高校生と学ぶ Galois 理論のために

―― 3次方程式・4次方程式の判別式 ――

数学科　岡　山　正　歩

はじめに

毎年1年生の夏頃から2年生の秋頃まで，学年の教科担当者が希望者を募って数学の入門書の輪読会を開いている。筆者が過去に生徒たちと読んだものをあげれば，

* ブルバキ　数学原論　集合論1　（東京図書）
* 群論　（浅野啓三・永尾汎著　岩波全書）
* ガロアの理論　（矢ヶ部巌著　現代数学社）

などがある。このノートは，新課程のカリキュラムで数学Bにおいて複素数が導入されたこともあって，その実施初年度に生徒たちとともに考えたことを契機として，そのことを思い浮かべながら書いたものである。

複素数のアイディアは，もともと3次方程式の実数解を求めるために，便宜的に（？）考えられたものである ―― という話をよく聞く。前半では，そのことを確認したいということもあって，それぞれの解法にしたがって，3次・4次方程式の解と判別式の検討を2，3の観点から試みた。後半では，Galoisの理論入門の扉を開くために，これらの方程式に解の公式が存在するある程度納得のいく理由を高校生にも実感として想像できる程度に書いてみたいという希望が以前からあって，判別式をある種の形に変形することを通してそのことを書いたつもりである。筆者の力不足のために，不十分な点が多々あることと思うが一読いただいてお教えいただけたら幸いである。

(Ⅰ)　3次方程式・4次方程式の解法と判別式

いくつかの解法があり，それらについては，例えば「数学が育っていく物語 第5週 方程式」(志賀浩二著　岩波書店)に紹介されているが，以下に続いていくものとの関係で次の二つについてのみ言及することにする。

(1)　3次方程式　――カルダーノの解法と判別式

3次方程式　$X^3+pX^2+qX+r=0$　は，　$X=x-\frac{1}{3}p$ とおくことによって，

$x^3+ax+b=0$ ―― ①　　の形になる。

ここで，$x=u+v$　とおくと，方程式は，　$u^3+v^3+(3uv+a)(u+v)+b=0$

となる。

したがって，　$u^3+v^3=-b$,　$uv=-\frac{1}{3}a$　をみたすようにu，vを選べば

$x=u+v$　は解となる。

$u^3v^3=-\left(\frac{a}{3}\right)^3$ であるから，u^3, v^3 は2次方程式　$t^2+bt-\left(\frac{a}{3}\right)^3=0$ ―― ②

の解である。この2解を α，β とするとき，$u^3=\alpha$，$v^3=\beta$　の解u，vで　$uv=-\frac{1}{3}a$

をみたすものは3組あり，この3組が方程式の解を構成する。

方程式①の解を　x_1, x_2, x_3 とする。解と係数の関係を用いると方程式②の判別式は，($x_1+x_2+x_3=0$　であることから)

$$(\alpha-\beta)^2=(u^3-v^3)^2=(u^3+v^3)^2-4(uv)^3$$
$$=(x_1x_2x_3)^2+\frac{4}{27}(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1)^3$$
$$=\{x_1x_2(x_1+x_2)\}^2+\frac{4}{27}\{x_1x_2-(x_1+x_2)^2\}^3$$
$$=\{x_1x_2(x_1-x_2)+2x_1x_2^2\}^2-\frac{4}{27}\{(x_1-x_2)^2+3x_1x_2\}^3$$
$$=\frac{-1}{27}(x_1-x_2)^2\{2(x_1-x_2)^2+9x_1x_2\}^2$$
$$=\frac{-1}{27}(x_1-x_2)^2(x_2-x_3)^2(x_3-x_1)^2$$

したがって，　$(x_1-x_2)^2(x_2-x_3)^2(x_3-x_1)^2=-27(u^3-v^3)^2$

となる。

これが3次方程式の判別式であるが，右辺の $(u^3-v^3)^2=\Delta_2$，左辺$=\Delta_3$ とおいて，この符号によって解のタイプを判別する。

複素数 α，β の偏角をそれぞれ θ_1，θ_2 とすると，方程式の解を与える u，v の偏角は，それぞれ　$\frac{\theta_1}{3}$，　$\frac{\theta_1}{3}\pm\frac{2\pi}{3}$；$\frac{\theta_2}{3}$，　$\frac{\theta_2}{3}\pm\frac{2\pi}{3}$　であるから，これらを和が π の整数倍となるように u，v を組み合わせたものが解を与える。したがって，次が成り立つ。

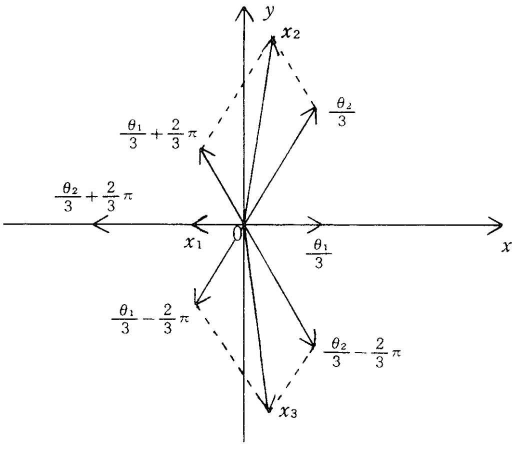
(ア) $\Delta_3<0(\Delta_2>0)$ $\Longleftrightarrow$ $\alpha\neq\beta$ かつ θ_1，θ_2 は 0，π のいずれか
$\Longleftrightarrow$ x_1，x_2，x_3 は1実数解と共役な2虚数解

(イ) $\Delta_3=0(\Delta_2=0)$ $\Longleftrightarrow$ $\alpha=\beta$ かつ $\theta_1=\theta_2=(0,\ \pi$ のいずれか)
$\Longleftrightarrow$ x_1，x_2，x_3 は3重解($=0$)または1実数解と2重解(異符号)

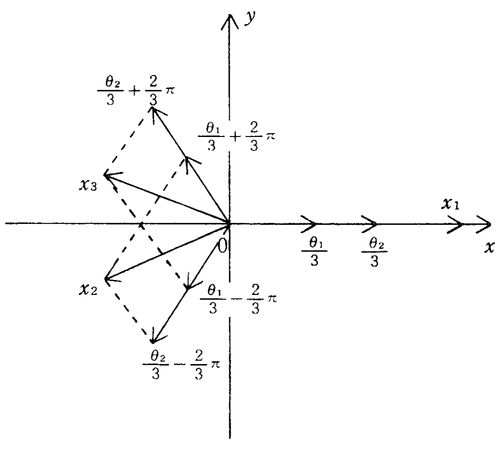
(ウ) $\Delta_3>0(\Delta_2<0)$ $\Longleftrightarrow$ $|\alpha|=|\beta|\neq0$ かつ $\theta_2=-\theta_1\neq0,\ \pi$
$\Longleftrightarrow$ x_1，x_2，x_3 は異なる3実数解

(図を用いた解説)

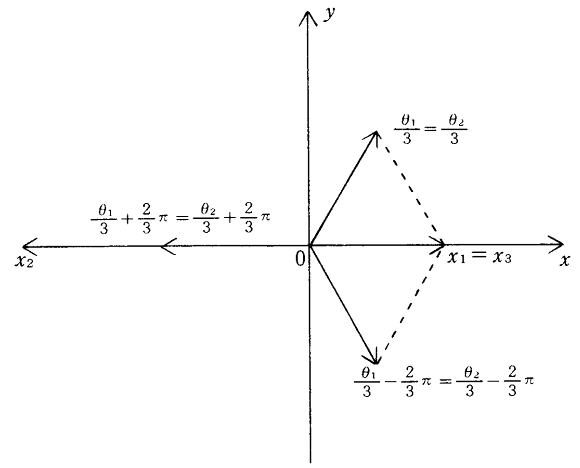
(ア)　$\theta_1=0$，$\theta_2=0$



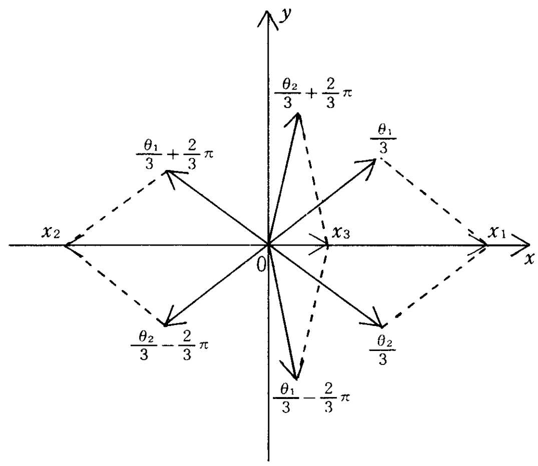
$\theta_1=0$，$\theta_2=\pi$



(イ)　$\theta_1=\pi$, $\theta_2=\pi$



(ウ)



したがって，この方法で一般の実数解をもつ３次方程式を解こうとすれば，複素数を経由しないと解は求められないことがわかる。

(ア)(イ)(ウ) の具体例をあげてみる。

その際，方程式①が０でない実数解 $x=\lambda$ をもてば，方程式 $x^3+\frac{a}{\lambda^2}x+\frac{b}{\lambda^3}=0$ は $x=1$ を解にもつから，$x=1$ を解にもつ例について考える。(以下において，ω は $x^3=1$ の虚数解である。)

(ア)の例　$x^3+6x-7=0$

$u^3+v^3=7$, $uv=-2$ より　$(u, v)=(2, -1)$, $(2\omega, -\omega^2)$, $(2\omega^2, -\omega)$

とすると　$x=2-1(=1)$, $2\omega-\omega^2$, $2\omega^2-\omega$

(イ)の例　$x^3-\frac{3}{4}x-\frac{1}{4}=0$（これは $x=1$ が重解ではない例 —— 一意に定まる）

$u^3+v^3=\frac{1}{4}$, $uv=\frac{1}{4}$　より　$(u, v)=\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{1}{2}\omega, \frac{1}{2}\omega^2\right)$, $\left(\frac{1}{2}\omega^2, \frac{1}{2}\omega\right)$

したがって，　$x=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(=1)$, $\frac{1}{2}\omega+\frac{1}{2}\omega^2\left(=-\frac{1}{2}\right.$　重解$\left.\right)$

（注）　$x=1$ を重解とする方程式は $x=-\frac{1}{2}X$ に置き換えたもの $(X=-2u-2v)$ である。

(ウ)の例　$x^3-\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}=0$

$u^3+v^3=-\frac{1}{2}$, $uv=\frac{1}{2}$　より　$(u^3, v^3)=\left(-\frac{1}{4}(1+i), -\frac{1}{4}(1-i)\right)$とすると，

$(u, v)=\left(\frac{1}{2}(1-i), \frac{1}{2}(1+i)\right)$, $\left(\frac{1}{2}(1-i)\omega, \frac{1}{2}(1+i)\omega^2\right)$, $\left(\frac{1}{2}(1-i)\omega^2, \frac{1}{2}(1+i)\omega\right)$

したがって，　$x=1$, $\frac{1}{2}(\omega+\omega^2)\pm\frac{1}{2}(\omega-\omega^2)\left(=\frac{-1\pm\sqrt{3}}{2}\right)$　となる。

（２） ４次方程式 ―― オイラーの解法と判別式

３次方程式の場合と同様に，$x^4+ax^2+bx+c=0$ ―― ③　が解ければよい。

$x=u+v+w$ とおくと，

$$x^4=\{(u^2+v^2+w^2)+2(uv+vw+wu)\}^2$$
$$=(u^2+v^2+w^2)^2+4(u^2+v^2+w^2)(uv+vw+wu)$$
$$+4(u^2v^2+v^2w^2+w^2u^2)+8uvw(u+v+w)$$

であるから，方程式は

$$(u^2+v^2+w^2)^2+2\{2(u^2+v^2+w^2)+a\}(uv+vw+wu)$$
$$+4(u^2v^2+v^2w^2+w^2u^2)+a(u^2+v^2+w^2)+(8uvw+b)(u+v+w)+c=0$$

となる。したがって，

$$2(u^2+v^2+w^2)+a=0,\quad 8uvw+b=0$$

とすると，方程式は　$4(u^2v^2+v^2w^2+w^2u^2)=-c+\dfrac{a^2}{4}$

となる。したがって，

$$u^2+v^2+w^2=-\frac{a}{2},\quad u^2v^2+v^2w^2+w^2u^2=\frac{a^2}{16}-\frac{c}{4},\quad uvw=-\frac{b}{8} \quad ―― ④$$

をみたす u，v，w を求めると，$x=u+v+w$ は方程式③の解を与える。

u^2，v^2，w^2 は，方程式

$$s^3+\frac{a}{2}s^2+\left(\frac{a^2}{16}-\frac{c}{4}\right)s-\frac{b^2}{64}=0 \quad ―― ⑤$$

を解いて求めればよいが，$4s=y$ とおいて

$$y^3+2ay^2+(a^2-4c)y-b^2=0 \quad ―― ⑥$$

を解く。この方程式の解を y_1，y_2，y_3 として

$$u^2=\frac{y_1}{4},\quad v^2=\frac{y_2}{4},\quad w^2=\frac{y_3}{4},\qquad uvw=-\frac{b}{8}$$

をみたすように u，v，w を定めればよい。

ところで，方程式⑥は $y+\dfrac{2}{3}a=t$ とおくと，

$$t^3-\left(\frac{1}{3}a^2+4c\right)t-\frac{2}{27}a^3+\frac{8}{3}ac-b^2=0 \quad ―― ⑦$$

となる。この方程式の解を t_1，t_2，t_3 として，これらを求めるための ξ^3，η^3 を解とする２次方程式の判別式は (1) の場合と同様にして

$$(\xi^3-\eta^3)^2=\frac{-1}{27}(t_1-t_2)^2(t_2-t_3)^2(t_3-t_1)^2$$
$$=\frac{-1}{27}(y_1-y_2)^2(y_2-y_3)^2(y_3-y_1)^2$$
$$=\frac{-1}{27}4^6(u^2-v^2)^2(v^2-w^2)^2(w^2-u^2)^2$$

となる。ここで，

$$u^2+v^2+w^2=A,\quad u^2v^2+v^2w^2+w^2u^2=B,\quad u^2v^2w^2=C$$

とおくと，

$$(u^2-v^2)^2(v^2-w^2)^2(w^2-u^2)^2=A^2B^2+18ABC-4A^3C-4B^3-27C^2$$

であることがわかる。

一方，方程式③の解を x_1，x_2，x_3，x_4 とすると，解と係数の関係と④から

$$\left.\begin{array}{l} x_1+x_2+x_3+x_4=0 \\ x_1x_2+x_1x_3+x_1x_4+x_2x_3+x_2x_4+x_3x_4=a=-2(u^2+v^2+w^2) \\ x_1x_2x_3+x_1x_2x_4+x_1x_3x_4+x_2x_3x_4=-b=8uvw \\ x_1x_2x_3x_4=c=\frac{a^2}{4}-4(u^2v^2+v^2w^2+w^2u^2)=(u^2+v^2+w^2)^2-4(u^2v^2+v^2w^2+w^2u^2) \end{array}\right\} —— ⑧$$

がなりたつ。また，

$\alpha=x_1x_2+x_3x_4$， $\beta=x_1x_3+x_2x_4$， $\gamma=x_1x_4+x_2x_3$

とおくと，

$$\begin{aligned}
&(x_1-x_2)^2(x_1-x_3)^2(x_1-x_4)^2(x_2-x_3)^2(x_2-x_4)^2(x_3-x_4)^2 \\
&\quad=\{(x_1-x_4)(x_2-x_3)\}^2\{(x_1-x_2)(x_3-x_4)\}^2\{(x_1-x_3)(x_2-x_4)\}^2 \\
&\quad=(\alpha-\beta)^2(\beta-\gamma)^2(\gamma-\alpha)^2 \\
&\quad=P^2Q^2+18PQR-4P^3R-4Q^3-27R^2
\end{aligned}$$

（ただし，$\alpha+\beta+\gamma=P$，$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=Q$，$\alpha\beta\gamma=R$　である。）

がなりたつ。⑧をもちいて，

$$\begin{aligned}
&P=-2A \\
&Q=x_1(x_1x_2x_3+x_1x_2x_4+x_1x_3x_4)+x_2(x_1x_2x_3+x_1x_2x_4+x_2x_3x_4) \\
&\qquad\qquad+x_3(x_1x_2x_3+x_1x_3x_4+x_2x_3x_4)+x_4(x_1x_2x_4+x_1x_3x_4+x_2x_3x_4) \\
&\quad=x_1(8uvw-x_2x_3x_4)+x_2(8uvw-x_1x_3x_4)+x_3(8uvw-x_1x_2x_4)+x_4(8uvw-x_1x_2x_3) \\
&\quad=-4x_1x_2x_3x_4 \\
&\quad=-4(A^2-4B) \\
&R=x_1x_2x_3x_4(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2)+(x_1^2x_2^2x_3^2+x_1^2x_2^2x_4^2+x_1^2x_3^2x_4^2+x_2^2x_3^2x_4^2) \\
&\quad=c\,(0^2-2a)+\{(-b)^2-2ca\}=b^2-4ca \\
&\quad=64C+8(A^2-4B)A=8(A^3-4AB+8C)
\end{aligned}$$

がなりたつ。したがって，

$$P^2Q^2+18PQR-4P^3R-4Q^3-27R^2=4^6(A^2B^2+18ABC-4A^3C-4B^3-27C^2)$$

である。ゆえに，

$$\begin{aligned}
&(x_1-x_2)^2(x_1-x_3)^2(x_1-x_4)^2(x_2-x_3)^2(x_2-x_4)^2(x_3-x_4)^2 \\
&\qquad=(y_1-y_2)^2(y_2-y_3)^2(y_3-y_1)^2 \\
&\qquad=(t_1-t_2)^2(t_2-t_3)^2(t_3-t_1)^2 \\
&\qquad=-27(\xi^3-\eta^3)^2
\end{aligned}$$

である。

この等式を　$\Delta_4=\Delta'_3=\Delta_3=-27\Delta_2$ とおいて，これらの符号で4次方程式の解のタイプを判別することを考える。

$\boxed{（ア）\ \Delta_4=\Delta'_3=\Delta_3=-27\Delta_2<0}$

$\Longleftrightarrow$ ξ^3，η^3 を求める2次方程式は，異なる2実数解をもつ。

$\Longleftrightarrow$ 方程式⑦は，1実数解と共役な2虚数解をもつ。

（方程式⑥の解と係数の関係より，$y_1y_2y_3=b^2\geqq 0$ より）

$\Longleftrightarrow$ 方程式⑥は，0以上の1実数解と共役な2虚数解をもつ。

（$b>0$ とする。$u^2=\frac{y_1}{4}$，$v^2=\frac{y_2}{4}$，$w^2=\frac{y_3}{4}$ の偏角をそれぞれ　0，θ，$-\theta$ とおくと，

$uvw=-\frac{b}{8}<0$ (偏角の和が π) となるように，u，v，w の偏角を選べば，方程式③の解 $x=u+v+w$ は，各絶対値を r_1，r_2，r_3 として，

$$x_1=r_1(\cos 0+i\sin 0)+r_2\left(\cos\frac{\theta}{2}+i\sin\frac{\theta}{2}\right)+r_2\left\{\cos\left(-\frac{\theta}{2}+\pi\right)+i\sin\left(-\frac{\theta}{2}+\pi\right)\right\}$$

$$=r_1+2ir_2\sin\frac{\theta}{2}$$

$$x_2=r_1(\cos 0+i\sin 0)+r_2\left\{\cos\left(\frac{\theta}{2}+\pi\right)+i\sin\left(\frac{\theta}{2}+\pi\right)\right\}+r_2\left\{\cos\left(-\frac{\theta}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{\theta}{2}\right)\right\}$$

$$=r_1-2ir_2\sin\frac{\theta}{2}$$

$$x_3=r_1(\cos\pi+i\sin\pi)+r_2\left(\cos\frac{\theta}{2}+i\sin\frac{\theta}{2}\right)+r_2\left\{\cos\left(-\frac{\theta}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{\theta}{2}\right)\right\}$$

$$=-r_1+2r_2\cos\frac{\theta}{2}$$

$$x_4=r_1(\cos\pi+i\sin\pi)+r_2\left\{\cos\left(\frac{\theta}{2}+\pi\right)+i\sin\left(\frac{\theta}{2}+\pi\right)\right\}+r_2\left\{\cos\left(-\frac{\theta}{2}+\pi\right)+i\sin\left(-\frac{\theta}{2}+\pi\right)\right\}$$

$$=-r_1-2r_2\cos\frac{\theta}{2}$$

の形で表される。

$b=0$ のときは $r_1=0$ と考えればよい。

$b<0$ のときは，$(-x)^4+a(-x)^2-b(-x)+c=0$ であるから，$-b>0$ の場合の解と符号のみかわる。したがって次が成りたつ)

$\Longleftrightarrow$ 方程式③は，異なる2実数解と共役な2虚数解をもつ。

(イ) $\Delta_4=\Delta'_3=\Delta_3=-27\Delta_2=0$

$\Longleftrightarrow$ ξ^3，η^3 を求める2次方程式は，2重解をもつ。

$\Longleftrightarrow$ 方程式⑦は，3重解$(=0)$または1実数解と2重解(異符号)をもつ。

(方程式⑥の解と係数の関係より，$y_1y_2y_3=b^2\geqq 0$ より)

$\Longleftrightarrow$ 方程式⑥は，0以上の3重解または1実数解と2重解をもつ。

$(b>0$ とする。後者の場合，u^2，v^2，w^2 の偏角はそれぞれ 0，0，0 または 0，π，π とおけるから，$uvw=-\frac{b}{8}<0$ (偏角の和が π)となるように，u，v，w の偏角を選べば，方程式③の解　$x=u+v+w$ は(ア)の場合にならって，

$x_1=r_1+r_2-r_2$，　$x_2=r_1-r_2+r_2$，$x_3=-r_1+r_2+r_2$，　$x_4=-r_1-r_2-r_2$

(ここで $r_1=r_2\neq 0$ とおいたものが前者の場合となる。)

または，

$x_1=r_1+r_2i+r_2i$，　$x_2=r_1-r_2i-r_2i$，$x_3=-r_1+r_2i-r_2i$，　$x_4=-r_1-r_2i+r_2i$

の形で表される。

したがって，解は3重解と1実数解(異符号)，または2重解と異なる2実数解，または2重解と共役な2虚数解である。

$b=0$ のときは後者の場合を次のように考えればよい。

$r_1=0$ と考えると，２重解（$=0$）と絶対値の等しい２実数解，

または２重解（$=0$）と共役な２虚数解（純虚数）

$r_2=0$ と考えると，絶対値の等しい２つの２重解

このときは，u^2, v^2, w^2 の偏角がそれぞれ π, o, o であることも考えられ，その場合は共役な２虚数解（純虚数）の２重解となる。

一方，$r_1=r_2=0$ と考えて，４重解（$=0$）を得る。

前者の場合は，

$b<0$ の場合は，$-b>0$ の場合の解と符号のみかわる。したがって次が成りたつ。）

$\Longleftrightarrow$ 方程式③は，３重解と１実数解，４重解，２重解と異なる２実数解または２重解と共役な２虚数解，絶対値の等しい２つの２重解または共役な２虚数解（純虚数）の２重解のいずれかをもつ。

（ウ）$\Delta_4=\Delta'_3=\Delta_3=-27\Delta_2>0$

$\Longleftrightarrow$ ξ^3，η^3 を求める２次方程式は，共役な２虚数解をもつ。

$\Longleftrightarrow$ 方程式⑦は，異なる３実数解をもつ。

（方程式⑥の解と係数の関係より，$y_1y_2y_3=b^2\geqq 0$ より）

$\Longleftrightarrow$ 方程式⑥は，３つとも０以上または１つが０以上の異なる３実数解をもつ。

（$b>0$ とする。u^2，v^2，w^2 の偏角はそれぞれ 0，0，0 または 0，π，π とおけるから，$uvw=-\dfrac{b}{8}<0$（偏角の和が π）となるように，u，v，w の偏角を選べば，方程式③の解 $x=u+v+w$ は同様に，

$x_1=r_1+r_2-r_3$,　$x_2=r_1-r_2+r_3$,　$x_3=-r_1+r_2+r_3$,　$x_4=-r_1-r_2-r_3$

または，

$x_1=r_1+r_2i+r_3i$,　$x_2=r_1-r_2i-r_3i$,　$x_3=-r_1+r_2i-r_3i$,　$x_4=-r_1-r_2i+r_3i$

の形で表される。

したがって，解は異なる４つの実数解または２組の共役な虚数解である。

$b=0$ とする。このとき，（異なる３実数解をもつことから）$r_1=0$ または $r_2=0$ の場合を考えると，２組の絶対値の等しい２実数解または符号のみ異なる２組の共役な２虚数解である。

$r_1=o$ で u^2, v^2, w^2 の偏角がそれぞれ o, o, π であることも考えられ，このときも符号のみ異なる２組の共役な２虚数解である。

$b<0$ の場合も（ア）（イ）と同様である。したがって次が成りたつ）

$\Longleftrightarrow$ 方程式③は，異なる４つの実数解または２組の共役な２虚数解をもつ。

以上のことから，この方法で一般の実数解をもつ４次方程式を解こうとすれば，３次方程式の場合と同様に，複素数を経由しないと解は求められないことがわかる。

次に，（ア）（イ）（ウ）のそれぞれについて，４次方程式の解がどのような u^2，v^2，w^2 を

経て得られるかを具体例で示す。

その際，方程式⑤が $s=1$ を解にもつようなものを考える。

$$\text{方程式⑤が } s=1 \text{ を解にもつ} \iff 1+\frac{a}{2}+\frac{a^2}{16}-\frac{c}{4}-\frac{a^2}{64}=0$$

である。したがって，方程式

$(x^2+2x+p)(x^2-2x+q)=0$

すなわち　$x^4+(p+q-4)x^2+2(p-q)x+pq=0$

$(a=p+q-4,\ b=2(p-q),\ c=pq)$

は，これをみたしているので，この形の例を示すことにする。

(ア)の例　$(x^2+2x-3)(x^2-2x+4)=0$ すなわち $x^4-3x^2+14x-12=0$

方程式⑤　$s^3-\frac{3}{2}s^2+\frac{57}{16}s-\frac{49}{16}=0$　∴ $s=1,\ \frac{1\pm4\sqrt{3}i}{4}$

ゆえに　$(u^2,\ v^2,\ w^2)=\left(1,\ \frac{1+4\sqrt{3}i}{4},\ \frac{1-4\sqrt{3}i}{4}\right)$ とおくと，

$(u,\ v,\ w)=\left(1,\ 1+\frac{\sqrt{3}}{2}i,\ -1+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right),\ \left(1,\ -1-\frac{\sqrt{3}}{2}i,\ 1-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right),$

$\left(-1,\ 1+\frac{\sqrt{3}}{2}i,\ 1-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right),\ \left(-1,\ -1-\frac{\sqrt{3}}{2}i,\ -1+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$

(イ)の例　$(x^2+2x-15)(x^2-2x+1)=0$ すなわち $x^4-18x^2+32x-15=0$

方程式⑤　$s^3-9s^2+24s-16=0$　∴ $s=1,\ 4,\ 4$

ゆえに　$(u^2,\ v^2,\ w^2)=(1,\ 4,\ 4)$ とおくと，

$(u,\ v,\ w)=(1,\ 2,\ -2),\ (1,\ -2,\ 2),\ (-1,\ 2,\ 2),\ (-1,\ -2,\ -2)$

$(x^2+2x+1)(x^2-2x+2)=0$ すなわち $x^4-x^2+2x+2=0$

方程式⑤　$s^3-\frac{1}{2}s^2-\frac{7}{16}s-\frac{1}{16}=0$　∴ $s=1,\ -\frac{1}{4},\ -\frac{1}{4}$

ゆえに　$(u^2,\ v^2,\ w^2)=\left(1,\ -\frac{1}{4},\ -\frac{1}{4}\right)$ とおくと，

$(u,\ v,\ w)=\left(1,\ \frac{1}{2}i,\ \frac{1}{2}i\right),\ \left(1,\ -\frac{1}{2}i,\ -\frac{1}{2}i\right),$

$\left(-1,\ \frac{1}{2}i,\ -\frac{1}{2}i\right),\ \left(-1,\ -\frac{1}{2}i,\ \frac{1}{2}i\right)$

(ウ)の例　$(x^2+2x-8)(x^2-2x-3)=0$ すなわち $x^4-15x^2+10x+24=0$

方程式⑤　$s^3-\frac{15}{2}s^2+\frac{129}{16}s-\frac{25}{16}=0$　∴ $s=1,\ \frac{25}{4},\ \frac{1}{4}$

ゆえに　$(u^2,\ v^2,\ w^2)=\left(1,\ \frac{25}{4},\ \frac{1}{4}\right)$ とおくと，

$(u,\ v,\ w)=\left(\pm1,\ \frac{5}{2},\ \mp\frac{1}{2}\right),\ \left(\pm1,\ -\frac{5}{2},\ \pm\frac{1}{2}\right)$ (複号同順)

$(x^2+2x+3)(x^2-2x+4)=0$ すなわち $x^4+3x^2+2x+12=0$

方程式⑤　$s^3+\frac{3}{2}s^2-\frac{39}{16}s-\frac{1}{16}=0$　∴　$s=1,\ \frac{-5\pm2\sqrt{6}}{4}$

ゆえに　$(u^2,\ v^2,\ w^2)=\left(1,\ \frac{-5+2\sqrt{6}}{4},\ \frac{-5-2\sqrt{6}}{4}\right)$ とおくと，

$$(u,\ v,\ w)=\left(1,\ \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}i,\ \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2}i\right),\ \left(1,\ -\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}i,\ -\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2}i\right),$$
$$\left(-1,\ \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}i,\ -\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2}i\right),\ \left(-1,\ -\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}i,\ \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2}i\right)$$

(II) 判別式の変形と解の公式

3次，4次方程式に解の公式が存在することをどのように理解したらよいのだろうか。一般に係数から四則演算をほどこした式を，いくつかのベキ根記号 $\sqrt[n]{\ }$ の中に次々と入れて“k重根号”で書かれた式を作り，これらをさらに四則演算で組み合わせて式として表したものがn次方程式の解の公式である。それは，方程式の最高次の係数は1で十分だから，解と係数の関係を媒介にして，解 $x_1,\ x_2,\ x_3,\ \cdots\cdots,\ x_n$ のベキ根記号を伴った基本対称式の式であると考えられる。対称式は基本対称式で表されることから，解 $x_1,\ x_2,\ x_3,\ \cdots\cdots,\ x_n$ の対称式の全体を考えると，差積の平方すなわち判別式 $\Delta_n=\prod_{i<j}(x_i-x_j)^2$ はこの中に位置づけられ，これは方程式の係数の作る多項式である。

以下において，2次～4次方程式のそれぞれについて，その解から出発して，(置換群の部分群を背景にして)より低次の方程式の解をこの解を用いて表し，その解のベキ乗を含めた“創意工夫”を繰り返して判別式が表現できる過程を，逆に判別式をある種の形に変形することによって調べてみよう。このことを通して解はどのようにして得られるかについても，合わせて記すことにする。したがって，とても大雑把な言い方をすれば，5次以上の方程式に解の公式がないということは，この判別式にたどりつく過程が(5次以上の対称群の性質のために)作れないということであると解釈できる。

方程式は，最高次の係数が1，(最高次)−1 次の係数が0の場合を考えれば十分である。以下のそれぞれについて，①は判別式の変形，②はそれを利用した解の求め方について述べたものである。

(1) 2次方程式　$x^2+a=0$ の場合

① $\Delta_2=(x_1-x_2)^2$　変形の必要なし。

② $(x_1-x_2)^2=(x_1+x_2)^2-4x_1x_2=-4a$　(∵ 解と係数の関係)

したがって，連立方程式

$$x_1+x_2=0,\qquad x_1-x_2=\pm\sqrt{-4a}$$

を解けばよい。

(2) 3次方程式　$x^3+ax+b=0$ の場合（$x_1^2+x_2^2+x_3^2-x_1x_2-x_2x_3-x_3x_1$ の因数分解に注目して）

① $\Delta_3=(x_1-x_2)^2(x_2-x_3)^2(x_3-x_1)^2$

$=(x_2-x_3)^2\{x_1^2+x_2^2+x_3^2-x_1x_2-x_2x_3-x_3x_1-(x_2-x_3)^2\}^2$

$=(\omega-\omega^2)^{-2}\{(x_1+\omega x_2+\omega^2 x_3)-(x_1+\omega^2 x_2+\omega x_3)\}^2$

$\times[(x_1+\omega x_2+\omega^2 x_3)(x_1+\omega^2 x_2+\omega x_3)-(\omega-\omega^2)^{-2}\{(x_1+\omega x_2+\omega^2 x_3)-(x_1+\omega^2 x_2+\omega x_3)\}^2]^2$

(ただし，ω は $x^3=1$ の虚数解)

$=-3^{-3}\{(x_1+\omega x_2+\omega^2 x_3)^3-(x_1+\omega^2 x_2+\omega x_3)^3\}^2$

② $\phi=x_1+\omega x_2+\omega^2 x_3$，$\psi=x_1+\omega^2 x_2+\omega x_3$ とおく。解と係数の関係を用いて $\Delta_3=-(4a^3+27b^2)$ となるから，

$\phi^3-\psi^3=\pm\sqrt{-27\Delta_3}$　　　(ⅰ)

一方，

$\phi^3+\psi^3=\omega^3(x_1+\omega x_2+\omega^2 x_3)^3+\omega^3(x_1+\omega^2 x_2+\omega x_3)^3$

$=(x_1+\omega x_2+\omega^2 x_3)\omega(x_1+\omega x_2+\omega^2 x_3)\omega^2(x_1+\omega x_2+\omega^2 x_3)$

$+(x_1+\omega^2 x_2+\omega x_3)\omega(x_1+\omega^2 x_2+\omega x_3)\omega^2(x_1+\omega^2 x_2+\omega x_3)$

$=2(x_1{}^3+x_2{}^3+x_3{}^3+6x_1x_2x_3)-3(x_1{}^2x_2+x_1x_2{}^2+x_2{}^2x_3+x_2x_3{}^2+x_3{}^2x_1+x_3x_1{}^2)$

$=2(3x_1x_2x_3+6x_1x_2x_3)+9x_1x_2x_3$

$=27x_1x_2x_3=-27b$　　　(ⅱ)

連立方程式 (ⅰ)(ⅱ) の解を α，β として，連立方程式

$x_1+x_2+x_3=0$，$x_1+\omega x_2+\omega^2 x_3=\sqrt[3]{\alpha}$，$x_1+\omega^2 x_2+\omega x_3=\sqrt[3]{\beta}$

を解けばよい。

$\phi\psi=x_1{}^2+x_2{}^2+x_3{}^2-x_1x_2-x_2x_3-x_3x_1$

$=(x_1+x_2+x_3)^2-3(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1)=-3a$

であるから，カルダーノの解法において，$u=\frac{1}{3}\phi$，$v=\frac{1}{3}\psi$　である。

(3) 4 次方程式　$x^4+ax^2+bx+c=0$ の場合

① $\Delta_4=(x_1-x_2)^2(x_1-x_3)^2(x_1-x_4)^2(x_2-x_3)^2(x_2-x_4)^2(x_3-x_4)^2$

$=\{(x_1-x_4)(x_2-x_3)\}^2\{(x_1-x_2)(x_3-x_4)\}^2\{(x_1-x_3)(x_2-x_4)\}^2$

($y_1=(x_1+x_2)(x_3+x_4)$，$y_2=(x_1+x_3)(x_2+x_4)$，$y_3=(x_1+x_4)(x_2+x_3)$ とおくと)

$=(y_1-y_2)^2(y_2-y_3)^2(y_3-y_1)^2$

(注) (Ⅰ) において，Δ_4 を変形するときにごく自然に

$\alpha=x_1x_2+x_3x_4$，$\beta=x_1x_3+x_2x_4$，$\gamma=x_1x_4+x_2x_3$

とおいたが，これはフェラリの解法に対応する変形であることがわかる。

ここで，解と係数の関係より

$y_1+y_2+y_3=2(x_1x_2+x_1x_3+x_1x_4+x_2x_3+x_2x_4+x_3x_4)=2a$

$y_1y_2+y_2y_3+y_3y_1$

$=\{a-(x_1x_2+x_3x_4)\}\{a-(x_1x_3+x_2x_4)\}+\{a-(x_1x_3+x_2x_4)\}\{a-(x_1x_4+x_2x_3)\}$

$+\{a-(x_1x_4+x_2x_3)\}\{a-(x_1x_2+x_3x_4)\}$

$=3a^2-2a^2+(x_1x_2+x_3x_4)(x_1x_3+x_2x_4)+(x_1x_3+x_2x_4)(x_1x_4+x_2x_3)+(x_1x_4+x_2x_3)(x_1x_2+x_3x_4)$

$=a^2+x_1(-b-x_2x_3x_4)+x_2(-b-x_1x_3x_4)+x_3(-b-x_1x_2x_4)+x_4(-b-x_1x_2x_3)$

$=a^2-4c$

$y_1y_2y_3$

$=\{a-(x_1x_2+x_3x_4)\}\{a-(x_1x_3+x_2x_4)\}\{a-(x_1x_4+x_2x_3)\}$

$=a^3-a^3+(-4c)a-x_1x_2x_3x_4(x_1{}^2+x_2{}^2+x_3{}^2+x_4{}^2)-\{(x_1x_2x_3+x_1x_2x_4+x_1x_3x_4+x_2x_3x_4)^2$

$-2x_1x_2x_3x_4(x_1x_2+x_1x_3+x_1x_4+x_2x_3+x_2x_4+x_3x_4)\}$

$=-4ca-c(0^2-2a)-\{(-b)^2-2ca\}=-b^2$

であるから，y_1，y_2，y_3 は方程式

$$y^3-2ay^2+(a^2-4c)y+b^2=0 \qquad (*) \qquad \text{の解である。}$$

ここで，y を $-y$ に置き換えたものがオイラーの解法における方程式⑥であるから，

解法において，$u^2=-\frac{1}{4}y_1$，$v^2=-\frac{1}{4}y_2$，$w^2=-\frac{1}{4}y_3$ である。

$y-\frac{2a}{3}=t$ とおくと，方程式は

$$t^3-\left(\frac{1}{3}a^2+4c\right)t+\frac{2}{27}a^3-\frac{8}{3}ac+b^2=0$$

となる。この解を t_1，t_2，t_3 とすると，

$\Delta_4=(t_1-t_2)^2(t_2-t_3)^2(t_3-t_1)^2$ となる。後に続く変形は，(2)の①と同様である。

② (2)の②と同様にして方程式（$*$)の解 $y_1=\alpha$，$y_2=\beta$，$y_3=\gamma$ を求める。

さらに，x_1，x_2，x_3，x_4 を求めるためには，(少々回り道で形式的になるが4次の対称群の部分群を意識して) 2次方程式を“2回”解けばよい。

$$(x_1+x_2)(x_3+x_4)=\alpha,\ (x_1+x_3)(x_2+x_4)=\beta,\ (x_1+x_4)(x_2+x_3)=\gamma$$

とおくと，

$$x_1+x_2+x_3+x_4=0,\ x_1x_2+x_3x_4=\frac{-\alpha+\beta+\gamma}{2},\ x_1x_2x_3x_4=c$$

より2次方程式を解いて x_1+x_2，x_3+x_4，x_1x_2，x_3x_4 を求める。さらに x_1+x_2，x_1x_2；x_3x_4，x_3x_4 がわかったのだからもう一度2次方程式を解いて x_1，x_2，x_3，x_4 を求めればよい。

解の公式はこの過程をたどることによって得られる。

（注） $(x_1+x_2)(x_3+x_4)=\alpha$ であるから，

$$(x_1+x_2-x_3-x_4)^2=(x_1+x_2+x_3+x_4)^2-4(x_1+x_2)(x_3+x_4)=-4\alpha$$

となり，同様に

$$(x_1-x_2+x_3-x_4)^2=-4\beta,\ (x_1-x_2-x_3+x_4)^2=-4\gamma$$

である。したがって，オイラーの解法において

$$u=\frac{x_1+x_2-x_3-x_4}{4},\ v=\frac{x_1-x_2+x_3-x_4}{4},\ w=\frac{x_1-x_2-x_3+x_4}{4}$$

と考えればよいが，平方根をとって，例えば，

$$x_1=\frac{(x_1+x_2+x_3+x_4)+(x_1+x_2-x_3-x_4)+(x_1-x_2+x_3-x_4)+(x_1-x_2-x_3+x_4)}{4}$$

などによって，解 x_1，x_2，x_3，x_4 は求まる。