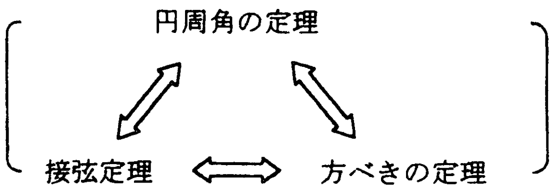
図(v)



図(ix)



以上の流れは，通常のオーソドックスな展開とはなっていない。したがって，その教育効果自体に不安を感じないわけではないが，“円の接線が接点と中心を結ぶ直線と垂直であること”と“半径の上に立つ円周角は直角”であることを利用して“円周角の定理”および“接弦定理”がほぼ同時に証明できることになる。しかも“方べきの定理”も含めて，これらの三つの定理に関する以下の図式の証明は



どこからスタートしてもどちらの方向からでもサイクリックに証明できるということになる。このテーマについて授業プリントを作成したいと考えているが，後の機会に紹介したいと思う。

(2) 数と式

まず中学校で習う数学と高等学校で習う数学の違いは文字の多さであろう。数学において，文字式はコミュニケーションと思考の非常に大切で不可欠な手段であって，文字式は数学の言語とみなすことができる。ひとことで言語と言ってもまずは未知数を文字に置くことから始まり，一般的な数や関数においては，変数，定数（パラメータ）を文字に置くところまで拡張され，指導のためには代数的記号系の基本の考え方や人為的な規則を明らかにして，長期間にわたる指導の鍵となる点，すなわち接続性の問題をきちんと考える必要性があると思う。

筑波大学名誉教授 三輪辰郎先生は，「生徒が数学のコミュニケーションと思考の手段としての文字式の使用ができるような堅固な基礎を確実に作り上げることが決定的に重要である」といっておられます。しかし現在の中学校，高等学校における文字式の指導は数学のコミュニケーションと思考の手段としての文字式の使用ができるような堅固な基礎を確実に作り上げているのか？というと残念ながら自信を持って Yes とはいえないのが現状である。

文字式の指導において，今まであまりにも計算や方程式を解くことに時間をかけてきたように思う。当然このことも不可欠なことではあるが数学的思考の手段としての文字式の使用においてはほんの一部分である。

生徒に文字式の使用がどんな過程を経て何を達成しようとするかを明らかにし，次に過程の位置付けと含まれる内容を明らかにしていくことが必要であると思う。

次に挙げるのはそのことを考えに入れたほんの一例である。

教材 I

【設問】 9876543×9876545 と 9876544^2 とはどちらがどれだけ大きいか？

【考え方】 このような大きな数のかけ算は電卓を使ってもすぐには求められない。今

$$a = 9876544$$

とおいてみると

$$9876543 \times 9876545 = (a-1)(a+1)$$

である。展開公式より，$(a-1)(a+1) = a^2 - 1$ であるから，9876544^2 のほうが 9876543×9876545 より１だけ大きいことがわかる。

これ以外にも

- 連続する２整数の和は奇数である。
- 連続する奇数個の整数の和はその奇数の倍数である。

のような数学的事象において何らかのパターンを発見する，それを表現する，そのパターンが一般的に成り立つかどうかを調べるという。本来文字式が優

れている点を意識させる教材で指導を行うことが非常に大事なことであると思う。

教材Ⅱ

新学習指導要領では，２次方程式は，因数分解による解法だけを扱い，解の公式は高校へと先送りされた。また，円に関する性質の一部も高校の平面図形に組み込まれることとなった。そのことを考慮して，作図による２次方程式の解法を，２次方程式の解法や平面図形への導入や発展教材として，また選択数学の教材として取り入れることが考えられる。どのような目的で使用するかによって，設問がいろいろと考えられるが，代数と幾何を結ぶ教材として興味深いものになるだろう。

設問

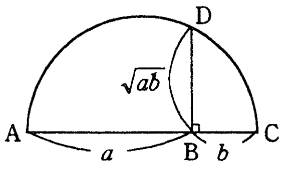
２次方程式 $x^2+x-3=0$，$x^2-x+3=0$ の正の解を作図によって求めてみよう。

（ｉ） 長さ a が与えられたとき，$\dfrac{a}{3}$ を作図しなさい。

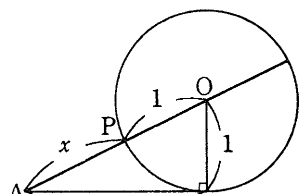
（ii） 長さ１，a，b が与えられたとき，$ax=b$ の解 $x=\dfrac{b}{a}$ を作図しなさい。

（iii） 長さ a, b が与えられたとき，$\sqrt{ab}$ は次のようにして得られることを証明しなさい。

AB$=a$，BC$=b$ のとき，A，B，C が１直線上に並ぶようにとるとき，AC を直径とする半円と，B を通り AC に垂直な直線との交点を D とすると，BD$=\sqrt{ab}$ である。



（iv） 右図のように，AB＝２で，円Ｏは点Ｂで AB に接する半径１の円である。直線 AO と円Ｏの交点をＰとするとき，AP の長さ x は，どのような２次方程式の解であるか。



（ｖ） （iv）の作図方法を利用して，２次方程式 $x^2+x-3=0$ の正の解を作図しなさい。ただし，長さ１の線分は与えられているものとする。
また，長さ１を適当にとって，$x^2+x-3=0$ の正の解の近似値を定規を使って図ることによって求めなさい。

（vi） （iii）の作図を応用して，２次方程式 $x^2-x-3=0$ の正の解を作図する方法を考えなさい。

具体例から一般化するときに，ここでは(4)を利用して(5)を解くとき，OB$=a$，AB$=b$ とすることで公式化できる。この問題を通じて，教材のおもしろさだけでなく，文字の良さを再認識することができるであろう。

(3) 数量関係

「片方が２倍・３倍になると，もう片方は２倍・３倍（$\dfrac{1}{2}$倍，$\dfrac{1}{3}$倍）になる」…(※)

小学校では，比例・反比例の学習の際，表やグラフを使うことが多いが，中学校になると，関係式 $y=ax$，$xy=a$ とグラフが中心になる。教育学部の大谷実教授は，「同じ対象(※)に取り組む際，表から文字式の関係式に道具が変わることが，生徒にとって大きな壁になっているのではないか」と，小中の接続の問題を指摘された。表を使わなくても，１つの式だけで２数の関係を述べられる事こそが，関係式 $y=ax$，$xy=a$ 等を使う利点なのだが，ありがたみより戸惑いを感じる生徒が多いことも，事実である。

これまで，このギャップを埋める，様々な教材や指導法が試みられてきた。例えば，$y=ax$ のグラフを用いて相似な直角三角形を作ったり，$xy=a$ のグラフを用いて面積の等しい長方形群を作ることで，(※)の性質を目で見て理解する，というものである。

今回は，$y=ax$ のグラフはすべて相似であること

を，「xが2倍・3倍になるとyは2^2倍，3^2倍になる」という性質を用いて目で見て理解する教材を用意した。放物線の幾何的な性質は本来なら数学Cの範囲であるが，のグラフは本質的に1つの形しかもたない，それを放物線というんだ，ということは，厳密な議論は抜きにしてもすべての生徒に伝えておきたいことだろう。

尚，高校で扱う指数関数や対数関数のグラフもすべて相似であるが，中高の接続という観点からは外れるので，今回の教材には用いていない。

教材

放物線の相似性

目標：放物線$y=ax^2$（$a\neq0$）のグラフはすべて相似である事に気付かせる。

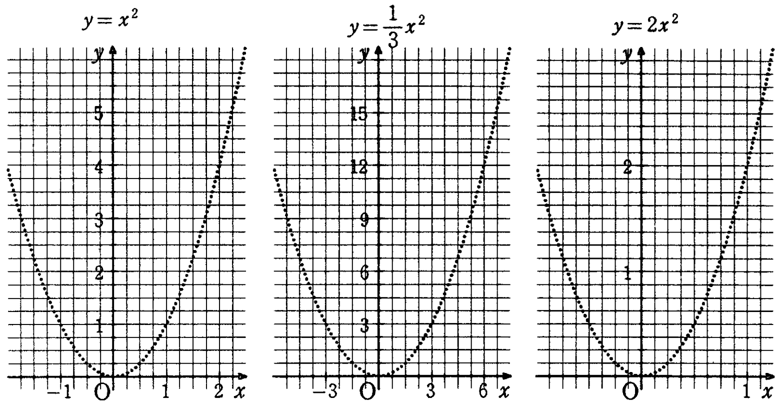
対象：①中学校選択数学時，②高等学校数学Ｉ「2次関数」導入時，③数学Ｂ「ベクトル」終了時　が考えられる。

①②の場合は拡大・縮小という言葉の代わりにが2倍，3倍になればyが4倍，9倍になるという2次関数の性質を用いる。

③の場合は座標平面上の点の対応から「拡大・縮小した後の図形の方程式はどうなるか」というところまで含めて身に着けさせたい。

教材

設問1　次の方眼紙にグラフを描き，気付いた事を述べなさい。

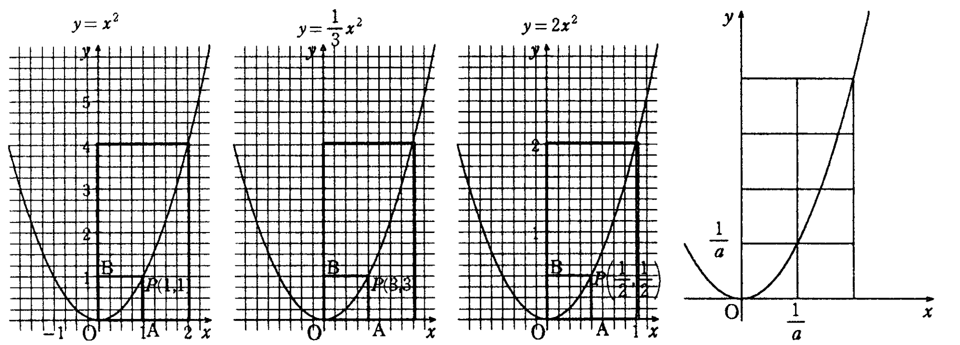


設問2　設問1のそれぞれのグラフにおいて，第1象限にあるグラフ上の点Pからx軸におろした垂線の足をA，y軸におろした垂線の足をBとすると，四角形OAPBは長方形となる。

（1）これが正方形となるような点Pの座標をそれぞれ求めなさい。

（2）OA：OB＝2：4となるとき，四角形OAPBを描き入れなさい。

（3）$y=ax^2$（$a\neq0$）のグラフにおいて，上と同様の事を考えなさい。



指導上の留意点

- どんな$y=ax^2(a\neq 0)$のグラフにも「正方形になる点$P\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{a}\right)$」があることをおさえる。
- xが2倍，3倍になればyが4倍，9倍になるという2次関数の性質を目で確認する。
- 以上2つのことから「どんな$y=ax^2(a\neq 0)$のグラフにも$y=x^2$のグラフと同じ形をしている」ことを理解させる。
- ③の場合は$\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{a}\right)\rightarrow(1,\ 1)$となるように拡大•縮小する事を考えさせる。

$y=ax^2$上の点$P(x, y)$とし，$OP'=aOP$となるように点$P(X, Y)$を定めると， $\begin{cases} X=ax \\ Y=ay \end{cases}$，$ay=a^2x^2$より$Y=X^2$，すなわち図形全体を$a$倍すると$y=ax^2$のグラフと重なる。

4．おわりに

学ぶ力，生きる力の育成を目指した新学習指導要領において，学力低下の問題が取り沙汰され，文部科学省も学習指導要領がこれまでの標準という考えから下限であるという姿勢に変わった。このような状況の中で，小中高の接続を考えた新教育課程の教材の開発に取り組んできた。

児童，生徒の論理的思考力の育成には，図形教材はたいへん有効である。図を描き，補助線を引き，試行錯誤して解法を導き出す，筋道を立てて証明を行う，条件を満たす軌跡の必要性と十分性について検討する，などの学習活動を通して訓練されるのである。随分以前の教育課程で扱われていた作図には『証明』と『吟味』が求められていた。このことは，幾何教材を通して必要条件と十分条件について学習する絶好の機会となっていた。現行の教育課程において，必要条件と十分条件について指導できる場面が少ないように思われる。この研究の1つの教材として扱ってきたユークリッド原論の教材化は，この面における十分な指導も可能であると思われる。図形の教材における必要十分条件の重要性について具体的に触れてみよう。

問題「実数mがいろいろと変化するとき，2直線$x+my=2$，$mx-y=0$の交点の軌跡を求めなさい」に対して，次のような生徒の答案をよく見る。

（答案）$m\neq 0$のとき，直線$x+my=2$は，点（2，0）を通り傾き$-\frac{1}{m}$の直線であり，直線$mx-y=0$は原点Oを通り傾きmの直線である。

よって，この2直線は常に直交するので，2直線の交点は，2点（2，0）（0，0）を直径の両端とする円$(x-1)^2+y^2=1$の周上を動く。

$m=0$のとき，2直線は$x=2$，$y=0$を表し，その交点は点（2，0）であって，この円周上にある。

ゆえに，2直線の交点の軌跡は，円$(x-1)^2+y^2=1$である。　（解答終）

この答案をどう評価するか。教師が生徒に対して何を要求しているかが，その評価となるのである。2直線が直交するということに気づいたのだから大したものである，十分条件について述べられていないから不十分である，などその評価にはいろいろな段階がある。現行の数学Aの平面幾何における軌跡の領域で，多くの教科書がアポロニウスの円を扱っている。2定点A，Bに対して，AP：PB＝m：n $(m\fallingdotseq n)$である点Pの軌跡については，①Pは線分ABをm：nに内分する点と外分する点を直径の両端とする円周上にあること，②線分ABをm：nに内分する点と外分する点を直径の両端とする円周上の点Pは条件AP：PB＝m：nを満たすこと，の必要十分性を示すべきであるが，教科書によって，両方をきちんと扱っているもの，②については触れる

程度にとどめているものなどその扱い方はさまざまである。高校における図形問題において，初等幾何と解析幾何の両面で考えることは重要なことであるが，そのために必要十分性についての理解が不十分になりがちである。この研究では，教材の骨子を示すのみとなったが，その取り扱い方も重要である。これまでは中学校では初等幾何が，高校では解析幾何が中心となっていたが，新教育課程では数学Aで平面図形が選択必修となったこともあり，論理性を重視するという面で幾何教材の扱い方がますます重要になってくる。

文字式については，中学1年から本格的に取り扱っていて，現行の教育課程では，1次式の加減，1元1次方程式について中学1年で学習し，中学2年で1元1次不等式，連立不等式を，中学3年で多項式の展開と因数分解，2次方程式について学習する。これを受けて，高校では，整式の加減乗除，展開や因数分解，等式・不等式の証明，高次方程式などを学習する。中学校での文字の取り扱い方と高校でのそれとは随分と異なっているように思うが，その隙間がなかなか埋められない。例えば，値による場合分けがそうである。次のような，2次関数の問題を例にとって考えてみよう。

① 関数 $y=x^2-2x(a \leqq x \leqq a+1)$ の最小値を求めなさい。

② 関数 $y=x^2-2ax(0 \leqq x \leqq 1)$ の最小値を求めなさい。

高校1年生にとっては，難しい問題であるが，2次関数を学習したときに，参考書や問題集に必ず出てくる問題である。文字が数値の代表であるという考えは，中学校では関数で学習しているとは言えるが，この場合の文字は変数 x であって，定数 a ではない。また，②の問題では，関数のグラフを，$\{(x,\ y) \mid y=x^2-2ax\}$ のように x の変化に伴って y が変化するものという基本的なとらえ方から，$\{C=\{(x,\ y) \mid y=x^2-2ax\} \mid a$ は実数$\}$ のように，曲線群というとらえ方が要求されている。このような問題を指導する場合に，中学校まで関数についてどのような指導が行われてきたかということを，余り意識せず，生徒にわかりやすく，理解できるようにということを中心に考えて，指導に当たってることが多いように思う。

大学と附属学校との共同研究の学習会の場で関数のことが話題になり，中学校の教師が比例の取り扱い方について話をしたとき，それを聞いた小学校の教師は「それだったら，きっと生徒は躓くだろう」ということを言われた。このように，小学校，中学校，高校の各学校段階における指導のあり方，説明の仕方などに随分と開きがあり，それが児童，生徒に戸惑いを与え，理解を困難にしていることも少なくないと思う。

小学校での教材は，数と計算を中心として構成され，中学校では，図形や数量関係の内容が増え，高校は，微積分を最終目標として数量関係（関数）を中心に構成されている。各段階での教材構成，学習目標が随分異なっている点が，各学校種で指導法が異ならざるを得ない理由であろう。学習者の発達状況が随分と異なるという点も，当然含まれている。

この研究では，教材をテーマに中高の接続を図ってみたが，指導のあり方をテーマに中高の接続を図ることも大切である。中高一貫教育が推進されて，中学校と高校の教員が連携を図りながら指導に当たるケースも増えてきてはいるが，それでも中学校と高校の教員が教材や指導法について議論する機会は随分と少ない。小中高の接続を考慮した教材開発や指導法についての研究は，小学校，中学校，高校の連携が図りやすい附属学校における課題であり，今後も続けていきたい。

参考文献

コークリッド原論

中村幸四郎　他訳　共立出版

ユークリッド幾何から現代幾何へ

小林昭七著　日本評論社

愛知教育大学　飯島康之先生のホームページ

文字式の指導に関する重要な諸問題

(ICME 9 特別講演，日本語テキスト)

筑波大学名誉教授　三輪辰郎著

小学校学習指導要領解説　算数編

平成11年５月　文部省

中学校学習指導要領解説　数学編

平成11年９月　文部省

高等学校学習指導要領解説　数学編理数編

平成11年12月　文部省