現在の数学教育の一断面

（理学部数学科３年生の高校教材の理解の現状）

金沢大学教育学部付属高等学校　数学科

１．生徒の現状の必然性について

Ｑ君は努力家で、睡眠時間を削ってまで勉強する。向上心強く、面談すると決って熱っぽく自分の勉強についての決意を話してくれる。しかし、その割には成績は向上せず、かえって下降気味である。何度かの面談の結果、次のようなことが判明した。

普通の小学校から優秀な生徒が集る国立の中学校へ入学し、最初は頑張って学校での指導内容をこなしていたが、中学一年の三学期頃、ついに数学のスピードに追いつけず、答案を理解することをせずに丸暗記をしてテストに臨んだ。それ以後はテストの度に答案を丸暗記することに精力を注ぎ、理解する辛さから逃れてきた。その勉強方法でもかなりの点が取れて中位以上を確保し、何とか志望の本校へパスすることができた。高校に入ってからも同じ方針で勉強してきているが、高校では覚えるべき分量が多く、どれだけ時間をかけても追いつかない。

このことがわかってから、今勉強している難しい大学入試問題（彼がさがしてきたかなりレベルの高い問題集）の勉強を中断し、中学校の教科書から勉強をしなおすことを勧告した。両親にも、彼が理解しているかどうかを判定できる人（家庭教師）を付けて、正しい学習習慣を身につけさせて欲しいと依頼した。しかし当人は「そんな勉強ではとても点はとれないし、大学入試にも間に合わない。大学入試でもし自分の覚えたのと同じ問題がでれば点が取れるかもしれないが、教科書レベルでは学校のテストも大学入試も点は取れない。」と言って、どう説明しても勧告を受け入れてくれなかった。

Ｑ君の暗記勉強は、彼の責任のみに帰す訳にはいかない。誰でも力以上のことを要求されたとき、それなりに対応する方法を考える。彼なりに真剣に考えて自分で編み出した方策が暗記勉強なのである。本当に理解して、今の実力を大学入試に対応できるところまで持っていく道程の長さ・辛さを考えると、とてもそれに立ち向う勇気が湧かないのである。無理もないことと思う。現在の彼の姿は、彼の能力と、彼の教育環境—学校で要求される高い水準の学力や両親の高い望み—を考慮すれば、理由のある当然の姿であると考えることができるのである。

この事例と同様に、現在教育現場が抱えている諸問題—校内暴力・登校拒否・中途退学等—も、生徒の側にたって考えれば、理由のある必然的現象であると言える。理解できない授業を我慢して一時間聴く辛さ、勉強しろと言われ続けられたときの心の苛立ち、家庭内労働もさせず我慢することを教えられない家庭などに思いをめぐらせば、必然の現象であることは、十分納得できることなのである。よい人間でありたい、よい成績をとれるような学力を付けたいという思いは、すべての生徒が持っている願いである。ただ、それに至る道程の辛さと、自分の能力・忍耐力とのギャップの間に蠢めいているのが現在の生徒の姿なのである。問題行動は彼等の足掻き、呻きであることは明白であり、今日の教育界の現状は、色々な原因が積重なってできた必然の結果なのである。そして、その原因を作るのが、両親や教師の未熟さであり学歴偏重の社会情勢であり、教育行政でもある。

２．教師の研修について

教師集団が現在ある姿もまた、そうならざるを得なかった必然性があると思われる。特に最近教師への資質が取り沙汰され、教師の行動を事例的に取り上げて批判・非難されてはいる。しかし、反面、教師という職業は専門職と言われながら、その専門性の実態も不明確であり、

教師の専門教科の学力の程度や指導技術の程度についての、データをもとにした実態報告は殆どないと言ってよい（筆者が知らないだけかも知れない）。誰でも自分を俎上に乗せるのは恥しいし、テストを受けるのは嫌である。しかし、それでは、自分の弱点を知ることもできず、教師を育てるためには何をなすべきかはわからないはずである。

企業に就職すれば、そこは競争社会であり、有能な者はそれなりの待遇が与えられ、各部局が業績を上げなければ部長がその責を負わなければならないので、部下を叱咤激励し、会社も社員教育にかなりのエネルギーと費用をかけているのが現状である。振り返って教員の世界はどうであろうか。各県に立派な教育センター（研究所）があり、教育委員会・校長・教頭・先輩教師が、若い教師を育てるためになされる配慮や内地留学制度を無視するつもりはないが、筆者の経験から言えば、内地留学を希望しても他に及ぼす影響を考えれば、申し出ることはかなりの抵抗があり、日常活動の中からでてくる問題点を先輩教師にぶつけても「そうか、そんな問題もあるな」といった返事がかえってくることの方が多かったように思う。疑問に答えてくれる有能な先輩が居るとしたら、まことに幸運と言わねばなるまい。研修講座にしても受け身なものが大部分で、自分が評価されていると感じられる程の厳しいものはなかったように思う。基本的には自分で道を切り開いて行くしかないというのが現状である。ベテラン教師は各人独自に工夫した指導法を持っていると思われるが、それを公表し、他に伝達する態勢はできていない。

今、教員の世界で、若い教師を責任もって育てているのは何拠の誰なのであろうか、現場に教師の未熟さから生じた事件が起ったなら、誰がその責を負うのであろうか。教師の仕事や勉強は、すればする程金銭的な自己負担も増え、責任も重くなり、メリットは教師としての満足感だけ、という態勢はそれで良いのだろうか。教育界と企業では、どちらの方が現職教育にエネルギーと費用をかけているかという問いかけの答は明らかのように思えてならない。

学校には夏休みがある（教師は休みではないはず）。地域ごとに各教科の教師が集って授業計画を組み、生徒を一週間程登校させて授業をし、授業研究を毎年行うことは、それ程厳しいことであろうか。本校へは教育実習生が二週間やって来て、一人五時間程担当するが、その間にかなりの変容を遂げ、専門教科の勉強が如何に重要かを自覚していってくれるように思う。大部分の若い教師はやる気があると信じている。熱いうちにそれを鍛えることこそ、教育界変革のための重要な仕事ではないだろうか。

3．調査対象と調査結果を見る２つの観点

この調査は金沢大学理学部数学科３年（物理学科・工学部・大学院学生を一部含む）のうち数学科教育法の受講生32名を対象に行ったものである。この人達は

ア．現在の数学教育を成功裡に受け得た集団

イ．高校の教材理解の点では新任教諭と大差のない集団

と見ることができると思う。理学部の数学科へ進んだ、ということは高校時代、数学が好きであり、得意であったからと考えられ、従って教師にとっては自慢の作品であると考えられること、また、今後１年半の大学生活があり、教育実習があるからといって、高校教材の解釈力がそれ程大きく変化するとは考えられないからである。これが私共数学教師が育て上げた、しかも成績上位者の姿であり、教師になれば、すぐ一人前として扱われ、研鑽は各人の自覚に任されている現状であることを事実として厳しく受け止めねばならないと思うのである。

調　査　問　題

1．x の整式 $2x^2-3x-4$ の各項の係数をかきなさい。

2．-2 の約数をすべてあげなさい。

3．以下の答案について批評しなさい。

(*)　a，b は実数で $a+bi=0$ ならば $a=b=0$ である。

（証明）$a+bi=0$ の両辺に $a-bi$ をかけると $a^2+b^2=0$

a, b は実数であるから　$a=b=0$.

4．順序体の不等号($>$)についての公理系をあげなさい。

5．「$3>1$」というのは証明できることかどうかを答えなさい。

6．以下の内容について批評しなさい。

(*)　命題「$0>x>a$ ならば、$-1>x>2a-3$ である。」が真となるのは、$a<2a-3$ 即ち $a>3$ のときである。

7．次の命題の否定をかきなさい。

「すべての x に対して　$ax^2+bx+c>0$ であるならば、$a>0$ かつ $b^2-4ac<0$　である。」

8．背理法とは何か、説明しなさい。

9．以下の答案が正しいかどうかを批評しなさい。

(*)　$\dfrac{x^2-2x+2}{x(x-1)(x-2)}$　を部分分数に分解しなさい。

（解答）　与式 $=\dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{x-1}+\dfrac{c}{x-2}$ ——①　とおいて分母をはらうと

$x^2-2x+2=a(x-1)(x-2)+bx(x-2)+cx(x-1)$ ——②

$x=0$，$x=1$，$x=2$ を代入して、$a=1$，$b=-1$，$c=1$——③

$\therefore$　与式 $=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{x-2}$

10．以下の答案が正しいかどうかを批評しなさい。

(*)　$a(x-1)(x-2)(x-3)+b(x-1)(x-2)+c(x-1)+d=x^3$ が x の恒等式となるように a, b, c, d の値を定めなさい。

（解答）　両辺の x^3, x^2 の項の係数を比較して、$a=1$，$-6a+b=0$

$x=1$, $x=2$ を代入して、$d=1$，$c+d=8$

$\therefore$　$a=1$，$b=6$，$c=7$，$d=1$

11．以下の答案が正しいかどうかを批評しなさい。

(*)　a，b を正の定数とする。x，y が正数で $\dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{y}=1$ を満たすとき、$x+y$ のとる値の最小値を求めなさい。

（解答）x，y は正数だから　$x+y\geqq 2\sqrt{xy}$ ——①

$\dfrac{a}{x}$, $\dfrac{b}{y}$　は正数だから $1=\dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{y}\geqq 2\sqrt{\dfrac{ab}{xy}}$ ——②

したがって　$\sqrt{xy}\geqq 2\sqrt{ab}$　$\therefore x+y\geqq 4\sqrt{ab}$

よって $x+y$ の最小値は $4\sqrt{ab}$ である。

12. 以下の答案について批評しなさい。

(＊) θ を媒介変数として、$x=\cos\theta+\sin\theta+1$ ——①, $y=\sin 2\theta$ ——② を満たす点$(x,\ y)$全体の表す曲線を求めなさい。

（解答）①より $(x-1)^2=1+\sin 2\theta$

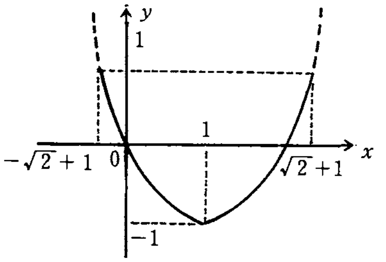
これを②に代入して　$y=(x-1)^2-1$

ところで　①より　$x=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)+1$

$\therefore\ -\sqrt{2}+1\leqq x\leqq\sqrt{2}+1$

②より　$-1\leqq y\leqq 1$

よって右図を得る。



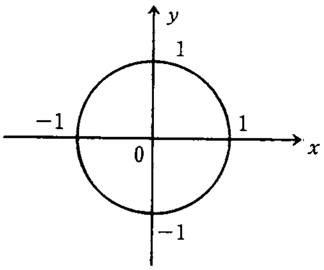
13. 以下の答案について批評しなさい。

(＊)　t を媒介変数として　$x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$ ——①, $y=\dfrac{2t}{1+t^2}$ ——②を満たす点$(x,\ y)$全体の表す曲線を求めなさい。

（解答）　①, ②の両辺を平方して

$$x^2+y^2=\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)^2+\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^2$$
$$=\frac{t^4+2t^2+1}{(1+t^2)^2}=1$$

よって、右図を得る。



14. 以下の内容について批評しなさい。

「連立方程式$\begin{cases}x^{2x+2y}=y^5\\ y^{2x+2y}=x^5\end{cases}$　の解は$\begin{cases}x=1\\ y=1\end{cases}$, $\begin{cases}x=\dfrac{5}{4}\\ y=\dfrac{5}{4}\end{cases}$, $\begin{cases}x=-\dfrac{1}{2}\\ y=-2\end{cases}$

$\begin{cases}x=-2\\ y=-\dfrac{1}{2}\end{cases}$　である。」

15. ベクトル、$\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ は一次独立であるとする。これらを用いて、互いに直交する3つの単位ベクトルを作りなさい。

16. 以下の答案について批評しなさい。

(＊) 数列$\{a_n\}$, $\{b_n\}$があって、その第n項 a_n, b_n は $b_n=\dfrac{2a_n+5}{a_n+1}$ を満たすものとする。いま、$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=3$ であるとき $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ を求めなさい。

（解答）　$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\alpha$ とすると $b_n=\dfrac{2a_n+5}{a_n+1}$ より $3=\dfrac{2\alpha+5}{\alpha+1}$

したがって　$3\alpha+3=2\alpha+5$

$\therefore\alpha=2\quad\therefore\lim\limits_{n\to\infty}a_n=2$

17. 以下の内容について批評しなさい。

「関数 $f(x)$ の $x=a$ における微分係数 $f'(a)>0$ ならば、$f(x)$ は $x=a$ の近くで増加の状態にある。」

18. 以下の内容について批評しなさい。

「曲線 $y=f(x)$ 上のある一点において接線がひけるとき、その接点の近くにおける曲線の状況については、次の3つの場合が考えられる。

（イ）曲線は接線の上側にある。

（ロ）曲線は接線の下側にある。

（ハ）曲線は接線の左右で、接点に関して反対側にある。」

19. 関数 $y=|x^3-3x|$ $(0\leqq x\leqq 4)$ の極値をすべてをあげなさい。

20. 以下の答案について感ずるところを述べなさい。

(*) 曲線 $y=f(x)=x^3(1+x)^{\frac{1}{2}}$ の $x=0$ における接線の方程式を求めなさい。

（解答）　両辺の対数をとると、$\log|y|=3\log|x|+\frac{1}{2}\log|x|+\frac{1}{2}\log|1+x|$

$$\frac{y'}{y}=\frac{3}{x}+\frac{1}{2(1+x)}=\frac{7x+6}{2x(x+1)}$$

したがって　$f'(x)=\dfrac{x^2(7x+6)}{2\sqrt{1+x}}$　　$\therefore f'(0)=0$

$f(0)=0$ より $y=0$ が求める接線である。

21. 以下の答案について批評しなさい。

(*) 関数 $y=f(x)$ が $f(x)=2x+3+\int_0^x f(t)\,dt$ ——① を満たすときの $f(x)$ を求めなさい。

（解答）　①の両辺を x で微分すると　$y'=2+y$ ——②

$y\neq -2$ のとき $\dfrac{1}{y+2}\dfrac{dy}{dx}=1$ より $\displaystyle\int\frac{1}{y+2}dy=\int dx$

$$\therefore \log|y+2|=x+c \quad ——③$$

①において $x=0$ とすると $f(0)=3$、したがって③より $C=\log 5$

$\log|y+2|=x+\log 5$

$|y+2|=e^{x+\log 5}$

$y+2=\pm 5e$　　　$y=-2$ は①を満たさないから

$\therefore y=-2\pm 5e^x$　　　$y=f(x)=-2\pm 5e^x$　（答）

22. $\displaystyle\int_0^1\{\sin\pi x-(ax+b)\}^2dx$ を最小にする定数 a, b の値を求めなさい。

23. 確率分布についての次の2つの定義は統一がとれていないのではないか、という批判にどう答えますか。

「確率変数Xのとる値が $x_1, x_2\cdots\cdots, x_n$ であるとき、x_i と、Xが x_i をとる確率 $P(X=x_i)$ との対応関係をXの確率分布という。」

「Xを連続型確率変数とするとき、x の関数 $P(X\leqq x)$ をXの確率分布という。」

4．解答状況

> 問題１　x の整式 $2x^2-3x-4$ の各項の係数をかきなさい。

定数項を係数として記述してない教科書から、はっきり明示してある教科書に変った時点で中学の先生から、定数項を係数として扱うべきかどうかについての質問を受けた。それについての学生の意識を調べた問題である。整式の定義から考えれば、x^2，x の係数はそれぞれ２，－３であり，定数項－４も係数といえる。

（解答状況）　　全体32名

定数項－４を明確に係数として扱った者13名、残り19名は「x^2, x の係数はそれぞれ２，－３であり、定数項は－４」と答えており、定数項は係数であるとはっきり意識しているかどうかは不明である。

> 問題２　－12の約数をすべて上げなさい。

整式環において、可逆元は０を除くすべての実数であるから、

$x+1$，$2x+2$，$\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}$，　………等はすべて同じ約数とみる。また整数の中では可逆元は±1であるから、たとえば２と－２は同じ約数とみる。一般に約数という概念は環で考え、普通ある約数の可逆元倍されたものは、その約数と同じとみる。だから－12の約数を考える場合、１と－１、２と－２、３と－３………12と－12はそれぞれ同じ約数と考えられるから、求める約数はたとえば普通１、２、３、４、６、12で答える。

（解答状況）　　全体32名

「約数は±１、±２、±３、±４、±６、±12」とした者　24名

「約数は正の整数の中で定義されるから、－12の約数はなし、または定義されてない」とした者　４名

「約数は正の整数の中で定義されるから、１、２、３、４、６、12」とした者　２名

単純なミスによる誤答　２名

正解者なし

> 問題３　以下の答案について批評しなさい。a, b は実数で $a+bi=0$ ならば、$a=b=0$ である。
> （証明）$a+bi=0$ の両辺に $a-bi$ をかけると、$a^2+b^2=0$，a, b は定数であるから、$a=b=0$

次の(I)、(II)、(III)を満たす $C=\{(a,b)|a, b\epsilon R\}$ の要素 (a, b) を複素数という。

(I) $(a, b)=(c, d)\Leftrightarrow a=c \wedge b=d$

(II) $(a, b)+(c, d)=(a+c, b+d)$

(III) $(a, b)\times(c, d)=(ac-bd \quad ad+bc)$

複素数 (a, b) を $a+bi$ と書くのは、上の公理から、$(a, b)=(a, 0)+(b, 0)\cdot(0, 1)$ の成立が証明できるからで，$a+bi=0$ とは、$(a, b)=(0, 0)$ のことであり、公理から直ちに $a=0$，$b=0$ が結論できる。$a+bi=0$ の両辺に $a-bi$ をかけて、$a^2+b^2=0$ とするのは、$(a, b)=(0, 0)$ の両辺に $(a, -b)$ をかけて $(a^2+b^2, 0)=(0, 0)$ を出し、公理(I)を用いて $a^2+b^2=0$ を導びいたことを意味している。即ち $(a, b)=(c, d)\Leftarrow a=c\wedge b=d$ を用いて、同じことを証明していることになる。

（解答状況）　　全体31名

「この答案これで正しい」とした者　11名

正解した者　５名

「〝a, b 実数より〟の次に〝$a^2\geqq 0$，$b^2\geqq 0$〟を入れる方がよい」とした者　４名

理由は不明であるが次の２つの解答があった

「$a+bi=0$ より $|a+bi|=0$，$|a+bi|^2=0$ よって $a^2+b^2=0$，a, b 実数より $a=b=0$」とした者　３名

「$a, b\fallingdotseq 0$ として $a+bi=0$ を考えると、

$i=-\frac{a}{b}$ となり、i は実数となるから矛盾、

よって　$a=b=0$」とした者　2名
「a, b実数のとき、$a^2+b^2=0$ をみたす a, b は $a=b=0$ しかないことは言えるのか」、意味は分らないが「$a-bi=0$ であることは考えなくてもよいか」といった意見があった。また白紙は4名

問題4　順序体の不等号（$>$）についての公理系を上げなさい。

大小関係について、教科書にみられる2つの公理系を上げればつぎのようである。

「公理系I

(1)任意の2つの実数 a, b について、
$a>b$, $a=b$, $a<b$
のうちいずれか1つの関係が成り立つ

(2)　$a>b \wedge b>c \Rightarrow a>c$

(3)　$a>b \Rightarrow a+c>b+c$

(4)　$a>b \wedge c>0 \Rightarrow ac>bc$」

「公理系II

次の(1)、(2)、(3)を満たす実数Rの部分集合Pが存在する。

(1)　$a \epsilon \mathrm{P} \wedge b \epsilon \mathrm{P} \Rightarrow a+b \epsilon \mathrm{P}$

(2)　$a \epsilon \mathrm{P} \wedge b \epsilon \mathrm{P} \Rightarrow ab \epsilon \mathrm{P}$

(3)　任意の実数 a に対して、
$a \epsilon \mathrm{P}, a=0, -a \epsilon \mathrm{P}$
のうちいずれか1つの関係が成り立つ
Pの要素を正の数といい、$b-a \epsilon \mathrm{P}$ を $a<b$ と書く」

（解答状況）　全体32名
白紙13名、残り19名の解答状況内訳

公理系I	(1)	○			○	○			○			4
	(2)		○		○		○			○		8
	(3)	○	○	○			○	○			○	12
	(4)	○	○	○		○		○				10
公理系II	(1)											
	(2)			○								2
人数		1	2	2	1	1	1	4	1	4	2	

完全な解答は一人もいなかった。

問題5「$3>1$」というのは証明できることかどうかを答えなさい。

$3>1$ は証明できることである。まず命題「$a \neq 0 \Rightarrow a^2>0$」を証明し、
$1 \neq 0$ より $1=1^2>0$
両辺に1を加えて　$2>1$　（公理(3)）
$\therefore$　$2>0$　（公理(2)）
両辺に1を加えて　$3>1$（公理(3)）を得る。
実数に公理(1)〜(4)を仮定したとき、大小は一意に定まることを知っているかどうかを問う問題である。

（解答状況）　全体32名
白紙　10名
「よく分からない」とした者　4名
「公理又は定義であるから証明することは出来ない」とした者　5名
証明できるとした者13名中で、理由や証明のない者2名、残り11名の証明例を上げると、

例1　$3-1=2$, $2>0$ である
よって　$3>1$　4名

例2　$2>0$
$2+1>0+1$　$\therefore 3>1$　2名

例3　$3 \leqq 1$ とすると $3-1 \leqq 1-1$
$\therefore 2 \leqq 0$　矛盾　$\therefore 3>1$　3名

例4　アルキメデスの公理より $3>1$　1名

例5　数直線において a が b より右にあるとき $a>b$ とすると明らかに $3>1$　1名

理由の明確な正解者は0であった。

問題6　以下の内容について批評しなさい。命題「$0<x<a$ ならば、$-1<x<2a-3$ である。」が真となるのは、$a<2a-3$ 即ち $a>3$ のときである。

$\mathrm{A}=\{x|0<x<a\}$, $\mathrm{B}=\{x|-1<x<2a-3\}$ とおくと
$0<x<a \Rightarrow -1<x<2a-3$ が真となるのは、集合Aが集合Bの部分集合のときである。
$\mathrm{A}=\phi$ の場合も考え合せて
$a \leqq 0 \vee a \leqq 2a-3$

よって $a \leqq 0 \vee a \geqq 3$ である。答案の $a < 2a-3$ は誤りであり、また答案は $A=\phi$ の場合を考慮してない。

（解答状況）　全体31名

正解者はなし

「この答案これで正しい」とした者　3名

「この答案は誤りである」とした者　19名

その内訳　（原文のまま）

例1　$a \geqq 3$ としたもの　15名

これは部分的に正解である。

例2　$0<x<p \Rightarrow -1<x<q$ が真となるのは $q<p$ である、よって $a>2a-3$ 即ち $a<3$ である。また $0<x<a$ であるから　$0<a<3$

例3　$0<x<a \Rightarrow -a<x-a<0$
$-1<x<2a-3 \Rightarrow -1-a<x-a<a-3$
よって $a-3>0$ より　$a>3$

例4　$p:0<x<a$, $q:-1<x<2a-3$ とおくと、命題 $p \Rightarrow q$ は p でない時はすべて真であり、即ち $x \leqq 0$, $a \leqq x$ のときは真というのを忘れている。

例5　$x>0 \Rightarrow x>-1$ は常に成立、よって条件 $x>-1$ はいらない、よって $0<x<a \Rightarrow x<2a-3$ が真となる a の範囲を求める。$0<x<a$ より $2x<3a-3$

$\therefore x<\dfrac{3a-3}{2}$　$\therefore 0<\dfrac{3a-3}{2}$　$\therefore a>1$

他、問題の意味が分かってないと思われる者4名、白紙5名であった。

「命題 $p \Rightarrow q$ は、p が偽のときは q の真偽に関係なく真である」ということを知らない為に $a \leqq 0$ を落しても、そう問題ではないかもしれないが、$a \geqq 3$ としなかった者が31名中16名は問題である。

> 問題7　次の命題の否定をかきなさい。
> 「すべての x に対して $ax^2+bx+c>0$ であるならば、$a>0$ かつ $b^2-4ac<0$ である。」

$P \Rightarrow Q$ は $\sim(P \wedge \sim Q)$ より、$P \Rightarrow Q$ の否定は $P \wedge \sim Q$ 即ちPであってQではない。よって与命題の否定は、「すべての x に対して $ax^2+bx+c>0$ であっても $a \leqq 0$ または $b^2-4ac \geqq 0$ なる a, b, c が存在する」となる。

（解答状況）　全体32名

白紙1名、正解者は一人もいなかった。誤答例を列挙すると、

「ある x に対して $ax^2+bx+c \leqq 0$ ならば、$a \leqq 0$ または $b^2-4ac \geqq 0$」　13名

「ある x に対して $ax^2+bx+c \geqq 0$ ならば、$a \leqq 0$ または $b^2-4ac \geqq 0$」　6名

「ある x に対して $ax^2+bx+c>0$ ならば、$a>0$ または $b^2-4ac<0$」　4名

「ある x に対して $ax^2+bx+c \leqq 0$ ならば、$a>0$ かつ $b^2-4ac \geqq 0$」　1名

「すべての x に対して $ax^2+bx+c>0$ ならば、$a \leqq 0$ または $b^2-4ac \geqq 0$」　2名

「すべての x に対して $ax^2+bx+c \leqq 0$ ならば、$a \leqq 0$ かつ $b^2-4ac \geqq 0$」　2名

「$a \leqq 0$ または $b^2-4ac \geqq 0$ ならば、ある x に対して $ax^2+bx+c \leqq 0$」　2名

「$a \leqq 0$ または $b^2-4ac \geqq 0$ ならば、ある x に対して $ax^2+bx+c>0$」　1名

結局誤答例で最も多いのは、「PならばQ」の否定を、その裏である「PでないならばQでない」としたものである。

> 問題8　背理法とは何か、説明しなさい。

「命題Pの否定を仮定したとき、矛盾（命題Q、Qでない、が共に真となること）が起れば命題Pは真である」ということを用いて証明する証明方法。即ち、トートロジー $\{(\sim P) \Rightarrow (Q \wedge (\sim Q))\} \Rightarrow P$ を用いて証明する証明方法。たとえば証明したい命題が、「$P \Rightarrow Q$」の形の場合、背理法を適用すれば「$P \Rightarrow Q$」の否定「$P \wedge (\sim Q)$」を仮定して矛盾を導いて「$P \Rightarrow Q$」が正しいことを証明することになる。

（解答状況）　全体31名

白紙2名で、殆んど分かってないと思われるもの6名、その内訳例は、

「～P⇒～Qが成り立つならP⇒Qが成立する」「P⇒Qを示すのに、～P⇒Qを仮定して矛盾を導びく」「結果の逆を仮定して矛盾を導びく」「あることを仮定して結論と矛盾することを導びく」「十分条件の否定を仮定して、必要条件に矛盾することを導びく」等である。他23名については、「Aを仮定してBを導びけば与命題を証明したことになる」のA，Bに下表のものを代入した解答であった。従って正解は9名である。

B＼A	命題の否定	結論の否定	PならばQでない
矛盾	9名	2名	4名
Pに矛盾	4名	1名	
命題に矛盾	1名	1名	
証明する		1名	

問題9　以下の答案が正しいかどうかを批評しなさい。

$\dfrac{x^2-2x+2}{x(x-1)(x-2)}$ を部分分数に分解しなさい。

（解答）与式 $=\dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{x-1}+\dfrac{c}{x-2}$ ……①

とおいて分母をはらうと、x^2-2x+2
$=a(x-1)(x-2)+bx(x-2)+cx(x-1)$
……②　$x=0, x=1, x=2$ を代入して、$a=1, b=-1, c=1$ ……③

$\therefore$ 与式 $=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{x-2}$

①式は0，1，2以外で成立するのに、②式の x に0，1，2を代入している点が問題になりそうである。しかし①即ち②が0，1，2以外で成立する（3個以上の値に対して成立する）ので②は恒等式、よって②は0，1，2でも成立する。以上より「②は3個以上の x で成立するので」という理由をつければこの解答はこれで正しい。

（解答状況）　　全体31名

理由をつけてこれで正しいとした者　　1名

「$x=0, 1, 2$ の代入は分母を0とするからいけない。係数比較法でやるべきである」とする者　　21名

「数値代入法は、特別の値を代入するので同値性がくずれる。係数比較法でいくべきである」とする者　　1名

「必要条件であって、十分性が示されていないから正しくない」とする者　　2名

他、問題点がよくつかめていない者　　6名

問題10　以下の答案が正しいかどうかを批評しなさい。

$a(x-1)(x-2)(x-3)+b(x-1)(x-2)+c(x-1)+d=x^3$ が x の恒等式となるように $a, b, c, d,$ の値を定めよ。

（解答）両辺の x^3, x^2 の項の係数を比較して、$a=1, -6a+b=0$

$x=1, x=2$ を代入して、$d=1$

$c+d=8$

$\therefore a=1, b=6, c=7, d=1$

$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots\cdots+a_n=0$ が恒等式
$\Longleftrightarrow a_0=a_1=\cdots\cdots=a_n=0$
$\Longleftrightarrow$ 異なるn＋1個の値に対して上式が成立という定理を用いれば、係数比較法のみ、数値代入法のみを用いれば、十分性の証明は不用となるが、解答のようにすると十分性が保証されないということを指摘すべき問題である。

（解答状況）　　全体31名

「係数比較法、数値代入法どちらか一方で行くべきだ」とした者（正解）　　3名

「必要条件である、十分性を調べねばならない」とした者（正解）　　4名

「係数比較法で行くべきで、数値代入したのはいけない」とした者　　9名

「この解答はこれで正しい」とした者　12名

他に問題点がよくつかめてない者2名、白紙1名であった。

問題11　以下の答案が正しいかどうかを批評しなさい。

a, b を正の定数とする。x, y が正数で $\frac{a}{x}+\frac{b}{y}=1$ を満たすとき、$x+y$ のとる値の最小値を求めなさい。

（解答）　x, y は正数だから

$x+y \geqq 2\sqrt{xy}$ ………①

$\frac{a}{x}, \frac{b}{y}$ は正数だから

$1=\frac{a}{x}+\frac{b}{y} \geqq 2\sqrt{\frac{ab}{xy}}$ ……②

したがって $\sqrt{xy} \geqq 2\sqrt{ab}$

$\therefore x+y \geqq 4\sqrt{ab}$

よって $x+y$ の最小値は $4\sqrt{ab}$ である。

この解答で $x+y$ が最小値 $4\sqrt{ab}$ をとるとすれば、それは①と②が同時に等号成立のときである。即ち、

$x=y \wedge \frac{a}{x}=\frac{b}{y}$ $\therefore x=y \wedge a=b$　よって

一般には $a \neq b$ であるから、$4\sqrt{ab}$ なる x, y は存在しない。この解答は誤りである。

平均の大小関係を用いて正解するなら、

$x+y=(x+y)\left(\frac{a}{x}+\frac{b}{y}\right)=a+b+\frac{bx}{y}+\frac{ay}{x}$

$\geqq a+b+2\sqrt{ab}=(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2$

等号成立は $\frac{bx}{y}=\frac{ay}{x} \wedge \frac{a}{x}+\frac{b}{y}=1$　以上より

$x=\sqrt{a}(\sqrt{a}+\sqrt{b}),\ y=\sqrt{b}(\sqrt{a}+\sqrt{b})$

のとき、$x+y$ の最小値は $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2$、他にシュワルツの不等式を用いて正解してもよい。

（解答状況）　　全体31名

白紙４名、「この解答は正しい」とする者７名、「この解答は十分とは言えないが、色々の条件を付ければ一応正しい」とする者16名、残り４名は正しい理由を付けて、「この解答は正しくない」としている。

問題12　以下の答案について批評しなさい。

Qを媒介変数として

$x=\cos\theta+\sin\theta+1$……①

$y=\sin 2\theta$……②

を満たす点 (x, y) 全体の表す曲線を求めなさい。

（解答）　①より $(x-1)^2=1+\sin 2\theta$

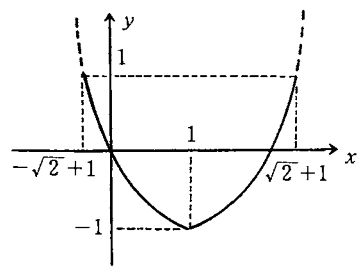
これを②へ代入して $y=(x-1)^2-1$

ところで①より $x=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)+1$

$\therefore -\sqrt{2}+1 \leqq x \leqq \sqrt{2}+1$

②より $-1 \leqq y \leqq 1$

よって右図を得る。



θ に $\pi+\theta$ を代入すれば $x-1=-\cos\theta-\sin\theta$

$\therefore x-1=\cos\theta+\sin\theta$

$\Longleftrightarrow x-1=\pm(\cos\theta+\sin\theta)$

$\Longleftrightarrow (x-1)^2=1+\sin 2\theta$

よって

$$与式 \Leftrightarrow \begin{cases}(x-1)^2=1+\sin 2\theta \\ y=\sin 2\theta\end{cases}$$

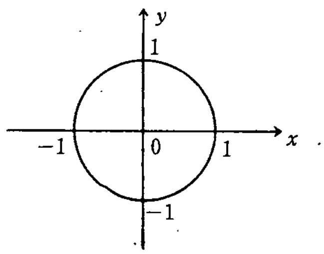
$$\Leftrightarrow \begin{cases}y=(x-1)^2-1 \\ y=\sin 2\theta\end{cases}$$

$y=\sin 2\theta$ より $-1 \leqq y \leqq 1$

故に求める曲線は $y=(x-1)^2-1$　かつ $-1 \leqq y \leqq 1$ である。

以上より問題の解答は $x-1=\cos\theta+\sin\theta$ の両辺を平方しても①と同値になることと、x, y のとり得る範囲をそれぞれ調べてあるが、これは論理的に重複があり一方だけ調べればよいことを指摘する問題である。

（解答状況）　全体32名
$-\sqrt{2}+1 \leqq x \leqq \sqrt{2}+1$ と $-1 \leqq y \leqq 1$ の重複を上げた部分正解者は２名
「正解である」としたもの10名
白紙10名、他、無意味な記述10名、たとえば「計算を詳しく」、「θ を消去して、x, y の式にすればよいことをいう」、「最後にx, y の範囲を調べたのはよい」、「$\sin\theta=\cos\theta=1$ なる θ を求める」等である。

> 問題13　以下の答案について批評しなさい。
>
> t を媒介変数として、$x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$ ……①
>
> $y=\dfrac{2t}{1+t^2}$ ……②を満たす点(x, y)
>
> 全体の表わす曲線を求めなさい。
>
> （解答）　①、②の両辺を平方して
>
> $$x^2+y^2=\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)^2+\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^2$$
>
> $$=\frac{t^4+2t^2+1}{(1+t^2)^2}$$
>
> $$=1$$
>
> よって下図を得る。
>
> 
>

この問題の場合は $t=\tan\dfrac{\theta}{2}$ とおくと、$x=\cos\theta$, $y=\sin\theta$ となるから、求める曲線は $x^2+y^2=1 \wedge (x, y) \neq (-1, 0)$ となる。しかし普通の解法は、$x=-1$ のとき$(x+1)t^2=1-x$ は成立しないので、

$$（与式）\Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)t^2=1-x \\ (1+t^2)y=2t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t^2=\dfrac{1-x}{1+x} \\ t\ =\dfrac{y}{1+x} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t^2=\dfrac{1-x}{1+x} \\ \dfrac{2}{1+x}y=2t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t^2=\dfrac{1-x}{1+x} \\ t\ =\dfrac{y}{1+x} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2=1 \\ t=\dfrac{y}{1+x} \end{cases}$$

$\therefore x^2+y^2=1 \wedge (x, y) \neq (-1, 0)$ である。
問題の解答は必要条件であって、$x^2+y^2=1$ 上の任意の点に対する t の存在を調べる必要がある。実際$(x, y)=(-1, 0)$ に対する t は存在しない。同値性を無視した答案である。
（解答状況）　全体31名
正解者８名の内訳は
「$x \neq -1$」を指摘した者５名、「$x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}=\dfrac{2}{1+t^2}-1$ より $-1<x\leqq 1$」とした者　２名
「$\dfrac{dx}{dt}, \dfrac{dy}{dt}$ を調べ、x, y の変域を調べて$(-1,0)$ を除く」とした者１名である。
「解答はこれで正しい」とした者　８名
「x, yが$-1\leqq x\leqq 1$, $-1\leqq y\leqq 1$ の範囲を動くかどうかを書いてほしい」とした者３名、他、問題の意味がつかめてなかったり、意味のない記述をした者５名、白紙７名であった。

> 問題14　以下の内容について批評しなさい。「連立方程式$\begin{cases} x^{2x+2y}=y^5 \\ y^{2x+2y}=x^5 \end{cases}$
>
> の解は、$\begin{cases} x=1 \\ y=1, \end{cases}$ $\begin{cases} x=\dfrac{5}{4} \\ y=\dfrac{5}{4}, \end{cases}$ $\begin{cases} x=-\dfrac{1}{2} \\ y=-2\ , \end{cases}$
>
> $\begin{cases} x=-2 \\ y=-\dfrac{1}{2} \end{cases}$ である」

４組の解を与式に代入すれば、すべて成立するから、この４組とも解であるとする立場はある。しかし x^y という式は、y が分数であることを許されると $x>0$ とするのが普通であ

ると思われる。そのあたりの事情の各人の考え方を述べてもらうのが題意である。

（解答状況）　全体31名

理由をつけて「この方程式の解を４組でもよい」とした者　２名

「$(x, y)=\left(-\frac{1}{2}, -2\right), \left(-2, -\frac{1}{2}\right)$ は不適である」とした者　１名

実際この連立方程式を解いてみて、途中で計算が駄目になった者　５名、「いきなり答はいけない」とか「計算の途中の過程が大切である」といった、問題の意味がつかめてない者４名、他、白紙19名であった。白紙が多かった理由は、おそらく問題の意図するところが分らず、実際に解いて解が正しくなるかどうかを調べるのも大変ということであきらめたのではないかと思う。

> 問題15　ベクトル $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ は一次独立であるとする。これらを用いて、互いに直交する３つの単位ベクトルを作りなさい。

３次以上の抽象的な計量（内積）空間に座標軸を定める方法を問う基本的な問題である。

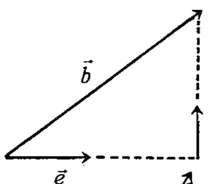
$\vec{e}=\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$

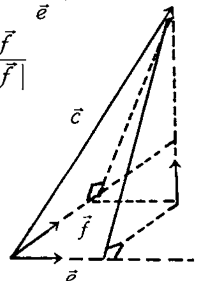
$\vec{f}=\dfrac{\vec{b}-(\vec{b}\cdot\vec{e})\vec{e}}{|\vec{b}-(\vec{b}\cdot\vec{e})\vec{e}|}$

$\vec{g}=\dfrac{\vec{c}-(\vec{e}\cdot\vec{c})\vec{e}-(\vec{f}\cdot\vec{c})\vec{f}}{|\vec{c}-(\vec{e}\cdot\vec{c})\vec{e}-(\vec{f}\cdot\vec{c})\vec{f}|}$

となる。

たとえば $\vec{b}$ の $\vec{e}$ 方向の成分ベクトルが $(\vec{e}\cdot\vec{b})\vec{e}$ となるからである。





（解答状況）　全体32名

３つのベクトル作成できた正解者　１名

$\vec{a}$ と直交する単位ベクトル作った者　１名

$\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ だけの者　５名

未完成答案　12名

白紙　13名

> 問題16　以下の答案について批評しなさい。
> ２つの数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ があって、その第n項 a_n, b_n は $b_n=\dfrac{2a_n+5}{a_n+1}$ を満たすものとする。いま $\lim_{n\to\infty} b_n=3$ であるとき、$\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めなさい。
> （解答）　$\lim_{n\to\infty} a_n=\alpha$ とすると
> $b_n=\dfrac{2a+5}{a_n+1}$　より　$3=\dfrac{2a+5}{\alpha+1}$
> したがって $3\alpha+3=2\alpha+5$
> $\therefore \alpha=2$　よって $\lim_{n\to\infty} a_n=2$

問題の解答は、数列 $\{a_n\}$ の極限の存在が分かっている場合の答案である。今は数列 $\{b_n\}$ の極限の存在しか分かっていないから答案は

$b_n=\dfrac{2a_n+5}{a_n+1}$ より $a_n=\dfrac{5-b_n}{b_n-2}$ また $\lim_{n\to\infty} b_n=3$

より $\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}\dfrac{5-b_n}{b_n-2}=2$

よって $\lim_{n\to\infty} a_n=2$ となる。

（解答状況）　全体31名

正解者、準正解者は11名、その内訳は、「$a_n=\dfrac{5-b_n}{b_n-2}$ と変形して極限をとるべきだ」としたもの６名、「数列 $\{a_n\}$ が収束するときはこれでよい」とした者１名。「$\lim_{n\to\infty} a_n=\alpha$ とおくのはよくない」とした者２名、「$\lim_{n\to\infty}(a_n-2)=0$ を示すべきである」とした者１名であった。「$\lim_{n\to\infty} a_n=\pm\infty$ とすると、矛盾が生ずるので $\lim_{n\to\infty} a_n=\alpha$ とおける」とした者１名である。

「この解答はこれで正しい」とした者　８名

白紙は６名、その他、無意味な記述、よく理解できない記述をした者６名で、たとえば、「$a_n \neq -1$ であるが、$\alpha=-1$ かもしれない」

「$a \neq -1$をいう必要がある」、

「$b_n=\dfrac{2a_n+5}{a_n+1}$ より $\displaystyle\lim_{n\to\infty}b_n=\lim_{n\to\infty}\frac{2a_n+5}{a_n+1}$ を言う」、「左辺が有限確定なら右辺も有限確定を一言加える」等である。

問題17 以下の答案について批評しなさい。
「関数$f(x)$の$x=a$における微分係数$f'(a)>0$ならば、$f(x)$は$x=a$の近くで増加の状態にある。」

「aの近くで増加」とは「aを含む開区間が取れてその中で増加」の意味である。
従って

$$f(x)=\begin{cases} x+2x^2\sin\dfrac{1}{x} & (x \neq 0) \\ 0 & (x=0) \end{cases}$$

とすると$f'(0)=1$ となるが、

$$f'(x)=1+4x\sin\frac{1}{x}-2\cos\frac{1}{x}$$

となるので、0を含むどんな開区間をとっても、その中で$f'(x)<0$ となる範囲が存在する。
ただ「aの近くで増加」を「aの近くのp, qに対して、$p<a<q \Rightarrow f(p)<f(a)<f(q)$」の意味にとれば、この題意は成立するが、無理あるように思う。
（解答状況）　全体31名
白紙10名
「これは正しい文章である」とする者5名
「近くでという用語が曖昧」とする者7名
「$\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}(f(a+h)-f(a))>0$ より十分小さな正数hに対して$\dfrac{1}{h}\{f(a+h)-f(a)\}>0$ $\therefore f(a+h)>f(a)$よって増加」とした者6名で、その6名中、$h>0$をつけてない者2名、$\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\{f(a+h)-f(a)\}>0$ より即増加とした者2名、他$h<0$, $h>0$ と場合分けをしたもの1名であった。
「平均値の定理より$b<a<c$で、$f'(a)=\dfrac{f(c)-f(b)}{c-b}>0$, $\therefore f(b)<f(c)$」とした者1名
「$f'(a)$が存在し、$f(x)$が$x=a$で定義されない場合、増加とは限らない」とした者1名
「$f'(a)>0$とは点aにおける$f(x)$の変化率が正であることをいっているので、点aの近くで正であるとは限らない」とした者1名

問題18 以下の内容について批評しなさい。
「曲線$y=f(x)$上のある一点において接線がひけるとき、その接点の近くにおける曲線の状況については、次の3つの場合が考えられる。
(ア) 曲線は接線の上側にある。
(イ) 曲線は接線の下側にある。
(ウ) 曲線は接点の左右で、接点に関して反対側にある。

この問の文章は実際にある教科書にかかれていた文章である。$y=f(x)$の$x=a$におけるy軸と平行でない接線を$y=f'(a)(x-a)+f(a)$と定義すれば、問題17で上げた例、

$$f(x)=\begin{cases} x+2x^2\sin\dfrac{1}{x} & (x \neq 0) \\ 0 & (x=0) \end{cases}$$

の$x=0$における接線は$y=x$となる。
この曲線と$y=x$とは、$x=0$の近くで無限回交わるので、$y=x$を接線とすることに異論があるかもしれない。

（解答状況）　全体32名
白紙9名
「この文章、これで正しい」とした者　5名
「上、下という用語は曖昧である」とした者は4名で、例として$y=\sqrt{1-x^2}$ の$x=\pm 1$や、$y=\sqrt{x}$の$x=0$における接線を上げている。
「接線と曲線が重なる場合があり、この文章は正しくない」とする者5名、例として、
$y=ax+b$ を上げている。
「(ウ)について問題ありそうだがよく分らない」

とした者５名、「(ウ)の場合はありえない」とした者１名

「(ア)、(イ)、(ウ)、以外の場合もある」とした者３名で、例として $y=|x^2-1|$ の $x=1$ における右側接線と左側接線のある場合等を上げている。

> 問題19　関数 $y=|x^3-3x|$
> （$0\leqq x\leqq 4$）の極値をすべて上げなさい。

極値の定義は多様である。a の近くの a 以外の x に対して $f(a)>f(x)$ （$f(a)<f(x)$）は共通であるが、

①　a は定義域の内点であるとき

②　$x=a$ で連続であるとき

③　$x=a$ で微分可能であるとき

なる条件のいずれかが付されているものが多い。

①、②が仮定されている場合が多いように思う。従ってどう答えても正解で、学生がどう習って来たかを調べたまでである。

（解答状況）　　全体32名

極値を「$f(1)$ のみ」とした者	17名
「$f(1)$ と $f(\sqrt{3})$」とした者	11名
「$f(0),f(1),f(\sqrt{3}),f(4)$」とした者	２名
「$f(0),f(1),f(4)$」とした者	１名
白紙	１名

微分可能でない点における値 $f(\sqrt{3})$ を極値として扱ってない者32名中19名であり、端点を極値として扱った者は３名であった。

> 問題20　以下の答案について感ずるところを述べなさい。
> 曲線 $y=f(x)=x^3(1+x)^{\frac{1}{2}}$ の $x=0$ における接線の方程式を求めなさい。
> （解答）　両辺の対数をとると、
> $\log|y|=3\log|x|+\frac{1}{2}\log|1+x|$
> $$\frac{y'}{y}=\frac{3}{x}+\frac{1}{2(1+x)}=\frac{7x+6}{2x(1+x)}$$
> したがって $f'(x)=\dfrac{x^2(7x+6)}{2\sqrt{1+x}}$
> $\therefore f'(0)=0$
> また $f(0)=0$ より $y=0$ が求める接線である。

この問題は $x=0$ における微分係数 $f'(0)$ を求めるのに、対数微分法を用いている。この場合 $x=0$ を除いたところで $f'(x)$ を求め、次に $x=0$ を代入することによって $f'(0)$ を求めたと考えれば論理的に誤りである。

しかし $f(x)$ が $x>-1$ で２回微分可能だから $f'(x)$ は連続である。$x=0$ を除いたところで $f'(x)$ を求め、連続性を用いて $f'(0)$ を求めたと考えれば「$f'(x)$ は連続なので」の理由をつければこの答案はこれで正しい。

対数微分法を用いて微分係数を求めていく場合いつも起る問題である。

（解答状況）　　全体31名

白紙６名	
「この答案はこれで正しい」とした者	５名
以下の理由で対数微分法を用いずに $f'(x)$ を求めた者	10名
・$x=0$ を代入できない	４名
・対数をとるまでもない	１名
・特に正当性のある理由なし	５名
「真数が０になることがある為に、対数をとることが気になる」	１名
$x\neq 0$ として対数をとった者	２名
$x\neq 0$, $x\neq -1$ として対数をとった者	２名

無意味な記述のあるもの５名、たとえば、「真数は正」、「$x=0$ における接線の存在をいうべきだ」、「対数をとることにより微分の計算を容易にしている」「計算のプロセスを詳しくせよ」

> 問題21　以下の答案について批評しなさい。
> 関数 $y=f(x)$ が、$f(x)=2x+3+\int_0^x f(t)\,dt$………①を満たすとき、$f(x)$ を求めなさい。

（解答）①の両辺を x で微分すると、

$$y'=2+y \cdots\cdots\cdots ②$$

$y \neq 2$ のとき $\frac{1}{y+2}\frac{dy}{dx}=1$ より

$\int \frac{1}{y+2}dy=\int dx$

$\therefore \log|y+2|=x+c \cdots\cdots\cdots ③$

①において $x=0$ とすると $f(0)=3$

したがって③より　$C=\log 5$

$\log|y+2|=x+\log 5$

$|y+2|=e^{x+\log 5}$

　$y+2=\pm 5e^x$

$\therefore y=-2\pm 5e^x$

$y=-2$ は①をみたさない。

　$\therefore y=f(x)=-2\pm 5e^x$

もともと原始関数はある区間で定義された関数に対して考えるものである。従って、

$\int \frac{1}{x}dx=\log|x|+c$ とすること自体略式記法で、

$x>0$ のとき $\int \frac{1}{x}dx=\log x+c$

$x<0$ のとき $\int \frac{1}{x}dx=\log(-x)+d$

とすべきである。

$\int \frac{1}{y+2}dy=\int dx$ より

$y>-2$ のとき $\log(y+2)=x+c$

ここで $x=0$ のとき $y=3$ より $c=\log 5$

　$\therefore y+2=5e^x$

また $y<-2$ のとき $\log(-y-2)=x+d$

$\therefore y=3$ は左辺が定義されないので d はないとすべきである。

（解答状況）　　全体31名

白紙14名

「この解答はこれで正しい」とした者４名

「解は $y=-2+5e^x$ のみ」とした者　３名で、その内２名は検算で気付いたもので、他の１名は理由なし。

無意味な記述のあった答案は９名で、たとえば「"$y=f(x)$ とおく"を書くこと」「$f(x)$ の微分可能性必要」「$y \neq -2$ を気にする必要なし」「$y=-2$ は①を満たさない理由が必要」「$e^{x+\log 5}=5e^x$ の計算過程を入れる。

問題22

$$\int_0^1 \{\sin\pi x-(ax+b)\}^2 dx \text{ を}$$

最小にする定数 a, b の値を求めなさい。

$\vec{e}, \vec{f}$ を直交する単位ベクトルとすると、

$|\vec{x}-(p\vec{e}+q\vec{f})|^2$ を最小にする p, q

$p=\vec{e}\cdot\vec{x}$,　$q=\vec{f}\cdot\vec{x}$ である。

$L_2[0,\ 1]$ において

$\int_0^1 (x-\frac{1}{2})^2 dx=\frac{1}{12}$ より

1 と $\sqrt{12}(x-\frac{1}{2})$ は直交する単位ベクトル

従って $\int_0^1 \{\sin\pi x-(ax+b)\}^2 dx$

$=\int_0^1 \left[\sin\pi x-\left\{\frac{a}{\sqrt{12}}\cdot\sqrt{12}\left(x-\frac{1}{12}\right)+\left(\frac{1}{2}a+b\right)\cdot 1\right\}\right]^2 dx$

これを最小にする a, b は

$\frac{a}{\sqrt{12}}=\int_0^1 \sqrt{12}\left(x-\frac{1}{2}\right)\sin\pi x\,dx=0$

（対称性から）

$\frac{1}{2}a+b=\int_0^1 \sin\pi x\,dx=\frac{2}{\pi}$

をみたす

　$\therefore a=0$,　$b=\frac{2}{\pi}$

実は題意は L_2 において、点 $\sin\pi x$ と、 平面 $ax+b$ との距離を最小にする定数 a, b の値を求めよということである。この問題をベクトル空間の問題として理解できるかどうかを調べようという問題なのである。

（解答状況）　　全体32名

白紙９名

ベクトル空間の意味を考えた者なし、

普通の計算を実行した者23名のうち、計算まちがい、または計画途中でダウンした者９名

$\frac{a^2}{3}+ab+b^2-\frac{2}{\pi}a-\frac{4}{\pi}b+\frac{1}{2}$ まででた者８名

$a=0$, $b=\dfrac{2}{\pi}$ の正解までたどり着いた者

2名のみであった。

> 問題23　確率分布についての次の2つの定義は、統一がとれていないのではないか、という批判にどう答えますか。
> 「確率変数Xのとる値が、x_1, x_2………
> ……, x_n であるとき、x_i とXが x_i をとる確率P(X$=x_i$)との対応関係をXの確率分布という。」
> 「Xを連続型確率変数とするとき、x の関数P(X$\leqq x$)をXの確率分布という。」

確率分布の実体は、確率変数Xの定義域の可測な部分集合全体から[0,1]への関数（集合関数）である。これを定めるのに離散型の確率変数のときは、P(X$=x_i$)を与え、連続型の確率変数のときは、P(X$\leqq x$)を与えれば便利だというだけのことである。離散型の場合、P(X$\leqq x_i$)を与えてもよいが、かえって煩鎖になるだけである。

（解答状況）　　全体32名

白紙　21名

定義の不統一の意味がよくつかめてない者2名、理由は不明であるが、「P(X$=x_i$)、P(X$\leqq x$)、確かに統一とれてない」としたもの3名

「統一とれている」とした者6名で、理由は不明なものがあるがたとえば「$x_n=x$とすれば、P(X$=x_i$)とP(X$\leqq x$)は同値」

「後者の定義は前者の定義を拡張したものである」、「どちらもPはx_iによって決まるから同じである」、「後者の定義において、ある点の起る確率を0とすれば問題はない。」確率分布の実体が、集合関数であることを指摘できたものはいなかった。

5．調査結果・まとめ

正答、準正答（分かっているかどうか不明のもの）を合わせて，各問題の正答率を表にすると，次のようになる。

（正答率％）

問題番号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
正 答 率	100	0	17	10	35	49	0	30	4	23	13	38
問題番号	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	
正 答 率	26		4	36	7	25		17	10	7	0	

この調査問題は数学科教育法の受講者の数学的能力を見る目的の外に将来数学科教師になったとき、かなり数学の力が要求されることを強調する為に、生徒の質問内容、授業中の生徒の抜書、教材研究時に得たもの、同僚教師より指摘された問題の中から気が付くままにランダムに書き上げたもので、体系的に集めたものではない。また調査問題内容は、高校数学では常識となっているものから、受験数学で強調されている、かなり程度の高いものまで混在している。中には問題18のように、教科書の文章をそのまま抜き取り、批判させているものや、問題７のようにそのまま共通一次に出してもよいのではないかと思われるものなども入れてある。

調査結果は予想通り惨胆たるものであった。調査時間は約 160 分、時間約余裕は十分ではないにしても、中には短時間で答えられる問題もあり、この時間で十分数学の力の状況をつかむことが出来たと思う。しかしこの結果は決して彼等の不勉強を示すものではない。我々数学教師全体が作り上げた必然的結果であると考えねばならない。しかもデータの中から教学教育の動向が読み取られる面もある。高校数学に論理が導入されていなかった一昔前では、背理法とはと聞かれれば､「証明すべき命題の結論を否定して矛盾を導くことにより与命題が真であることを示す証明法」と答えるのが大多数であった。しかし今回の問題８でみられるように、この下線部を〝証明すべき命題を否定して〟と答えたものが、かなりの率にのぼっている。これは高校の数学教育が、論理の面では進歩してきている証拠であると思う。しかし問題７で見られるように、「ＰならばＱ」の否定が「ＰかつＱでない」となることを指摘できた人は一人もいなかったことから考えれば､進歩はしているがまだまだといったところである。また問題２の「−12の約数を言え」という問に正解者が０であったというのはこれまた当然のことである。約数倍数は負の数が導入されていない小学校４年に導入され、その後整式の約数・倍数は指導されても、改めて整数の中で約数・倍数を指導する機会がないからである｡「ある約数に可逆元を乗じたものは同じ約数と見なす」ことは、整式の範囲で定数を乗じたものは同じ約数と見なすとして指導されるが、その機会に整数の範囲での約数、倍数を見なおせば、このような結果にはならないであろう。また高校の微分・積分は直観的でいいかげんな面が多い為に、問題18、問題21の正解者が０となっても不思議ではない。問題のうちでそこそこに満足できるのは問題１の「係数を言え」だけであった。今回の調査結果から見ても、ペアノの公理から出発して自然数から複素数までの拡張や、群・環・体などの学習を、教材と照らし合わせて、もう一度学習する必要のあること、論理は教師にとって絶体に必要であるのに、大学では指導される場がなく、どこかで論理学の指導がなされなければならないこと、微分・積分はもっと厳密にきっちり勉強する必要があることなどが上げられる。学生時代や新任教師の頃にベテラン教師によるこの様な指導を受ける機会が多くあれば、それだけ早く一人前の教師になっていけるわけで、今後ベテラン教師による指導が一層必要に、大切になってくる。筆者は問題23の〝離散型と連続型の確率分布の定義のちがい〟について同僚の先生から学んだのは先日の事であり，こ

の調査問題のいくつかは以前に学んだものである。本校へ赴任して10数年、同僚の先生から問題点を指摘され、分からないところは教えられるといった毎日である。日常の教材研究の中に毎日の授業の中に分からない、明確でないといった問題点を多くかかえているのは筆者だけではないと思う。年令だけベテラン教師にならない為にも、毎日の日常活動の中で研修会を持って学習することの他に、早急に行政サイドで指導体制を作り上げることが必要であり、大切なことであると思う。

共同研究者　　石田三郎　上田外志夫　岡山正歩　能崎克巳（五十音順）