探究問題による学習について

上田外志夫

I．研究経過

このレポートは、下記8名による研究グループの成果を主とし、金沢大学付属高校数学科の研究成果を加味して、筆者が書き下ろしたものである。行列の指導目標については金沢大学付属高校数学科4名によって抽出されたものであり、教科書の検討の項は中村孝雄、行列の指導目標構造図は樋田忠雄が日本電気の佐藤隆博氏の手法を用いて作成したものをそのまま転記している。その他の文面については筆者が責任を負うべきものと考えている。研究グループのメンバーは筆者の他に以下のようである。

宮下英明（金沢大学教育学部）、樋田忠雄（石川県教育センター）、中村孝雄（金沢西高）
宮中和久（金沢西高）、高桑俊（野々市明倫校）、石田三郎（金沢大付高）、
岡島展子（金沢大付高）

この研究グループに「探究問題による学習」という用語が取り入れられたのは昭和52年からである。その後約8年経過しているが、その間に「探究問題」と関係のある研究を以下のように発表してきている。

（1）行列の指導について　　発表者　石田三郎（53年北陸四県羽咋大会）
（2）ベクトルの指導について　　発表者　高桑　俊（56年北陸四県黒部大会）
（3）探究問題によるベタトルの指導　　発表者　岡島展子（57年北陸四県金沢大会）
（4）代数・幾何における行列の指導　　発表者　樋田忠雄（58年北陸四県長岡大会）
（5）探究問題による行列の指導について　発表者　上田外志夫（59年日数教福井大会）

「探究問題」という用語の受けとめ方はこの会のメンバーの間でも差があり、時間の経過に従って変化して来ている。最初は、生徒のより積極的な学習と創造性の涵養をねらったものであったが、その後、探究問題のねらいが整備され、それに従った探究問題の開発が主な仕事であった。特に58年にはそのねらいの中に能力差に応ずるという一項が付加され、考え方も、かなり変容して来ている。最近ようやく宮下英明の指導により、心理学や学習理論の成果を取り入れて〝探究〟を学習活動として位置づけることや他の学習理論との相異点を明確にすること等がテーマとして取り入れられはじめたが、まだ成果を出すに至っていない。

II　授業の反省と教科書の限界

いつの時代にも学校教育に対する批判はあったにしても、校内暴力から大量の落ちこぼしまで、今日程声高に言われることは少ない。現在の指導要領もその対策としてゆとりを標榜し、各教室でも色々な努力がなされているに相異ない。どこかに、落ちこぼしを作らないすばらしい授業があるのかも知れない。しかし、現在の教育界にはそれが全体に伝わらない体質がある。教師一人一人が、教材分析や指導法を各人で切り開いて行かざるをえないのが現状である。その為に、各数学教師の持つ指導法にどのような長所があり欠陥があるのか、まして世間一般の数学の授業にどのような反省を加えねばならないのかなどについては、俗に言われることから予想する他はない。研究グループのメンバーが自分の授業や、各人が見ることのできる狭い範囲をもとに出された反省点のうち確実とされたものを列挙すると次のようになる。

(1)　俗に「教科書を教える」「教科書で教える」の相異について言われるが、現状は教科

書に牛耳られた授業が多いのではないか。特に同じ範囲を何人もの教師で担当せざるをえない大きな学校ではテストが同一のことが多く、特にその傾向が強いと思われる。

(2) 教科書や問題集の問題の解答を分りやすく説明して、授業では分ったような気持ちにさせ、それで終り、という形の授業が多いのではないか。そこには「強化」に対する配慮、「技能定着」のための努力が欠けていることが多い。

(3) 授業中における生徒の思考状況の把握（評価）の技術が全体的に不十分なのではないか。生徒全体に思いを馳せると、生徒の思考が教師の話しのペースについていけない状況は、常に起こっていると言ってもよいのではないか。皆無にすることは無理とは思うが、まだまだへらす努力をしなければならないと思われる。原因は、教師達が過去に受けた講義がそのような形のものであったために、それが普通であるとの思い込みによるものと思われる。

(4) たとえトップレベルの生徒を集めたクラスでの授業であっても、落ちこぼしは必ず作られていると言っても言いすぎではないであろう。しかし、クラスの最下層に合わせた授業が生徒全体としてみれば非能率的なものにならざるを得ないとすれば、それも仕方のないことなのかもしれない。ところが、現実には、熱心さのあまりではあろうが、妥当なレベルよりも高い授業を行なって、ほんの一握りの数学気狂いと大量の落ちこぼしを作っているようなこともよくあることのように思われる。妥当なレベルを適確に把握する能力を持つようつとめ、能力差に対応できる指導法を工夫する余地は十分ある。

(5) 大学進学希望者の多い高校でみられることであるが、問題の解法のパターンを覚えさせ、大学入試問題をその型にはめて解くことを強要するという指導法がある。その結果、学習が暗記中心になり、定理や公式にあてはめることしか考えない学習習慣がついてしまい、かえって頭脳の硬直化をまねくことになる。しかし、このような指導法は大学入試対策としては確かに効果を上げているように思われるので、現実には必要悪であって、否定してしまうことはできないように思われる。能力以上の教材を指導するときの指導法として位置づけられる可能性さえある。

つぎに、生徒用教材の持つ問題点について考える。現在、使用されている生徒用教材として考えられるものは（ア）教科書（イ）問題集（ウ）受験参考書（エ）受験産業から出される添削問題や月刊紙（オ）教師の作成したプリント　等を上げることができるが、（ウ）（エ）は生徒が家庭で自習するために使われることが大部分で（オ）についてはその実態を把握することは困難である。天下の趨勢は（ア）（イ）のみといえると思う。（イ）については編集方針は大同小異とは言え、レベルについては各種あって、かなり選択の余地はある。ただ、教科書の進度とフィットさせるのに、かなりの労力を必要とする。生徒の能力に照らし適度の練習量を決定することは教師の日常の課題である。このように（イ）について研究すべき点は多々あるにしても、それは補助的なものであって、我々にとって特に必要なことは生徒用教材の中核である教科書についての認識を深めることであろう。このグループが上げた教科書の持つ限界はつぎのようであった。

（1） 教科書は高校生の平均レベルを考慮して作られている。対象生徒に応じて例題等の扱い方を変えることによってかなりの柔軟性を持たせることができるにしても、すべての高校生に適したレベルの教科書は作れるはずがない。

（2） 技能定着、応用力養成のための練習問題は明らかに不足している。このことは、大部分の教室で問題集が使用されていることが証拠立てている。

（3） 価格やページ数が制限されているために、筆者が望んでも割愛せざるをえないことや

一つの文章で２つ以上の役割を果たさねばならないことが起こってくる。たとえば、例題の解答として書かれたものは、その例題の模範解答の役割と、その問題内容を理解させるための文章の２つの役割をさせている場合が多い。明らかにこの２種の文章は異なったものであるはずである。一つの問題を多方面から検討した結果を書き上げることは、教科書では不可能に近いと思われる。

（４）　教科書にはある程度の体裁が必要で、生徒の思考順序にそって書く訳にはいかない。例題を生徒に考えさせたとき、大部分の生徒がまず気付くことが、解答の最初に書かれているとはかぎらない。解法を十分に理解した上で、その内容を文章にすることを考え、十分検討した結果が教科書に書かれているのだということをはっきり意識して使用しなければならない。例題の解答を一行一行理由を説明しながら解答するという授業は生徒の思考順序を無視したやり方と言わざるをえない。

（５）　教科書の体裁から考えて、例題のうち、基本的なものと応用的なものを区別して書くことは大変難しい。例題の、全体の中での位置を見極めた扱いが必要である。

III　研究の目的

教師が教材の自主編成能力を持たねばならないことは前項でその理由を述べるまでもなく明白なことであるが、我々の研究目的は、自主編成にあたって参考となるような「教材構成の手順と授業展開の一つの型を作る」ことにある。我々にとって、プログラム学習や発見学習のような学習理論を作ることは主目的ではない。この型を作るにあたってまず第１に、実務的であることを大切にしたいと思っている。作りあげようとする型が理論的に正しいことを立証することなどは二義的である。従って我々の主張が正しいことを立証するために、教師に過大な労力を要求するような型を作ることは我々の主旨に反する。でき得れば、生徒用教材があれば新任の教師でもその型にそって授業展開ができるものでありたい。次に、すべての教材に適した指導法が存在するとは、考えてはいないということである。最初からその本質を考えさせながら発見学習的に結果を抽出させ、そこに必要な技能を後で練習させる方が適当な場面もあれば、まず暗記をさせてから後で十分な期間をおいてその意味を考えさせることが適当な場面もある。以前、ベクトルの指導において、内積の指導を最初からその意味を前面に押し出しながら、我々の型にそって指導を試み、何通りかの展開をしてみたが、どれも成功しなかったという事例がある。この内容は、天下りに与えてある程度のことが出来るようになってからその本質を考えさせるべき教材であるという意見の方が我々グループの中では今では強い。我々が作成しようとしている指導法は、数学の学問体系の基本的な部分を指導するときに適した型であることをねらっている。この指導法に対して我々は「探究問題による学習」と名付けたのである。今だに不十分なものであるが、このレポートで力を注いだのは以下の点である。

（１）探究的な問題解決の過程を分析すること

（２）「探究問題による学習」の特徴を明らかにすること

（３）「探究問題による学習」に適した場面を抽出するための基準を作ること。

（４）具体的な「探究問題」の開発。

（５）授業展開時における必要な条件を考えること。

Ⅳ　数学における探究的問題解決過程

フランセン（A. N. Frandsen）は一般的な問題解決過程をつぎのように分析している。

（１）問題を感ずる。（２）問題を構造化する。（３）仮の解決（複数）を出す。（４）仮の解決を吟味する。（５）もっとも妥当と思われる解決を検証する。（６）結論を一般化し、定化する。（７）一般化したものを新しい問題解決活動へ拡張する。

これらの過程の妥当性は、社会科学等も含めた問題解決事態での一般的な解決過程として首肯できるものであるが、数学の学問体系の基本的な部分に横たわる問題の解決過程に限定すれば、さらに精密な分析が可能である。さらに、上記過程の（１）問題を感ずる。の部分は捨てがたい面もあるが、学習をより確実なものとするために当面は我々の研究目標からはずすことにする。すなわち、生徒の側で問題点を把握して問題を作っていくのではなくて、１つの章の学習目標が与えられ、その一部としての節の学習目標が与えられ、さらにその一部としての主問題が与えられた時点で、それから後,学習者はどのような過程をたどって学習していくのが望ましいかを分析しようというのである。行列の指導を例にとって今迄の内容を説明してみよう。章の学習問題としては、「いくつかのベクトルの成分が、他のベクトルの成分の１次結合として与えられているとき、その式によってある集合（ベクトル空間）から、ある集合（ベクトル空間）への１つの写像が定まる。この写像の研究が行列の学習である。」といった主旨の学習目標が分りやすく、学習意欲を高める形で与えられたとする。つぎに、その一部である節の学習目標として、「座標平面内にあるどんな図形（言葉で与えられた場合でも、x，yの方程式や不等式で与えられた場合でも、ベクトル方程式で与えられた場合でも）が、一次変換によってどんな図形にうつるかを学習する。」が与えられ、さらに主問題として

「行列 $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ で表される一次変換によって、$y=-x+2$　$(-1\leqq x\leqq 5)$　で表される線分は、どんな図形にうつされるか。」が与えられたとき、その段階を出発点として考えるのである。それから後の問題解決過程を段階を追って考えてみる。

第１段階。問題文を読み、題意を把握する。

「題意を把握する。」ときの活動は多様である。その内容を細分するとつぎのようになろう。（１）用語の定義を確認する。（２）仮定と結論に分ける。（３）具体的な数値で題意を確かめる。（４）題意を図で表す。（５）変量を取り出す。

上の行列の主問題を例にとると、（１）は一次変換とは何であったかを確認することであり、２次の正方行列によって表される変換は、座標平面上の点（x，y）から、座標平面上の点（x'，y'）への写像であること、点（x，y）が与えられた線分上を動いたときに像がどう動くかを考えているのだと把握するのが（５）の活動であり、与えられたものは変換と線分であり、求めるものはその像であるとはっきり意識するのが（２）であり、座標平面上の具体的な点を与えられた変換で実際にうつしてみることが（３）で、与えられた線分や、（３）の作業の結果を座標平面に描いてみることが（４）に相当する。

第２段階。解法の方針を立てるための探求活動をし、その方針でよいことを検証する。

この段階を一般的に論じ、すべてを網羅することは大変難しい。直観的具体性を持ち、その具体性が探求活動をひきおこしやすい場面を選び、問題化したものを主問題とする。選ばれた段階ですでにどんな活動が探究活動になるのか、が決定されているのである。まだまだ不十分と感じられるが、この段階の分析は以下のようになった。

（１）　問題解決に必要な既習事項を整理する。（レディネスを確認する。）

（２）　解の予想を立てたり、解法を探ったりする。(具体的には次のいずれかの活動である。)

a．与えられた変量の変域や条件の真理集合の中から具体的な要素を取り出し、題意どおりの操作をして、結論にある変量の変域に含まれる具体的な要素を求めたり、結論の条件にあてはまるかどうかを確かめる。

b．結論にある変量の変域の中にある要素や、外にある要素を取り出し、問題に与えられた操作の逆の操作をすることによって、求められた要素が仮定をみたしているかどうかを確かめる。

c．仮定の一部を抜いたり変更したりして、解や結論がどう変わるかを調べる。

d．図示された図の各部分の関係を調べる。

e．与えられた量を小さくしたり、変数を定数に変えたりして、主問題を簡単な問題に変えて考える。

f．主問題の解法によく似た既習の問題の解法と照合する。

（３）　予想された方針に従って進めば目的を達成できるかどうかを確かめ、方針に従って行っていることが、論理的に正しいかどうかを検討する。（解法の検討）

行列の主問題に対する（１）の活動は、与えられた線分をx，yについての方程式、不等式で表すことができるか、ベクトル方程式で表すことができるか、一次変換によるある点の像、原像を求めることができるかを確かめることである。（２）a～fの項目はこの順にすべてを考えるという意味ではなく、主問題によってa～fのうちのいくつかの適した活動が選ばれるということである。例としてあげた行列の主問題に対しては、a、b特にbが重要である。aは与えられた線分の端点や、線分上の点をこの変換でうつしてみて、答がある点を端点とする線分であることを予想し、bは、具体的な点を選んで、その点の変換による原像を求めて、それが与えられた線分上にあるかどうかを調べることに相当する。$a_{n+1}=pa_n+q$なる形の漸化式から、一般項を求めるいくつかの方法を抽出し、それを各種の漸化式から一般項を求めるための方法に高めるという学習目標に対しては、a_1からa_5位まで求めてみて一般項の形を予想する活動はaに相当し、$y=x$、$y=px+q$　のグラフを用いて数列｛a_n｝の動きを見ることによって解法を見つける探究活動はdに相当する。行列の主問題の解法の１つは、与えられた値域の任意の要素（x'，y'）の原像（x，y）のx，yをx'，y'で表わし、それを線分を表す式に代入することであるが、その結果得られた方程式や不等式が確かに求める像を表す式になっていることを確かめることが（３）の内容である。

第３段階。論理を整備し、文案を考えて、答案を作成する。

解を出した手順に従って文章化し、余分な回り道をしていないか、論理的な文章にするための書き順を考え（解を出す手順と同じ順序でないことも多い）、使用した文字のことわりや、使用した定理の仮定をみたしていることが記述されているか等を考慮して答案を作成する。作成された答案の各行から次の行へうつる理由を考え、論理的に正しいか、飛躍がないかを検討する。この段階で模範答案が与えられるが、それと自分のものとを比較し、長所短所を考える。

第４段階。解法の理論が分っているかどうかを評価する。

主問題の解法の手順の荒筋について説明できるかどうかを確かめ、主問題の仮定に与えられたものを、それに近いものにおきかえた問題の解答の答案を作成させてみて、解法が理解されているかを確かめる。例においては、線分を他の線分に、変換を他の正則な変換におきかえた問題を解くことに相当する。

第５段階。獲得した知識、技法を発展させる。

例として上げた行列の主問題で獲得した解決方法を一般化することを考える。まず与えられた線分を他の図形におきかえても、また与えられた変換を別の変換におきかえても、この方法

で解を得るに至るかを考えさせる。その結果、図形がx，yの方程式や不等式で与えられるかいくつかのベクトルの一次結合（変数を係数に持つ）で表されているものなら、可能であること。x，yの式で表された場合の解答は変換が正則でなければならないこと等に気付き、正則でない場合の解法を知りたい欲求も生じてくるであろう。これを一般化して述べれば次のようになる。

（1） 問題に与えられた数、図形、写像、等がどんな場合にその技法が通用するかを調べることによって適用範囲までが明確にされた技法に高められる。

（2） ある技法が適用できない場合を把握し、新しい研究問題を獲得する。それが解決され別の技法が獲得されれば、2つの技法が対となって、より高い立場から技法を構造化して把握することになる。

（3） 技法の適用範囲が明確になれば、その適用範囲を一般的に表現して、答案を一般化された形で把握する。

（3）は、図形の方程式を $f(x, y)=0$ とし行列を $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ と表した場合の答案のことをさす。主問題は原像と変換が与えられ、像を求める問題であったが、同じ技法で変換と像が与えられたとき原像を求めること、像と原像が与えられたとき変換を求めることができないかを考えること、変換を座標空間から座標空間への変換にかえたり、実数から実数への関数に変えたりしても解けるかを考えることもできよう。また、原像に平行な直線群を選べば、像や原像を求める問題にとどまらず、一次変換そのものの研究に入り込むことにもなろう。すなわち、

（4） 仮定と結論の一部を入れかえて考えることによって、ある技法の適用方法に幅を持たせる。技法に含まれる操作の可逆性や、条件の必要十分性を検討する。

（5） 技法の適用範囲を拡大して考えることによって、技法そのものの拡大をはかる。

（6） ある技法を組織的に使用することによって、技法そのものの一般化にとどまらず、研究対象の本質に迫る。

（7） 章や節の学習目標と照合して、主問題に要求されたものが学習目標のどの位置にあたるか、学問体系の中のどの位置にあるかを、これまでの既習内容も合わせ考えて把握する。この活動は以後の学習内容や指針を与え、新しい問題意識を持つことにもなる。

第6段階。技能の定着と、応用力の養成

ある技法を定着させるために必要な練習量は練習問題の量のみで定まるのではない。どんな程度に一般化して把握できたかなど理解の深さにも関係するであろうし、常に記憶しようとしながら学習するかどうかなどの学習態度にも関係する。第1段階から第5段階の間にもかなりの練習をすることにもなろうが、第5段階終了後、またはある程度の時間が経過した後に、計画的になされなければならない。

以上、探究的問題解決過程を6段階に分けて述べてきたが、分析はまだまだ不十分であり、今後大きく変わることにもなると思う。特に、第2段階、第5段階は明らかにさらにいくつかの段階に分割し得る。しかしながら、各段階を探究問題作成のための基準として使用しようとするとき、細分化はかえって使いにくいものになると考えている。

Ⅴ．「探究問題」の構造

「探究問題」とは何か、という問に対して一言で答えるならば、「数学における探究的問題解決過程をふまえて作成された、いくつかの問題を組織化したもの。」であるといえる。前項で述べた各段階の小項目の1つ1つに対応する問題は、作ろうと思えば作れるということは、前項の例示で分ると思うが、それらすべてを生徒に要求することは適当ではない。要求される

問題の多さに学習意欲を失ってしまうであろうことは、容易に予想できることであり、無駄も多い。生徒の労力を勘案して、題意把握、探究活動、発展の各段階を特に重視して適当なレベルのものを適量だけ選ぶことがポイントとなろう。教師の目から主問題を眺め、発展の段階の小項目と照合して一般化の可能性を考えた場合と、生徒の学力による一般化の程度の間には大差がある。ここまでは発展させたいという線の見極めと、発展させることを考えるという態度の養成を大切にしなければならないと思う。前項で用いた問題を材料にして、「探究問題」の構成を例示する。以下の体裁は生徒用教材のものである。

探究問題

主問題「行例 $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ で表わされる一次変換によって、$y=-x+2$ $(-1 \leqq x \leqq 5)$ で表される線分は、どんな図形にうつされるか。」

（題意）1．与えられた変換の定義域と値域を言え。

2．与えられた線分を座標平面上に描け。

3．つぎの点を与えられた変換でうつし、その結果を図示せよ。

$(1,\ 0)$　$(-1,\ 3)$　$(5,\ -3)$　$(4,\ -4)$

（探究）1．線分上にいくつかの点を取って、その点を変換でうつし、結果を図示して、求める図形が何であるかを予想しなさい。

2．つぎの点にうつってくるもとの点を求め、その点が与えられた線分を表す式を満たすかどうかをたしかめ、解答の方針を立てなさい。

$(4,\ 2)$、$(10,\ 20)$、$(6,\ 7)$、$(a,\ b)$

（この部分に主問題の答案をかく。）

（発展）1．与えられた変換によって、つぎの式で与えられた図形は、どんな図形にうつるか。また、与えられた図形と求めた図形を描きなさい。

（ア）　$y=2x-1$　$(0 \leqq x \leqq 4)$

（イ）　$-1 \leqq x+y \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq 3$

（ウ）　$y>x,\ y \leqq 2x,\ x+y \leqq 3$

2．どのような一次変換が与えられても、解答の方針で解くことができるか、を検討しなさい。

3．与えられた変換によって、$y=x+1$ にうつってくるもとの図形を求めることができるか。（この問の学習は後にあらためて取り上げる。）

4．節の学習目標と照合して、今後考えたい問題を作りなさい。

探究問題は主問題を別にして形式として三段階に分けられているが、実際に解いてみると分るように、（題意）の中には既に解法を探す活動も要求していると思われる面もあり、レディネスの調査をしていると思われる部分もある。（発展）の1（ア）には、意識して評価のための問題を入れてある。（発展）1は、技能定着の役割をはたしていることも明白であろう。このような混在は、教師や研究者にとっては問題であろうが、生徒にとっては忌避する理由はないと思う。大切なことは、教師がそれをふまえていることと、生徒が三段階を考えたと自覚することである。探究的問題解決過程の詳細の把握は教師の役割であり、生徒は、学習目標の把握、題意の把握、探究活動、発展について考えることが大切であるということが分ればよい。
「探究問題」に対するもう1つの疑問は多分、主問題を見ただけで解ける生徒が、（題意）、（探究）の段階を経るのは時間の無駄ではないのか、という点であろう。この疑問に対しては解法を知っている者でも理解が不十分な場合も多く、理解している者にとってもこの段階の持

つ具体性が能力に応じた効果をもたらすはずであるという理由から、全員にやらせたいと主張するものである。しかし、問題の中には、ある者にとっては不要と考えられることもあるので問題番号に○印でも打って区別した方がよい場合もあろう。

Ⅵ　指導計画全体の中での「探究問題による学習」の位置づけ

生徒用教材の構成と作成の手順を追うことによって、我々が「探究問題による学習」と名づけた指導法が、指導計画全体の中でどう位置づけられるかを考える。

1．指導内容（学習目標）の抽出とその構造化

教師の勘であってもよいが、何らかの方法で、1つの章の指導内容の全体像を把握する。全体像には、次の4点が明らかになっていることが必要である。

ア　指導順序を決定するための方針が明確になっていること。

イ　章をいくつかの節に分けるために、指導内容のブロック分けができていること。

ウ　難易、重要度を考慮して、すべての生徒に分らせたい部分と、できれば指導したい部分が明確になっていること。

エ　章の中での節の指導順序、節の中での各項目の指導順序が考慮され、構造化されていること。

我々の研究グループでは、アの方針作成のために、教科書の指導順序を調査し（参考1）、今迄の指導経験をもとに、指導内容の選択、指導順序の決定の方針を次のように定めた。

①　既習の平行移動、対称移動、拡大を変換の眼で眺めなおして導入とする。

②　実態は算術計算でしかない行列の計算のみを目的とした節は作らない。線形性を重視し、演算の必然性を分らせるようにする。

③　行列を直観的に理解するために、行列を変換としてとらえることを重視する。

④　変換を図形的に把握するためには、固有ベクトルが大きな武器となるので、この学習を重視する。

⑤　2行2列以外の行列でも通用する手法を重視する。

⑥　各節をなるべく独立させて、単独でも利用できるようにする。

教科書等を参考にして抽出した指導内容をKJ法によってブロックに分け、金沢大学付属高校生徒を対象に考えて、すべての生徒に理解させたい内容には記号Aを、できれば指導したい内容には記号Cをつけた。その結果は（参考2）として後にのせてある。指導内容の構造化には、ISM教材構造化法（参考3）を用いて、指導目標構造図（参考4）としてまとめてある。

2，「探究問題による学習」の場面の選択と「主問題」「基本例題」の作成

一つの節の指導内容のうち、基礎的、基本的な部分（記号Aが付加された学習目標）が習得できたかどうかは、選ばれたいくつかの問題の解答が作れるようになったかどうかで判断することにする。これらのいくつかの問題を目標問題とよぶことにしよう。これらの各目標問題を解決する過程をつぎのように図式化する。

目標問題の提示 → 生徒の内的行動 → 生徒の表に現れた行動 → 行動の結果

行動の結果（答案等）が望ましいものであるためには、生徒の内的行動や、表に現われた行動がどうあるべきかを分析し、それらの行動のうち、この節で獲得すべきものを抽き出す。この作業をすべての目標問題に対して行うと、抽き出された行動の数はそう多くはないはずであり、別の行動として把握されたものでも、その間には共通な部分があるに相異ない。そうならなければ、指導目標のブロック分けの失敗であって、節の構成を変える必要がある。このよう

にして抽出された行動のうち、共通で基本的な行動をひき起こすような問題（複数でもよい）を作成し、その他の目標をひき起こすような問題は（発展）の段階に位置づけるようにする。さらに、作成された問題が、以下に掲げる条件の主要な部分を満たしているとき「探究問題」の主問題とし、そうでない場合は「基本例題」とするのである。

探究問題の主問題であるための条件

（１）探究活動をひきおこしやすい問題であること。すなわち、このレポートの第Ⅳ項、第二段階で述べたａ～ｅまでの活動と照合して（探究）の段階に相当する問題を考えうるものであること。

（２）問題に要求されている行動や、探究活動が、具体的なものによってイメージ化、図式化ができるものであるか、サンプルによってその本質を見破り理解することができるものであること。

（３）問題に要求している内容が、学習している数学体系の中で基礎的、基本的な役割をはたしているものであること。また、その結果として応用範囲が広く、他の場面の基礎となりうるものであり、（発展）の段階の問題によって、真に学問的な認識に高めることのできるはずのものであること。

（４）難易が適切であり、スローラーナーにも主要部分の行動が獲得できて、能力ある生徒にとっても、少なくとも（発展）の段階で問題として価値あるものであること。

（５）問題の解決が、目標としている方法以外で解決されてもよいが、獲得すべき方法によった方が煩雑でなく、自然であること。

３．主問題の模範答案までの作成

まず、主問題の模範答案の作成をする。そのときの教師自身の考えていく過程を内観しながら、題意把握のための活動、探究活動をひき起こすための問題を作成し、適量を選んで、（題意）、（探究）、模範答案、までの段階を完成する。

４．（発展）の段階

答案の作成の段階までに獲得された知識・技能の発展・一般化を検討すると、記号Ａを付けた指導項目にあたるものばかりでなく、記号Ｂ、Ｃが付けられた指導項目と関係する問題も作成されるであろう。一般化の方向が自然であれば、どの記号がつけられた指導項目と関係した問題であっても採用するが、記号Ｂ、Ｃをつけられた指導項目のものに対しては、その後あらためて取り上げることを明示しておく。この段階では、技能定着のための問題や評価のための問題も入れてもよいが、記号Ａをつけた内容にとどめる。以前使用した目標問題もこの中に取り上げてもよい。

５．記号Ａをつけられた指導項目の教材化の完成

主問題と（発展）の段階の学習によって獲得した重要事項は、「定理」または「まとめ」として整理される。知識・技能の強化・定着のための問題も作成し、本文中の間や練習問題として取り上げる。以上の作業からもれた、記号Ａをつけられた指導内容があれば、適当な指導法を考慮して、「基本例題」や場合によっては、別の「探究問題」とする。

６．記号Ｂ、Ｃをつけられた指導項目の教材化

高いレベルの指導内容であっても、「探究問題による学習」に適したものも多いはずである。これらは　「例題」として提示されるが、それらにも必要に応じて（題意）、（探究）、（発展）、の段階の問題を付け加える。内容によっては「定理一証明」の形でよいもの、説明文ですむもの、場合によっては、練習問題として取り入れてすますものもあろう。

このようにして準備された教材を、「探究問題」、「基本例題」も含めて、目標構造図をも

とに相互の関連をにらみながら有機的に配列する。

7．導入の作成

教材配列が終った段階で、導入となる文を作成する。各節の学習内容の俯瞰図をあらかじめ与え、これからの学習を見通せるようにすること、学習内容の価値、歴史等を与えて学習意欲の高揚と学習の必要性を認識させることが目的である。さらに、各節の導入をまとめた章の導入も作成する。

各節の構成は、おおむね次の形式である。

§ 節の名称

1 文章 ①

主問題 ②
（題意）
（探究）
主問題の解答例
（発展）
定理またはまとめ

基本例題 ③
解答例
定理またはまとめ

例題 ④
（題意）
（探究）
例題の解答例
（発展）
定理またはまとめ

⋮

上の枠の繰り返し

⋮

練習問題 ⑤

- ◦ ①の部分は導入のための文と、次の探究問題の節の中での位置づけを行う文である。
- ◦ ②の部分の教材開発と指導法の研究が我々のグループの当面の研究課題である。
- ◦ 節によっては、②の部分が作れないことも、2つ以上あることもあるが、②、③のいずれかは必ずある。
- ◦ 記号Aのつけられた指導内容は②③と⑤の一部であって、⑤では、問題にA、B、Cのランクがつけられたうちのに相当する。
- ◦ ②、③、④の間には、必要に応じて問題の間の関連を説明する文章等が入れられるが、ないことも多い。
- ◦ ④における各段階は、必要があれば作成するが、解答例だけの場合も多い。
- ◦ 基本例題や、各段階が省略された例題には、理解を深めたり、自己評価や練習のために、問が必要に応じて追加される。
- ◦ 例題は時には、指導をしないですますこともある。
- ◦ 用語の定義や、定義の意味を考えるための問は、その用語を必要とする場面に近い場所に挿入する。

Ⅶ 「探究問題による学習」のめざす所と特徴

高校3年間の生徒の論理的能力の成長には目を見張るものがある。共に未習の同じ教材（例えば対称式・交代式）を1年と3年に指導して、その相異に驚いたことがある。そのような中で、一人一人の学習状況を観察すると、あまり勉強をしていないようでも確実に力をつけている者から、文学的な文章を書かせれば一流であるのに数学の答案の文章となると辻褄の合わないことを書く者までさまざまである。とくに、多くの生徒が理解よりも記憶に頼った学習をし、数学の苦手な者程、当てはまらない所にまで、何かある規則を当てはめようとしているような

場面をよく見る。私はこの現象を、生徒の反撥現象ととらえている。

生徒は、強要される学習量が多すぎたり、難しすぎたりすると、テストのために自分なりの対策を立てる。その対策が記憶に頼ることなのだと思う。記憶に頼った学習をすると、その個所を本当に理解したわけではないので、それが積重なっていくと分らない部分がどんどん増え、さらにまた記憶に頼らざるを得ない。たとえ指導内容が少くなったとしても、少い学習量で力をつけていくような学習方法にひき戻させたいというのが、この指導法の第一に目差すところである。

「探究問題による学習」と名付けた我々の指導法は、この名前の故に、発見学習や探究学習のように、制御の弱い指導法であると思われるかもしれないが、この指導法は、生徒自身に考えるべき問題の選択を許さないこと、解法を見出すために最も有力と思われる活動を指示し、試行錯誤を要求しないこと、発展の段階にもレールを敷いてしまうことなどから、かなり制御の強い指導法であると思う。我々の意図は、数学の学習に最も適切と思われる探究的問題解決過程を何度も経験することによって、生徒の学習方法を探究的なものに変えていくことができるのではないか、ということに尽きるのである。さらに細かく考えるとつぎのようになる。

ある概念が分った、という気持ちになるには、その概念より具体的な下位概念に裏打ちされて初めて可能で、具体的サンプルが豊富であればある程、理解は深まる。特に、題意把握、探究活動の段階で、具体的で直観的なサンプルを与えることを重視している。

行列という領域は、現在の指導内容の中で、生徒にかなり人気のあるもので、その理由は、行列の計算ができることにあるらしい。行列の計算は実質は算術計算であり、計算は面白いものとも思えないが、生徒にとって「できる」、「分る」ということが、我々教師が考える以上の意味をもつようである。探究活動を要求しながら、主問題の解答例を生徒用教材にのせるのはおかしいと考えられる方もあろうが、理解の不十分な生徒であっても、それを手本にして、類題の解答を作成できるようにしたい。理解が不十分であっても「できた」という気にさせたい、というねらいがあるからである。いいかえれば、理解の程度と生徒の能力差とをフィットさせたい。もっと言えば、理解が不十分でも、全然やらないよりはよい、という能力差に対応したという願いが込められているのである。

学習目標の主なものが問題の形で提示されていることは、目標を把握しやすくすることにつながり、授業の導入も容易で、予習をしやすくもしているのではないかと思う。

群論、ベクトル空間（公理的展開のもの）、論理学、いずれも抽象的な分野であり、初めてこのいずれかを学習するとき、いずれも手強い相手であろう。このいずれかを学んだ後、もう一つに挑戦するとき、最初と比べ、分り方がはやくなっているのに気付く。生徒が問題集を解くとき、最初の章の学習には随分時間が必要であったが、次の章からは前章より早く解いて行くことを見ることがある。このような転移は、記憶中心の学習に特徴的に見られる「答が出た」ということで満足して、意味や意図、発展性まで考えが及ばない、といった状況からは期待できないと思う。生徒自身、このレベルの問題を自力で解けるようにしたい、抽象的なことに慣れたい。などの一般的な目標を自覚し、一般化のしかた、学習の方法、態度をも学んで、はじめて転移が可能となると思う。問題の解答を作成した段階で、この問題の学習は半分終了で、それからが最も価値ある勉強に入るのだと指導して行きたいと思う。

Ⅷ　指導の展開時における条件

この指導法による授業が良いものになるかどうかは、大部分は生徒用教材のでき如何にかかっている。生徒にあったものになっていれば、各段階にある問題の解答や説明を、生徒の思考スーペに合せて行っていけば、それ相応の成果を上げることができると思う。いや、そうなる

ように作らねばならないと主張しているのである。勿論、作成されたものは、あるレベルを保持することになるので、すべての高校生に合ったものは、作れるはずがないのであるが、基本的な部分、即ち、探究問題と基本例題にかける時間の調節と、発展段階の調節、例題のうちどれを省くか、等で、対象とできる生徒の範囲を、かなり広げることができると思っている。

最低必ず指導すべき部分を再掲すれば、導入、研究問題の主問題の（題意）、（探究）、とその答案、（発展）の段階の評価用の問題と記号Ａのつけられた指導項目の問題、基本例題、以上の結果から生れた「定理」と「まとめ」、さらに練習問題Ａである。

授業の展開は上記のように、まず生徒用教材の中から、生徒のレベルに合せて省くものを決定した後、教材の順にそって説明して行けばよいのであるが、生徒各人がどんな程度に理解しているかを教師が把握する工夫について特に考えておかなければならない。授業中の生徒の反応で分ることも多いが、評価問題を宿題にして提出させるとか、授業中に主問題を解かせ、机間巡視をして、特にスローラーナーのでき工合をチェックする、など全員を睨んだ評価を計画しておく必要がある。これらを含めて、望ましい条件を列記する。

1．全員を睨んだ評価計画を各探究問題について立て、実行する。
2．探究問題は生徒各人のペースで考える時間を必ず与える。宿題にせざるをえないこともあろうが、なるべく授業中に解かせ、その様子を観察したい。
3．解法を授業中に教師と生徒の受け答えで抽き出すことにこだわる必要はない。かえって、一部能力ある生徒のみの発見学習になりかねない。解くことを指示して、机間巡視をし、生徒の観察と個人的にヒントを与えるようにした方がよい。
4．基本的な部分の指導には、余分と思われる位の時間をかけるつもりであたる。
5．解答例は、ある行から次の行へ移る理由などの細部検討と、解答の方針を把握するなどのマクロな目で見る場合など、２度以上考えさせた方がよい。テストなどで出題された場合の答案になっていることを言明する。
6．探究的問題解決過程の各段階を生徒に意識させるような言葉、例えば「題意をはっきりつかもう。」「この解答にどんな意味があるかを考えてみよう。」「これができたら主問題が分ったことになる。」などを与え、探究活動の形式を意識させるようにする。
7．節の指導が終った段階で、各問題の全体の中での位置付けを再認識させる。

Ⅸ　結語

「探究問題による学習」という用語がこのグループに取り入れられてから８年を経たが、これまでは、スローガンや長所短所の検討、教材構成の形式の検討はなされていたものの、一つの指導法としての体裁は整っていなかった。今度初めて今迄の成果を基礎に、筆者の独断でその骨格を作成したのがこのレポートである。教材構成の形式も、今迄のものとかなり変更したが、これがグループのものとして承認され、さらに精密なものに高められるための叩き台として取り上げられるかどうかは不明である。どちらにしても、今後さらに検討が必要であり、書き変えたものを以後何度も公表することになろう。今迄このグループで探究問題によるベクトル、行列の指導と題して生徒用教材を公表してきたが、もし筆者が変更した教材構成の形式が承認されれば、それらは全面改定しなければならないことになる。そうなれば、すぐ、その作業に取りかかるつもりでいる。なお、筆を起こしてから後にも、宮下英明、その他のグループの方々の示唆があり、このレポートの各所に生かされている。

（参考）

1．「代数・幾何」における「行列」の指導順序を表わす表

東→東京書籍、啓→啓林館、数→数研、旺→旺文社、学→学研、教→教育出版
第→第一学習社、大→大日本図書、校→学校図書、池→池田書店、実→実数出版
帝→帝司書院、三→三省堂、指→指導要領

(1)　「代数・幾何」の４項目配列順序

	指	東	啓	数	旺	学	教	第	大	校	池	実	帝	三
２　次　曲　線	1	1	4	4	1	3	1	2	1	4	1	1	1	4
平面上のベクトル	2	2	1	1	2	1	2	1	2	1	2	2	2	1
行　　　　列	3	3	3	2	3	2	4	3	4	3	3	4	4	2
空　間　図　形	4	4	2	3	4	4	3	4	3	2	4	3	3	3

指導要領の記述
◦行列
　ア、行列とその演算
　イ、逆行列
　ウ、一次変換と写像
〔用語・記号〕A^{-1}
アの行列の乗法については、２×２行列までを取り扱うものとする。

(2)　「行列」の内容配列順序

（枠内の数字は指導要序を示し、添字は各節の内部での指導順序を示す。
◦印は列題で、△印は練習問題で、＊印は発展でそれぞれ扱われている。）

内　　容	東	啓	数	旺	学	教	第	大	校	池	実	帝	三	備　考
行列の意味	1_1	1_2	1_2	1_1	1_2	1_1	1_1	1_1	1_1	1_1	1_1	1_1	1_2	
行ベクトル、列デクトル	1_2	1_{18}	1_1	2_4	1_1	1_2	2_4	1_2	1_2	1_2	1_2		1_1	
行列の相等	1_3	1_4	1_3	1_2	1_3	1_3	1_2	1_3	1_3	1_3	1_3	1_2		
加法減法の定義	2_1	2	2_1	2_1	2_1	2_1	2_1	2_1	2_1	2_1	2_1	2_1	5_1	零行列
加法の交換法則結合法則		2_3	2_2	2_2	2_2	$_2$	2_2		2_2	2_3	2_2	2_2	5_2	
行列の実数倍	2_1	2_1	2_3	2_3	2_3	2_2	2_3	2_2	2_3	2_2	2_3	2_3	6	
乗法の定義	3_1	4_1	3_1	3_1	3_1	3_1	3_1	3_1	3_1	3_1	4_2	3_1	4_4	
$A^2-(a+d)A+(ab-bc)E=0$	$3_{1\circ}$	$4_{3\circ}$	＊		$3_{3\triangle}$	$3_{3\triangle}$	$3_{2\circ}$		3_2	$3_{3\triangle}$		3_4		
乗法の 交換法則、結合法則	3_3	4_4	3_2	3_2	3_2	3_2	3_3	3_2	3_3	3_2	4_3	3_2	10_3	分配法則 単位行列

内　　容	東	啓	数	旺	学	教	第	大	校	池	実	帝	三	備　考
$A \neq 0$ $B \neq 0$の時 $AB=0$ となることがある	3_4	4_2	3_3	3_3	3_3	3_3	3_4	3_3	3_3	3_4	4_4	3_3		
逆　行　列　A^{-1}	4_1	5_1	4_1	4_1	4_1	4_1	4_1	4_1	4_1	4_1	5_1	4_1	9_1	
$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$	4_2		4_2	4_2△	4_2△	4_2	4_2○		4_2	4_2○		4_2	9_2	
$A\vec{X}=k\vec{X}$となるkと$\vec{X}$			★		★									個有値 固有ベクトル
連立二元一次方程式	4_3	5_3	4_3	4_3	4_3	4_3	4_3	4_2	4_3	4_3	5_2	4_3	9_3	
写　　像	7_3	3_1	5_1	9	7_1	9	8	9		5_1	8	5_1	2	逆写像 合成写像
一次変換とは	5_4	3_2	5_2	5_1	5_1	5_1	5_1	5_1	5_1	5_2	3_1	5_2	7_1	
点のx軸、y軸、原点に関する対称変換	5_1	3_4△	5_3△	5_2○	5_2○	5_2○	5_2	5_2	5_2	5_3	3_2	5_4	7_2	
点の直線 $y=x$ に関する対称変換	5_2	3_3○	5_4△	5_3○	5_3○	5_3○	5_3	5_3	5_3	5_4	3_3	5_5		
相　似　変　換		3_6	5_6	5_6	5_6		5_5	5_5		5_6	3_5	5_3		
恒　等　変　換		3_5	5_5	5_5	5_5	8_3		5_4	6_3	5_5	3_4			
回　転　移　動	5_3	7_1	6_1	8_1	6_1	6	5_4	5_5	8	8_1	6_1	7	7_3	
加　法　定　理	★	7_3△	6_2	8_3		★	★	8_2	★			★	10_2	
一次変換の合成	7_1	3_6	5_6	6_1	7_2	8_1	7_1	8_1	6_1	7_1	4_1	6_1	10_1	
逆　変　換	7_2	5_2	5_7	6_2	7_3	8_2	7_2	8_3	6_2	7_2	6_2	6_2	8_2	
一次変換による直線の像	6_1	6_2△	7_1○	7_1○	5_4	7_2	6	6_1	7	6_2	7	8_1	8_1	
線形性（用語アリ）	5_5		7_2				5_6	7				7	3	$f(k\vec{a}+l\vec{b})$ $=kf(\vec{a})+lf(\vec{b})$
〃　（用語ナシ）		6_1		5_5		7_1				6_1	3_5			
直線以外の図形の回転	5_2	7_2		8_2	6_2	7_3△		6_2○		8_2△		8_2		双曲線
群							★					★		
								掃出し法					一次写像	

2．「行列」の指導目標

（1）変換	◦既習の変換を言葉で表す（グラフの比較による）	A
	◦写像、変換の定義	A
	◦１対１、多対１、上への写像の定義	A
	◦既習の変換（平行移動、対称移動、拡大縮小）を式で表す	A
	◦ｙ＝ａｘ（ａは具体的な数）に関する対称移動を式で表す	B
	◦具体的な直線を基準それと垂直な方向への拡大を式で表す	B
	◦既習の変換が（A）の形の式でかけること、また、これは（B）の形の式で表される変換と平行移動との合成でかけること。 （A）$\begin{cases} X=ax+by+p \\ Y=cx+dy+q \end{cases}$ （B）$\begin{cases} X=ax+by \\ Y=cx+dy \end{cases}$	A
	◦一次変換の定義	A
	◦斉次性・加法性・線形性の定義	A
	◦一次変換が線形性をもつこと	A
	◦線形性を用いて点の像を求める	A
	◦線形変換は１次変換であることを証明する	B
（2）線形変換と行列	◦ｆ、ｇが線形変換ならｆ＋ｇ、ｍｆ、ｇ◦ｆが線形性を持つことの証明	A
	◦行列の定義・関連用語の定義	A
	◦ｆ＋ｇ、ｍｆ、ｇ◦ｆを表す行列を求める	A
	◦行列の和、実数倍、積の定義、等しいの定義	A
	◦１次変換を行列で表すこと	A
	◦行列で表された変換を行列を用いないで表すこと	A
	◦座標空間から座標平面、座標平面から座標空間への線形変換を式で表す。行列で表す。	B
	◦変換の合成可能の条件と行列の積の定義可能性	A
	◦線形でない変換の例示	B
（3）行列の演算	◦和、実数倍の計算	A
	◦和、実数倍の計算法則	A
	◦零行列、減法	A
	◦積の計算	A
	◦計算法則、結合、分配、可換でないこと	A
	◦単位行列	A
	◦逆行列	A
	◦正則性、零因子、determinant	A
	◦逆行列の性質　$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$	A
	◦行列を解として持つ簡単な方程式	A
	◦逆行列を用いて連立方程式を解く	A
（4）像と原像	◦点の像、点の原像を計算で求める	A
	◦線形性を用いた像・原像の作図	A

	◦逆変換も線形であること	A
	◦直線の像、直線の原像を求める	
	＊ $y=ax+b$ の像・原像	A
	＊ $t\vec{a}+\vec{b}$	A
	◦直線図形（半平面、角、平行四辺形、三角形）の像や原像を求める。（不等式で表されたもの）	A
	◦２次曲線の像や原像を求める。	B
	◦直線図形の像や原像を求める。（ベクトル方程式で表されたもの）	A
	◦転置行列の定義	B
	◦転置行列の性質 ${}^t(A+B)={}^tA+{}^tB$　${}^t(AB)={}^tB\,{}^tA$ ${}^tA^{-1}={}^t(A^{-1})$	B
	◦内積を用いて表された図形の像や原像	C
	◦像や原像の長さや面積	B
	◦像の面積と行列式との関係	B
	◦正則でない変換による像の検討	B
（５）変換の決定	◦基本ベクトルの像から変換を決定する。	A
	◦方向の異なる２つのベクトルの像から変換を決定	A
	◦直線の像が与えられたとき、行列の要素の間に成立する関係を求める。	A
	◦原点を通らない２直線の像から変換を決定	B
	◦対称移動、拡大等の具体的な変換をできるだけ簡単な方法でそれを表す行列を求める。	A
	◦正則な変換であるための必要十分条件 （$\det A=0$ ↔上への写像でない↔多対１の写像 ↔$A\vec{a}=\vec{0}$へ$\vec{a}\neq\vec{0}$なる$\vec{a}$の存在↔$A\vec{a}$と$A\vec{b}$が一次従属）	B
	◦２種の正則でない行列（$A^2\neq 0$の場合、$A^2=0$の場合で表された変換のうつり方の検討）	C
（６）不動点、不動直線	◦具体的な変換の不動点を求める。	A
	◦具体的な変換の不動直線を求める。	A
	◦変換によって方向を変えないベクトルを求める。	A
	◦固有方程式、固有値、固有ベクトルの定義	B
	◦固有値、固有ベクトルを求める	B
	◦固有ベクトルを用いて表された図形の像や原像	B
	◦不動点、不動直線を通らない不動直線を持つための条件	B
	◦α を固有値としたときの$A-\alpha E$で表される変換の移り方	C
	◦$(A-\alpha E)(A-\beta E)=0$の証明とケーレー・ハミルトンの公式	C
	◦ケーレー・ハミルトンの公式の要素計算による証明	A

	◦行列の対角比	B
	◦対角化の図形的意味	B
	◦行列の累乗	
	＊$A^n\vec{a}=\alpha^n\vec{a}$, $A^n\vec{b}=\beta^n\vec{b}$ を用いて	B
	＊$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \beta\end{pmatrix}$ を用いて	B
	＊ケーレー・ハミルトンの公式を用いて	B
	◦行列の累乗の応用	
	＊一般的なもの（食塩水の濃度、人口移動等）	B
	＊行列を項とする数列の和	C
	＊行列Ａの有理式をＡの１次式になおす	C
	◦固有値による行列の分類とそのうつり方	
	＊行列Ａの固有値・固有ベクトルとＡ＋ｋＥ、ｋＡの固有値と固有ベクトル	C
	＊０、１を固有値とする変換のうつり方と、０を重解とする変換のうつり方	C
	＊０を重解とする変換と他の重解をもつ場合の変換の関係	C
	＊０、１を固有値とする変換と、α、β を固有値とする変換との関係	C
（７）合同変換、相似変換	◦回転移動の行列を求める	A
	◦回転移動した図形の方程式を求める	A
	◦三角関数の加法定理の復習	A
	◦長さを変えない変換を表す行列のみたすべき条件	B
	◦合同変換は回転移動か対称移動しかないことの証明	B
	◦長さの比をかえない変換を表す行列のみたすべき条件	B
	◦合同変換であるための必要十分条件（長さを変えない。原点からの距離をかえない。内積をかえない。円を同じ半径の円にうつす　等）	B
	◦相似変換であるための必要十分条件	B
	◦等積変換であるための条件とその例	B
	◦直交行列の定義と、その転置行列との関係	C
（８）２次曲線の分類	◦回転移動された２次曲線の式を求める	A
	◦標準形に変形するために必要な回転角を求める	A
	◦対称行列の定義	B
	◦対称行列の固有ベクトルが直交することの証明	B
	◦対称行列の対角化	C
	◦ｘ、ｙの２次式を行列を用いて表すこと（２次形式）	C
	◦２次形式を用いて２次曲線を標準形になおすこと	C
	◦２次曲線の分類	C
	◦２次曲線の分類と無理関数の分類の対比	C
（９）行列の代数構造	◦行列を要素とする集合において	
	＊演算について閉じているか	B

	＊単位元、右単位元、左単位元	B
	＊逆元	B
	◦ある行列と交換可能な行列	B
	◦すべての行列と交換可能な行列	B
	◦同形の定義	C
	◦ $A^2=-A,\ A^2=-E,\ A^2=2E$ をみたすA	B
	◦ある行列を含み、演算に関して閉じた集合を作る	C
	◦色々な代数構造と同形な集合を行列の中からえらぶこと （複素数 {a ＋ b $\overline{\ _2}$ 1 a 、bは整数} ）	C

3．ＩＳＭ教材構造化法

（１）指導要素の抽出

① 変換	④ 像と原像	⑦ 合同変換・相似変換
② 線形変換と行列	⑤ 変換の決定	⑧ ２次曲線の分類
③ 行列の演算	⑥ 不動点と不動直線	⑨ 行列の代数構造

（２）指導要素間の上下の関連づけ

上位要素	⑨	⑧	⑦	⑥	⑤	④	③	②	①
	↑↑↑	↑↑	↑	↑	↑↑	↑↑	↑↑		
下位要素	③⑤⑦	③⑦	⑥	④	③⑥	①③	②①		

A＼B	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨
①			1	1					
②			1						
③				1	1			1	1
④						1			
⑤									1
⑥					1		1		
⑦								1	1
⑧									
⑨									

（直接マトリックス）

A　（下位要素）
B　（上位要素）

空所は　0
1　は直接上下関係のあるもの

（3）要素の階層的配列の決定

直接マトリックスをデータとしてグラフ理論に基づく演算（ブール演算）を行うと、全要素間の直接関係および間接関係を示す可到達マトリックスが得られる。（この手法はＩＳＭ教材構造化法という。日本電気・佐藤隆博氏による）

◎　電子計算機によるマトリックス作成

$$\begin{bmatrix} 1&0&1&1&0&0&0&0&0\\ 0&1&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&1&1&0&0&1&1\\ 0&0&0&1&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&0&0&1\\ 0&0&0&0&1&1&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&1&1&1\\ 0&0&0&0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&1 \end{bmatrix} = A$$

とおく

単位マトリックス

$$I = \begin{bmatrix} 1&0&0&\cdots\cdots&0\\ 0&1&0&\cdots\cdots&0\\ 0&0&1&\cdots\cdots&0\\ &&&&\\ 0&0&0&\cdots\cdots&1 \end{bmatrix}$$

とすると、ブール積

$$(A+1)^{K-1} \neq (A+1)^{K}$$

$$= (A+1)^{K+1} = M$$

M：可到達マトリックス

$$\begin{bmatrix} 1&0&1&1&2&2&2&2&2\\ 0&1&1&2&2&2&2&2&2\\ 0&0&1&1&1&2&2&1&1\\ 0&0&0&1&2&1&2&2&2\\ 0&0&0&0&1&0&0&0&1\\ 0&0&0&0&1&1&1&2&2\\ 0&0&0&0&0&0&1&1&1\\ 0&0&0&0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&1 \end{bmatrix} = M$$

可到達度マトリックスの要素（ｉ、ｊ）が２であるときは、ｉからｊへ何らかの関係が及ぶことを表わしている。

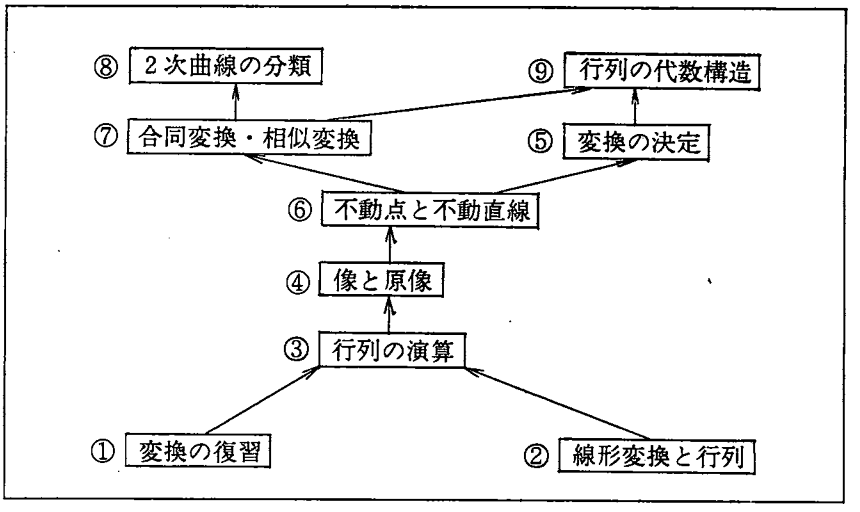
（4）要素の階層的配列

可到達マトリックスから更に要素の階層的配列をつくる。コンピュータでは、同じレベルならば番号の小さい順に印字するようにしてあるので、右のようになった。

8	9
5	7
6	
4	
3	
1	2

これを参考にして直接マトリックスをみながら、矢印を引いたのが次の図である。

（5）階層的有向グラフ（教材の全体構造）



（6）ＩＳＭ分析手法の特長

① 要素間の関連づけを行うだけでコンピュータによって効率よく階層構造図を得ることができる。

② 教師や教材作成者が持っている教材構造に関する意識をより具象化して示すことができる。

③ 構造化の過程において、教師や教材作成者などの経験に基づく直観や総合判断力など人間のもつ優れた特性を利用することができる。

④ この構造分析は、比較的どの教材でも適用することができる。

⑤ 基礎的、基本的学習内容の抽出が容易である。

⑥ 学習要素の系統化が明確になり、教材の精選・集約がはかりやすい。

⑦ 学習者に学習内容の構造を明確につかませることができる。

⑧ 教師間で教授・学習内容についての共通理解が得やすい。

⑨ 授業評価の時期や内容が検討しやすい。

4．変換指導のための構造図