# 「新教育課程の中での幾何指導試案」

## （ベクトルの平面から空間への拡張を中心として）

米　谷　数　子

**（はじめに）** 数学教育現代化の波によって、高校の教育課程の中から次第に幾何は影を薄めて行った。現状では「平面幾何の公理的構成」と称する一章が、申しわけのように残っているだけで、図形教材の指導は、解析幾何や、ベクトルにゆだねられ、変換は行列が担った。公理的構成による指導展開は、代数教材の中でも充分できるのであるが、２次元（平面）での定理が３次元の空間に拡張されて行く過程を視覚によって把えられるモデルとして、最近、空間図形を再認識する必要性が提唱されて来た。現代数学は多次元の世界を対象にせざるを得ないが、新しい拡張には、図形的な直観が大いに役立っていると聞く。現状では空間ベクトルによって平面や直線を表しても、すべて座標によって数式の計算におき替えられ、その正確な認識がなくとも計算によって機械的に答が出てしまう。これも現代化の傾向の１つであながち責められはしないが、果して、それでよいのであろうか。それらの反省の上に立って新課程の数学の教材の中に立体幾何の基礎事項を、三垂線の定理程度をねらいとして入れるような動向がある由で結構なことと思う。従来でも、空間の直交座標を定義する段階で、その必要を感じそれらに触れて来たが、空間のベクトルを学習する際に、明確な幾何の知識があれば、より有効になるであろう。多種多様な幾何のアプローチはあるが、実際にどのような方法で取り組むかは現場の教師の研究と実践の中から、今後、育成されて行くものと思う。ここに、現在も、将来もその有用性のために残るであろうと思えるベクトルを用いて、領域や空間を点の集合として認識した公理的な指導展開の一試案を示したいと思う。新課程では必修数学士に続く「代数・幾何」の分野に属するとは思うが、中学校で学習した初等幾何を補い、他の教材とは比較的独立して扱えるから、必修内容に、各学校で与えられた単位内での過不足を補助する教材の一部としてでも活用できればと思い、以下は、指導案としてでなく、教材の補助、自分自身の備忘録として、これを書き留めたいと思う。

**（学習内容の概要）**

Ⅰ　**初等幾何の公理・定理の見直し** ──→ Ⅱ　**平面のベクトル（有向線分・矢線ベクトル）**

（無定義用語・公理の意味<br>平行線公理<br>半平面の認識）

（半平面のベクトル表示<br>三角形の周及び内部のベクトル表示）

Ⅲ　**立体幾何の基礎** ──→ Ⅳ　**空間のベクトル**

（平面・直線の位置関係<br>三垂線の定理）

（１次独立・１次従属<br>空間の中で１平面によって分けられる<br>部分空間のベクトル表示・四面体）

大体、以上　Ⅰ・Ⅱ・Ⅲ・Ⅳの順に進むのであるが、Ⅰは、ⅡやⅣの学習の導入として軽く扱ってもよいし、また非ユークリッド幾何の紹介まで深く扱うことも可能である。いずれにしても、これは学習の動機づけをそのねらいとする。Ⅲも余り厳密に扱い過ぎない。併し公理をふまえて簡単に証明できるものについてはする。これもⅣの空間のベクトルの学習において平面の決定などの正しい認識の基礎を作るのが目的であるから、図示、或は模形など活用して直観的にも確認できることをねらいとする。最後にⅣを学習するが、Ⅱでの定理の構成と照らし合わせながらⅢでも公理的な構成をはかり、拡張してゆくことへの興味を持たせるようにした。

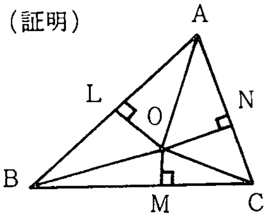
## I　初等幾何の公理・定理の見直し

幾何での論証はどのように進められたか、三段論法・演繹的証明について話す。

定義・用語・無定義用語（点・直線・平面）定理・公理の一般的な説明をした後、実際に既習の定理や公理をあげる前に、その導入としてつぎの問題（逆説）を提出する。

（問題）「任意の三角形（不等辺三角形）は正三角形である。

（証明）




任意の三角形ABC（いま、AB ＞ ACと仮定しておく）において頂点Aの二等分線と、辺ＢＣの垂直二等分線の交点をＯとし、Ｏから辺ＡＢ，ＡＣへ垂線ＯＬ，ＯＮを下ろす。

このときＯはＢＣの垂直二等分線上の点であるから、Ｂ，Ｃから等きょりにある。　すなわち OB ＝ OC ………(1)

また、△AOL ≡ △AON（∵∠ALO ＝ ∠ANO ＝ 90°，ＡＯは共有、また∠OAL ＝ ∠OAN）∴AL ＝ AN……(2)

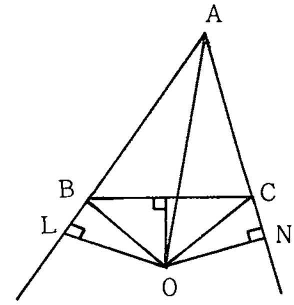
また、OL ＝ ON………(3)

また、△OLB ≡ △ONC（∵∠OLB ＝ ∠ONC ＝ 90°（1）(3)）∴LB ＝ NC………(4)

よって、(2), (4)によって、AL＋LB ＝ AN＋NC

すなわち　AB ＝ ACとなり、仮定に反して二等辺三角形になってしまう。

頂角Ａの二等分線と辺ＢＣの垂直二等分線の交点は三角形の外で交わることに気付いたので、更に考えてみると、ＯからＡＢ，ＡＣへおろした垂線の足は辺の延長上にくるので、このときは、




右図の場合でも前と同様にAL ＝ ANかつLB ＝ NCが証明されるから、

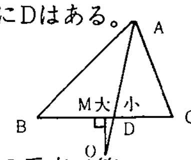
AL－LB ＝ AN－NC　すなわちAB ＝ ACとなってしまう。どの場合にも等式の両辺をそれぞれ加えた等式或は減じた等式なので、これは数学の基本公理であって当然成立する。従って任意の三角形は二等辺三角形である。同様に他の辺のも等しいことが証明されてしまうから、任意の三角形は正三角形になってしまうという矛盾がおこる。

（問）この逆説の証明中のどこに誤りがあるかを指摘し、このような誤りをしないために重視しなければならない基本事項について考えなさい。

以上の逆説について、これを問題としてかかげている書物は見たことがあるが、はっきりした解説をのせてあるものは寡聞の私は知らない。従来、幾何が数Ｉの一部の領域を占めていた頃に、私は時折これを授業のはじめの導入に使った。当然ながら１年生ではめったに完全には解けなかった。試みに今年度の３年生に夏期補習授業中の間に、この問題の解答を書かせて見たが最後まで完全に解税出来たのは100人中２人に過ぎなかった。そこで、この解説を自分なりに考えたものを以下にあげておきたいと思う。これも、見てしまえば、コロンブスの卵のように、容易に見えようが、読まれる前に、それぞれの方のお考えがあってより良い適切な解説がつくなら、御指導載ければ幸甚です。そんな意味で、解説については、つぎの頁から書くことにします。

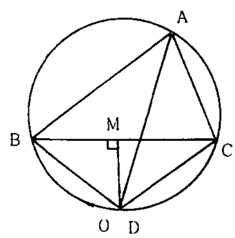
**（逆説問題の解説）**

(1) 先づ、交点Oが△ABCの内部にくることはない。
AB ＞ ACであるから∠Aの二等分線が対辺BC と交わる点をＤとすると、$\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC}$ であるから辺BCの中点Mに対して、Cの側にDはある。
また、∠B＜∠Cとなるから、
△ABCと△ACDの内角を比べて
∠ADB ＞ ∠ADC




したがって、∠Aの二等分線とＢＣの垂直二等分線は、辺ＢＣに対してＡと反対の側で交わる。

(2) 交点Oは△ＡＢＣの外部にあることはわかったが、この点Oから２辺、ＡＢ，ＡＣへおろした垂線の足が、共に2辺の延長上にくることはない。
なぜなら、∠ABO ＜ 90°
∠ACO ＞ 90°
となるからである。この証明は、△ＡＢＣの外接円と∠Ａの二等分線の交点をＤとするとＤは$\overset{\frown}{BC}$の中点となるＤとＭを結べばMD ⊥ ＢＣよってＭＤは辺ＢＣの垂直二等分線となり、ＢＣの垂直二等分線は唯１つであるから、ＭＤは直線MO と重なる。またOは∠Ａの二等分線上にもあることからＤとOは一致する。したがって四角形ABOCは円に内接する。∠ABO＋∠ACO ＝ 2∠R(180°)、また∠ABO ＜ ∠ACOから∠ABO ＜ 90°、∠ACO ＞ 90°が出る。




**（使われた定理・公理）**

三角形の頂角の二等分線は、対辺を２辺の長さの比に内分する。

線分の長さの公理

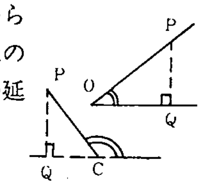
三角形の大きい辺に対する角は小さい辺に対する角より大きい。

三角形の内角の和は180°である。

角の大きさの公理

１直線に交わる２直線は、その同側内角の和が180°より小さい方の側で交わる。

鋭角の１辺上の点から他の辺へおろした垂線の足は辺上にあるが、鈍角の１辺上から他の辺への垂線の足は、その辺の延長上にある。




線分の垂直二等分線が唯一つある

任意の三角形の外接円は必ずある

大きさの等しい円周角に対する弧の長さは等しい。

円に内接する四角形の相対する角の和は180°である。

すなわち、要するにこの問題はどちらも図が誤りであったわけであるが、初等幾何で、このような誤りを無くす為には、常に２直線の交点が半平面のどちらにあるか、直線上では半直線のどちら側にあるかに対して、常に明かくに押えて証明をしないと危険であることが言える。

このことから、後のベクトルの学習展開は、特に平面の領域などの表示が、すっきりと把握できるようにということにねらいをおいたのである。

**（公理について考える前の導入としての検討）**

また、上の問題は、更にこれの解説に用いた定理の証明を考えさせることによって、その証明の中に、またいくつかの別の定理が用いられていないか、と逆にさかのぼって考えてゆくとき、論証の出発点として、証明無しのいくつかの仮定の命題、すなわち公理をあげなければならないことを気付かせる。用語についても、共通の概念を規定する定義を明確にしなければならないが、定義はことばすなわち用語で表わされることから、公理と同様に、いくつかの無定義用語が必要になる。点、直線、平面、通るなどは無定義用語として用いていることを示す。

**（初等幾何で取り扱う公理について）**

中等教育の幾何の学習に際して、何を公理にとりあげるかは、いろいろ論義のあるところであり、ヒルベルトの公理系を基礎にして、ＳＭＳＧでモイーズらがあげている計量（長さと角の大きさ）についての公理をつけ加えた、つぎのようなものを挙げることを提案したい。

公理　１．２点を通る直線は唯１つある。
　　　２．１平面上にある異なる２点を通る直線は、この平面に含まれる。
　　　３．１直線上にない３点を通る平面は唯１つある。
　　　４．１直線は、それがある平面を２つの部分に分ける。
　　　５．１直線上の１点はこれによって直線を２つの部分に分ける。
　　　６．１直線の両側にある２点を結ぶ線分は必ずこの直線と交わる。
　　　７．交えられた直線外の１点を通りこの直線に平行な直線は唯１つある。（平行線公理）
　　　８．異なる２平面は共有点を持つとき、唯１点を共有することはない。
　　　９．直線上の点は実数と１対１の対応をし、任意の２点間のきょりは、２数の差の絶対値で表わされる負でない実数が対応する。（線分の長さの公理）
　　　10．半直線ＡＢの端Ａから出る半直線ＡＰに対して、０と180の間の実数が唯1つきまる。（角の大きさの公理）

以上を、学習の際の基本的な出発点としてはじめることとした。結局ユークリッドの空間の公理なのであるが、教育上、必要と思うものを加えた、公理９、10によって幾何に計量が持ちこまれ、実数の大小の公理も当然持ちこまれて代数的な考えも可能にした。これは何も新しいことではなく、公理が論証展開の出発点におく仮設という認識の立場で当然許されるが歴史的にはバーコフ（1929年）らが、既に提唱し、アメリカのＳＭＳＧの教科書でも現われているのであるが。

平行線公理については、その独立性を問題にして2000年近くも人類が研究した結果は、19世紀の非ユークリッド幾何学の誕生であった。リーマンは「１平面上の任意の２直線は交わる」つまり「平行線は存在しない」をユークリッドの公理の中へ入れて論理的な幾何（楕円的）を作ったし、ボリャイとロバチェフスキーは「一直線外の１点を通る平行線は無数にある」を平行線公理に置きかえた（双曲的）幾何学をつくり上げた。これによって、公理に対する根本的な見直しがなされたとも言える。今日では、もはやユークリッド空間だけでなく、非ユークリッド空間も共存し、物理学・天文学他いろいろの科学の基礎に応用されているわけであり、更には位相空間、ベクトル空間、アフィン空間などの問題もでて来ている。現代の幾何学は、空間について研究する学問と定義されて来ている。宇宙時代の今日当然なのかも知れない現代ではｎ次元から無限次元の空間さえ考えねばならないのである。純粋数学の世界はどんどん飛躍発展しているが４次元以上のものについて、われわれは具体的に視覚に把えるのは困難であるが、抽象的に拡張して行けば、当然の実在として認識できる筈であって、その意味で１次元・２次元を具体的に図形として把えられる１直線上及び平面のベクトルを利用し、３次元のベクトル空間のモデルとして空間のベクトルを学習することで、ｎ次元のベクトル空間への拡張を容易にさせられると思う。そのような意図でこの教材を作ったものである。

## 〔II〕平面上のベクトル

〔定義〕1.有向線分（矢線）はベクトルである。線分の2つの端点に順序を与え第一の点を始点第二の点を終点と言い、$\overrightarrow{AB}$, $\vec{a}$ $A \longrightarrow B$ で表示しベルトルABとよぶ。

2.線分ABの長さを$\overrightarrow{AB}$の大きさといい$|\overrightarrow{AB}|$，$|\vec{a}|$で表す。

3.向きと方向、逆向き、一直線上のベクトル（平行なベクトル）の定義をする。

4.ベクトルの相等　$\vec{a}=\vec{b}$ とは $\vec{a}$と$\vec{b}$が同じ向きで$|\vec{a}|=|\vec{b}|$のこと。

5.ベクトルの和　$\vec{a}=\vec{b}$ は 一点Aを始点とし$\vec{a}$に等しいベクトル$\overrightarrow{AP}$と$\vec{b}$に等しいベクトル$\overrightarrow{PB}$を作る、このとき$\overrightarrow{AB}$を$\vec{a}+\vec{b}$と定義する。(作図)

(法則1)　$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ が成りたつことを平行四辺形を用いてたしかめる。

6.零ベクトル$\vec{0}$を$\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$なるものと定義し、$|\vec{0}|=0$　向きは任意と定める。

逆ベクトル $-\vec{a}$は$\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$となることたしかける。

(法則2)　$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$ 加法の結合法則を図示によりたしかめる。

7.ベクトルの差　$\vec{b}+\vec{x}=\vec{a}$となる$\vec{x}$を$\vec{a}-\vec{b}$で表わす。$\vec{a}+(-\vec{b})=\vec{a}-\vec{b}$

8.ベクトルの実数倍　$k=0$のとき$k\vec{a}$は$\vec{a}$と同じ向きで大きさは$k\cdot|\vec{a}|$に等しいベクトル$k<0$のとき$k\vec{a}$は$\vec{a}$と逆向きで大きさが$|k|\cdot|\vec{a}|$に等しいベクトルを表わす$0\cdot\vec{a}=\vec{0}$　$k\cdot\vec{0}=\vec{0}$，$1\vec{a}=\vec{a}$，$(-1)\vec{a}=-\vec{a}$

(法則3)　任意の実数k，$l$と任意のベクトル$\vec{a}$に対して $(kl)\vec{a}=k(l\vec{a})$

$$(k+l)\vec{a}=k(\vec{a}+l\vec{a}),\quad k(\vec{a}+\vec{b})=k\vec{a}+k\vec{b}$$

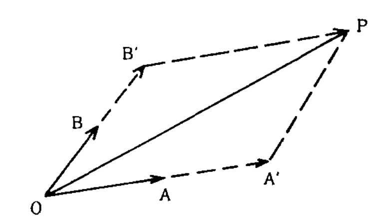
すなわちベクトルと実数（スカラー）との積に対して結合・分配法則が成り立つことを作図、相似三角形の定理を用いて証明する。（平面幾何の利用）

9.位置ベクトル　定点0を始点とし、この平面内の任意の点Pに対して$\overrightarrow{0P}$の表わすベクトル$\vec{p}$を0に対するPの位置ベクトルという。P($\vec{p}$)で表す。

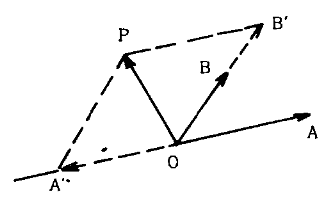
以上の定義から、つぎの事をたしかめることができる。

1定点0に対する、異なる2点A，Bの位置ベクトルを$\vec{a}$，$\vec{b}$とする。

◇(1)$\vec{a}$，$\vec{b}$が1直線上のベクトル、すなわち0，A，Bが1直線上にあるときは、直線AB上の任意の点Pの位置ベクトル$\vec{p}$に対して、$\vec{a}\neq\vec{0}$なら$\vec{p}=t\vec{a}$となる実数tが存在する。直線AB上にない点Pに対しては、このような実数は存在しない。




◇(2)$\vec{a}$，$\vec{b}$が1直線上にないベクトルのときは、$\vec{a}$，$\vec{b}$で定まる平面上の任意の点P($\vec{p}$)に対して$\vec{p}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}$となる実数$\alpha$，$\beta$を1組定めることができる。すなわち、Pから$\vec{b}$に平行線をひき、直線OAとの交点をA′、またPから$\vec{a}$に平行線をひき直線OBとの交点をB′とする、定義5．8、によって、$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA'}+\overrightarrow{OB'}=\alpha\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OB}$となる実数$\alpha$，$\beta$が存在する。平行線公理によって、このA′，B′は唯一つ定まるから、このような実数ほ組$\alpha$，$\beta$は唯一組定まる。そこで、以下の定理が展開される。




〔定理1〕

> $\vec{a}$と$\vec{b}$が1直線上のベクトルであるための必要十分条件は、$x\vec{a}+y\vec{b}=\vec{0}$をみたす$x=y=0$でない実数x，yの組が存在することである。

（証明）$\vec{a}$, $\vec{b}$が１直線上のベクトルであるときは$\vec{a}$, $\vec{b}$が共に$\vec{0}$なら、任意の実数x, yで成立するから明らか、$\vec{a} \neq \vec{0}$ときは適当な実数xを用いて$\vec{b} = x\vec{a}$と表わせることは、定義８、による、これは、$x\vec{a} - \vec{b} = \vec{0}$で、$y = -1$で成立しているとみられる。故に、これは必要条件である。また、十分条件であることは、x, yの少くとも一方が０でないから$y \neq 0$とすれば$\vec{b} = -\dfrac{x}{y}\vec{a}$と表わせて、定義によって$\vec{a}$, $\vec{b}$は１直線上のベクトルとなる。$x \neq 0$としても同様。

（定理１）の対偶をとると、次の〔定理１′〕が成立することになる。

〔定理１′〕

> 平面上のベクトル$\vec{a}$, $\vec{b}$について、$\vec{a} \times \vec{b}$（１直線上のベクトルでない）ための必要十分条件は、$x\vec{a} + y\vec{b} = \vec{0}$をみたす実数x, yの組が$x = y = 0$の時しかないことである。

定義10　$x\vec{a} + y\vec{b} = \vec{0}$が成立するのは、$x = y = 0$のときだけであるとき、$\vec{a}$, $\vec{b}$は１次独立であるという、１次独立でないとき、１次従属であるという。

この定義と上の（定理１）(定理１′）によってつぎの系１，２は明らかである。

（系１）$\vec{a}$　，$\vec{b}$が１次独立ならば$\vec{a}$, $\vec{b}$は共に$\vec{0}$ではない。

（系２）平面上の平行（１直線上）の２つのベクトルは１次従属であり、平行でないベクトルは１次独立である。

〔定理２〕

> 平面上の２つのベクトル$\vec{a}$, $\vec{b}$が１次独立のとき、
> $x\vec{a} + y\vec{b} = x'\vec{a} + y'\vec{b} \Leftrightarrow x = x' \wedge y = y'$

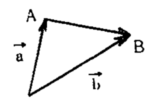
（証明）　$(x - x')\vec{a} + (y - y')\vec{b} = \vec{0}$で$\vec{a}$, $\vec{b}$が１次独立から$x - x' = 0 \wedge y - y' = 0$

〔定理３〕

> 平面上の２つのベクトル$\vec{a}$, $\vec{b}$が１次独立のとき、すなわち$\vec{a}$, $\vec{b}$が１直線上にないとき、同一平面上の任意のベクトル$\vec{c}$は$\vec{a}$と$\vec{b}$の１次結合
> $\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}$で表され、実数x, yの組は唯一通りである。

（既に、◇２で、このような実数x, yの存在と一意性は示しているが、一意性は定理２からも出る）

◇(3)　２点A, Bの位置ベクトル$\vec{a}$, $\vec{b}$を用いて$\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}$で表せる。
ことは定義５、７、より出る。

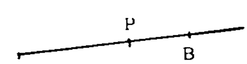



<u>線分のベクトル表示</u>　　A($\vec{a}$), B($\vec{b}$)に対して線分ＡＢ上の動点P($\vec{p}$)とすると、$\overrightarrow{AP} = t\overrightarrow{AB}$, $0 \leqq t \leqq 1$なる実数tがPによって定まる。

◇(3)によって、$\vec{p} - \vec{a} = t(\vec{b} - \vec{a})$　　$\therefore \vec{p} = (1 - t)\vec{a} + t\vec{b}$………(1)

(1)で、$1 - t = s$とおけば　　$\vec{p} = s\vec{a} + t\vec{b}$, $s + t = 1$, $s \geqq 0$, $t \geqq 0$………(2)

となる、逆に(2)で表されたP($\vec{p}$)に対して$s = 1 - t$とおき、逆に(1)すなわち
$\overrightarrow{AP} = t\overrightarrow{AB}$　$0 \leqq t \leqq 1$が出るのでPは線分ＡＢ上の点となる。




条件をゆるめて、半直線や直線のベクトル表示が出る。すなはち
半直線ＡＢならば$\overrightarrow{AP} = t\overrightarrow{AB}$, $t \geqq 0$となることから
$s + t = 1 \wedge t \geqq 0$となり、直線ＡＢならtは任意の実数より、$s + t = 1$でよい。

〔定理4〕

> 2点A($\vec{a}$) B($\vec{b}$) に対して動点P($\vec{p}$) が、実数x, yに対して $\vec{p}=x\vec{a}+y\vec{b}$ と表わされるとき、更にx, yに対してつぎの条件をみたすとき、それぞれ(1)は直線AB, (2)は半直線AB, (3)は線分のベクトル方程式となる。

(1) $x+y=1$　　(2) $x+y=1 \wedge y \geqq 0$　　(3) $x+y=1 \wedge x \geqq 0 \wedge y \geqq 0$

これは上記の説明から明らかである。更に3点A, B, Cに対して定理4の(1)と同値の次の定理が成立する。

> 〔定理5〕 1平面上の定点Oに対する3点A, B, Cの位置ベクトルを$\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$とするとき、$\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c}=\vec{0}$, $\alpha+\beta+\gamma=0$, $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2 \neq 0$ をみたす実数$\alpha$, $\beta$, $\gamma$が存在することは3点A, B, Cが1直線上にあるための必要十分条件である。

更に〔定理5〕の対偶をとると、次の〔定理5'〕の表現になる。

〔定理5'〕

> 3点A($\vec{a}$) B($\vec{b}$), C($\vec{c}$) が1直線上にないための必要十分条件は $x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c}=\vec{0}$, $x+y+z=0$ をみたす実数x, y, zの組が $x=y=z=0$ 以外にないことである。

また、次の〔定理6〕も、その内容は〔定理3〕に帰着する。

〔定理6〕

> 3点A, B, Cが1直線上にないとき、任意の位置ベクトル$\vec{d}$に対して、$\vec{d}=x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c}$, $x+y+z=1$ をみたす実数x, y, zの組は必ず存在し、ただ一組しかない。

(定理5', 定理6は京都大入試問題)

(証明)　仮定により$\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$は1次独立だから、任意のベクトル$\overrightarrow{AD}$は$\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$の1次結合としてただ1通りに表せる。$\overrightarrow{AD}=y\overrightarrow{AB}+z\overrightarrow{AC}$ (y, zは実数)

故に $\vec{d}-\vec{a}=y(\vec{b}-\vec{a})+z(\vec{c}-\vec{a})$　　$1-y-z=x$ とおくと

$\vec{d}=x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c}$, $x+y+z=1$　　なるx, y, zが1組しかないことは、〔定理2〕からy, zが1組しかないことで言えるが、〔定理5'〕、〔定理6〕がまとめてこの順に並べて入試問題になっているので、一意性の証明で〔定理5'〕を用い $\vec{d}=x'\vec{a}+y'\vec{b}+z'\vec{c}$, $x'+y'+z'=1$ なる$x', y', z'$があるとすると $(x-x')\vec{a}+(y-y')\vec{b}+(z-z')\vec{c}=\vec{0} \wedge (x-x')+(y-y')+(z-z')$

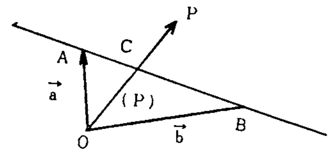
$=(x+y+z)-(x'+y'+z')=0$

より $x-x'=y-y'=z-z'=0$ すなわち $x=x' \wedge y=y' \wedge z=z'$ とした方が独立した答案となって出題者の意図に叶うであろう。

つぎに、1直線によって、平面が2つの半平面に分けられるがその1方の領域は、どんな条件のベクトル方程式で表されるかを考えることにする。

2点A($\vec{a}$), B($\vec{b}$)を通る直線に関して、原点Oと反対の側の任意の1点をP($\vec{p}$) とする。O.Pは直線ABと交わる (公理5) からその交点をCとすると $\overrightarrow{OP}=t\overrightarrow{OC}$, $t>1$ と表せ

る、また、Cは直線ＡＢ上の点であるから〔定理４〕(1)によって、実数x， yによって、$\overrightarrow{OC}=x\vec{a}+y\vec{b}$ $\wedge$ $x+y=1$ と表わせるから、$\overrightarrow{OP}=\vec{P}=t(x\vec{a}+y\vec{b})=\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}$　$\alpha+\beta=tx+ty=t(x+y)>1$ となる。また、直線ＡＢに関して原点Ｏの側の領域の点Ｐをとれば $\overrightarrow{OP}=t\,\overrightarrow{OC}$ で、$t<1$ となるから、$\vec{p}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}$，$\alpha+\beta<1$ となる。すなわち、つぎの定理７の形にまとまる。




〔定理７〕　原点Ｏに対する、Ｏと異なる２点を$A(\vec{a})$，$B(\vec{b})$ とするとき、直線ＡＢの原点Ｏの側の半平面は、$\vec{P}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}$，$\alpha+\beta<1$ で表される。また、直線ＡＢに対して点Ｏと反対側の半平面は、$\vec{P}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}$，$\alpha+\beta>1$ で表される。

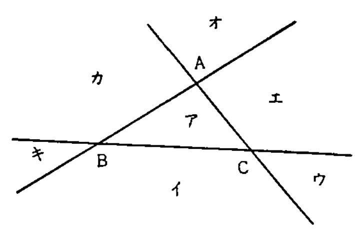
この定理７は、一直線上にない３点Ａ，Ｂ，Ｃが与えられて，直線ＡＢに対して、Ｃの側の半平面、またはＣのない側の半平面の表示に、言いかえることができる。すなわち、定理７のＯをＣとみることで、$\overrightarrow{CP}=\alpha\overrightarrow{CA}+\beta\overrightarrow{CB}$，$\alpha+\beta>1$ は、Ｃの側の半平面となるがこれをＡ，Ｂ，Ｃの位置ベクトルで表せば、$\vec{p}-\vec{c}=\alpha(\vec{a}-\vec{c})+\beta(\vec{b}-\vec{c})$ ，$\alpha+\beta>1$ より $\vec{p}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+(1-\alpha-\beta)\vec{c}$ となるから $1-\alpha-\beta=\gamma$ とおくことで、$\vec{p}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c}$ $\wedge$ $\alpha+\beta+\gamma=1$ $\wedge$ $\gamma>0$ となる。そこで、つぎのような定理ができる。

〔定理８〕

一直線上にない３点$A(\vec{a})$，$B(\vec{b})$，$C(\vec{c})$ があるとき、直線ＡＢに対して点Ｃのある側の半平面は実数$\alpha$，$\beta$，$\gamma$に対して、$\vec{p}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c}$，$\alpha+\beta+\gamma=1$ $\wedge$ $\gamma>0$ で表される。また、ＡＢに対しＣのない側の半平面については、$\alpha+\beta+\gamma=1$ $\wedge$ $\gamma<0$ で表される。

更に定理８によって、一直線上にない３点Ａ，Ｂ，Ｃのうち２点を結んでできる３直線によって平面が限られる７つの領域も簡単にベクトル表示できることになる。

例えば△ＡＢＣの内部（ア）は、$\vec{p}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c}$
かつ $\alpha+\beta+\gamma=1$ で表わされて、
直線ＢＣに対してＡのある側であるから　$\alpha>0$
直線ＣＡに対してＢのある側であるから　$\beta>0$
直線ＡＢに対してＣのある側であるから　$\gamma>0$
となる。これからつぎの定理９がでる。




〔定理９〕

△ＡＢＣの３頂点Ａ，Ｂ，Ｃの位置ベクトルを$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$とするとき、点$P(\vec{p})$が△ＡＢＣの内部にあるための必要十分条件は、実数$\alpha$，$\beta$，$\gamma$に対して、$\vec{p}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c}$，$\alpha+\beta+\gamma=1 \wedge \alpha>0 \wedge \beta>0 \wedge \gamma>0$ である。

同様の考え方でつぎのように、他の領域の点に対してもその条件を求めることができる。これを表にして表わすとつぎのようになる。すなわち、平面ＡＢＣ上の点Ｐの位置ベクトル$\vec{p}$に対し、その存在領域によって、つぎのような定理が成立する。

〔定理10〕

互いに交わる３直線によって分けられる平面上の点P($\vec{p}$)はその属する領域によって、$\vec{p}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c}$，$\alpha+\beta+\gamma=1$ で表される実数 $\alpha$，$\beta$，$\gamma$ の符号が定まる。

| | ア | イ | ウ | エ | オ | カ | キ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\alpha$ | + | − | − | + | + | + | − |
| $\beta$ | + | + | − | − | − | + | + |
| $\gamma$ | + | + | + | + | − | − | − |

また、直線上にある点に対しては、例えばＡＢ上の点ならば $\vec{p}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}$ で $\alpha+\beta=1$ から $\gamma=0$ となる。同様に直線ＢＣ上であれば $\alpha=0$，直線ＣＡ上にあれば $\beta=0$ となる。

従って〔定理９〕で、△ＡＢＣの周及び内部の領域を表示すれば $\vec{p}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c}$，$\alpha+\beta+\gamma=1$ かつ $\alpha\geqq 0$，$\beta\geqq 0$，$\gamma\geqq 0$ となる。

（問題）　△ＡＢＣの各頂点と対辺の中点を結ぶ線分（中線）を２：１に内分する点Ｇの位置ベクトル $\vec{g}$ を頂点Ａ，Ｂ，Ｃの位置ベクトルで表すと、$\vec{g}=\frac{1}{3}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$ となることをたしかめよ。（この $\vec{g}$ は定理９をみたすベクトルの１つで $\alpha=\beta=\gamma=\frac{1}{3}$）

上の問題によって、三角形の三中線は１点で交わり互いに他を２：１に内分することがわかる。

（註）このあと、ベクトル成分表示を定義し、座標平面上のベクトルとして解析的に表現する方法に入ることもできるが、今は、その方法は省略して、先へ行くことにする。

## 〔III〕立体幾何の基礎事項（平面・直線の位置関係）

**1．公理について**　既に〔I〕であげた公理がそのまま、すべて用いられることは言うまでもないが、特に、平面や、直線の決定やその位置関係を考える上に重要な基本となるものについて、再度、あげるならば、

（公理）　(1)　2点を通る直線は唯1つ存在する。

(2)　1平面上にある異なる2点を通る直線はこの平面に含まれる。

(3)　1直線上にない3点を通る平面は唯1つ存在する。

(7)　平行線公理

(8)　異なる2平面が共有点を持つとき、唯1点のみを共有することはできない。

**2．2直線の位置関係について**

(1)　1平面上にある（平行,（一致）　交わる）（$a /\!/ b \wedge b /\!/ c \Rightarrow a /\!/ c$）

(2)　1平面上にない（ねじれの位置にある）（ねじれの位置の2直線のなす角の定義）

**3．平面の決定条件**

(1)　公理(3) 1直線上にない3点

(2)　交わる2直線

(3)　平行な2直線

(4)　1直線とその上にない1点

**4．2平面の位置関係**

(1)　平行（共有点を持たない）

(2)　交わる（2点を共有すれば公理(1)(2)よりその直線（交線）を共有）

(3)　一致する（1直線上にない3点を共有すると公理(3)により一致する）

**5．平面と直線の位置関係**

(1)　平行　（共有点を持たない）

(2)　交わる（1点のみを共有）

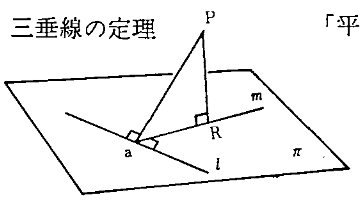
(3)　含まれる（2点を共有すると公理(2)によって含まれる）

◇平行2平面の1方に交わる平面は他方とも交わり、交線は平行である。

◇**5**．(2)のうち平面と直線の直交することの意味「平面に含まれるすべての直線に垂直」

「交わる2直線に垂直ならば、その2直線の定める平面に垂直」

三垂線の定理




「平面$\pi$上にない1点Pからこの平面へ垂線を引く方法」

$\pi$上の直線$l$へPからおろした垂線の足Qにおいて$\pi$上で$l$に垂線$m$を立て、Pから$m$に垂線PRを下せばPR⊥$\pi$

$l \perp PQ$
$l \perp QR$　かつ $PR \perp QR \Rightarrow PR \perp \pi$（2通りの逆も成立）

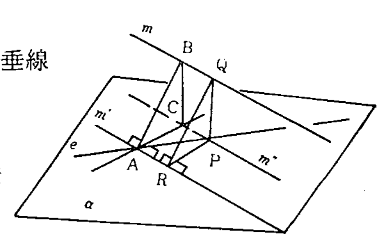
◇**2**．(2)ねじれの位置にある2直線について、その共通垂線の存在と求め方。

「2直線$l$，$m$がねじれの位置にあるとする　$l \perp n \wedge m \perp n$なる直線$n$があるか。あるとすればどのようにして作ることができるか。」

$l$上の1点Aを通り$m$に平行な直線を$m'$がある（平行線公理）

$l$と$m'$の定める平面を$\alpha$とする（**3**．の(2)）

$m$，$m'$の定める平面$\beta$（**3**．の(3)）上でAで$m$に立てた垂線と$m$の交点をBとしBから平面$\alpha$に垂線BCを下し、（三垂線の定理）Cを通って$\alpha$上で$m'$に平行線$m''$を引き、$l$との交点をPとする。Pから$m'$へ下した垂線の足Rとし、Rから$m$へおろした垂線の足をQとす（三垂線の定理）よりPQ⊥$\alpha$となりPQ // BCより




PQ⊥$l$かつPQ⊥$m$となる。すなわち、直線PQが共通垂線$n$である。

以上のことがらを指導した上で、またはつぎの空間ベクトルの折、必要に応じてこれらのことに触れながら、次の学習に進む。

## 〔Ⅳ〕空間のベクトル

空間内に、異なる4点を同一平面上にないようにとる。既に公理3で、3点は一平面上必ずあるので、他の一点をこの平面上にない点をとることで可能である。同一平面上にない4点O，A，B，Cをとるとき、同様にOを始点A，B，Cを終点とするベクトルを考えることができる。ただし、$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OC}$は、一平面上にないベクトル、すなわち空間のベクトルとなる。これらについてつぎの定理が成立する。

〔定理11〕

> 同一平面上にない空間の異なる4点O，A，B，Cに対して
> $\alpha\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OB}+\gamma\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{0}$が成り立つ実数$\alpha$，$\beta$，$\gamma$があるなら　$\alpha=\beta=\gamma=0$である。

（証明）$\alpha\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OB}+\gamma\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{0}$でかつ$\alpha\neq 0$とすると、

$\overrightarrow{OA}=-\dfrac{\beta}{\alpha}\overrightarrow{OB}-\dfrac{\gamma}{\alpha}\overrightarrow{OC}$　と表せる。仮定によって、$\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OC}$ は1直線上にないベクトルである。（O，B，Cが1直線上にあるとこの直線とAは1平面上にある。（Ⅲの**3**.(4)））

そこで、ベクトルの実数倍、及び和の定義によって、$\overrightarrow{OA}$は、$\overrightarrow{OB}$と$\overrightarrow{OC}$の定める平面上のベクトルになり、4点O，A，B，Cが1平面上の点となるから、仮定に反する。したがって$\alpha=0$でなければならない。同様に$\beta\neq 0$，$\gamma\neq 0$としても矛盾が起こるから、$\alpha=\beta=\gamma=0$でなければならない。

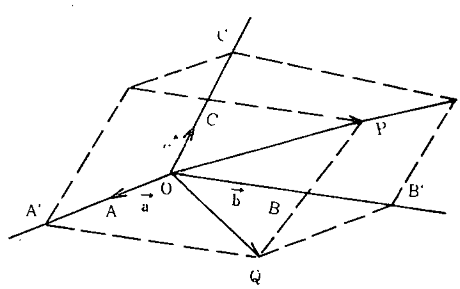
この〔定理11〕が成立つことから◇一平面上にない3つのベクトルは1次独立であるといえる。

〔定理12〕

> 空間内の任意の1点Pに対して、ベクトル$\overrightarrow{OP}$は1平面上にない3つのベクトル$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OC}$を用いて、次の形にただ1通りに表わすことができる。
> $\overrightarrow{OP}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c}$，$\alpha$，$\beta$，$\gamma$は実数、$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$

（証明）任意の1点Pに対してPを通って、平面OBC，OCA，OABに平行な平面を作り、直線OA，OB，OCとの交点をそれぞれA′，B′，C′とすると、

$\overrightarrow{OA'}=\alpha\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB'}=\beta\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\gamma\vec{c}$　となる実数$\alpha$，$\beta$，$\gamma$が存在し、（ベクトルの実数倍の定義による）OA′，OB′を2辺とする平行四辺形の頂点Qに対して、




$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{QP}=\overrightarrow{OA'}+\overrightarrow{OB'}+\overrightarrow{OC'}$

$=\alpha\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OB}+\gamma\overrightarrow{OC}$　すなわち$\overrightarrow{OP}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c}$

いまもし$\overrightarrow{OP}=\alpha'\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c}$とも表わせたとすれば、

$(\alpha-\alpha')\vec{a}+(\beta-\beta)\vec{b}+(\gamma-\gamma)\vec{c}=\overrightarrow{0}$

$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$は一平面上にないベクトルより〔定理11〕によって

$\alpha-\alpha'=\beta-\beta=\gamma-\gamma=0$　すなわち$\alpha=\alpha'\wedge\beta=\beta\wedge\gamma=\gamma$

したがって、$\overrightarrow{OP}$は唯1通り、題意のように表せる。

〔定理12〕によって、空間内で4つのベクトル$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$，$\vec{d}$をとれば、$\vec{d}$は他の3つのベクトルの1次結合で表わせて、$\vec{d}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c}$

$\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c}+\delta\vec{d}=\vec{0}$ が $\delta=-1$ で成立することになる。以上から、

◇空間では、３つの１次独立なベクトルはとれるが４つのベクトルは１次従属となる。

次に空間において、与えられた１平面のベクトル方程式を考える。１直線上にない３点を与えることで平面はきまるから、空間の１定点に対する位置ベクトルで、この平面上の点の位置ベクトルの間の関係を考える。とつぎの定理が成立つ。

〔定理13〕

> Ａ，Ｂ，Ｃを空間の１直線上にない３点とし、Ｏを空間の１定点とする。Ｏに対するＡ，Ｂ，Ｃの位置ベクトルをそれぞれ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ とし平面ＡＢＣ上の任意の１点をＰのＯに対する位置ベクトル $\vec{p}$ とすると、実数ｐ，ｑ，ｒに対して　$\vec{p}=p\vec{a}+q\vec{b}+r\vec{c}$，$p+q+r=1$ と表わせる。

（証明）Ｏは平面ＡＢＣ上にあってもなくてもよい、一般にはないとして考える。

Ｐは平面ＡＢＣ上の点であるから、$\overrightarrow{AP}=q\overrightarrow{AB}+r\overrightarrow{AC}$ となる実数ｑ，ｒが存在する〔定理３〕、ここで平面ＯＡＰ，平面ＯＡＢ，平面ＯＡＣのそれぞれの中で

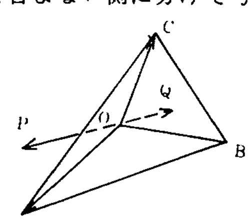
$\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}=\vec{p}-\vec{a}$，$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\vec{b}-\vec{a}$，$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}=\vec{c}-\vec{a}$ が成立するから、$\vec{p}-\vec{a}=q(\vec{b}-\vec{a})+r(\vec{c}-\vec{a})$，

$\vec{p}=(1-q-r)\vec{a}+q\vec{b}+r\vec{c}$　$1-q-r=p$ とおいて

$$\vec{p}=p\vec{a}+q\vec{b}+r\vec{c},\quad p+q+r=1$$ が成立する。

ｑ，ｒがすべての実数のはんいの値をとることでＰは平面ＡＢＣ上の任意の点を動くから、平面のベクトル方程式が、定理13、のように表わせることがわかる。

次に、１平面によって空間が２つの部分に分けられるが、これに対して、その表示を考えるいま、〔定理13〕で与えられた平面ＡＢＣに対して定点Ｏを含む側と含まない側に分けて考えることにする。




点ＰがＯを含む側にあるとき、直線ＯＰと平面ＡＢＣの交点をＱとするとＰ，Ｏ，Ｑは１直線上にあるから $\overrightarrow{OP}=t\overrightarrow{OQ}$，$t<1$ となる実数ｔがＰの位置によってとれる、$\overrightarrow{OQ}$ は〔定理13〕のように表示できるから、これを代入して、

$\overrightarrow{OP}=t(p\vec{a}+q\vec{b}+r\vec{c})$

$=tp\vec{a}+tq\vec{b}+tr\vec{c}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c}$，$\alpha+\beta+\gamma=t(p+q+r)=t<1$

すなわち、Ｏの側の空間は、実数 $\alpha$，$\beta$，$\gamma$ に対して

$\vec{p}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c}$，$\alpha+\beta+\gamma<1$ で表現される。また､逆に平面ＡＢＣに対してＯのない側の空間に点Ｐがあれば線分ＯＰと平面ＡＢＣの交点をＱとすることで $\overrightarrow{OP}=t\overrightarrow{OQ}$ $t>1$ となることから同様に

$\vec{p}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c}$，$\alpha+\beta+\gamma>1$ が得られる。　これらを次の定理のようにまとめられる。

〔定理14〕

> 空間の３点Ａ,Ｂ,Ｃによって定まる平面に対して、この平面上にない１点Ｏをとり、平面ＡＢＣに対してＯを含む側の空間のベクトル $\overrightarrow{OP}=\vec{p}$ に対する表示は $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とするとき、実数 $\alpha,\beta,\gamma$ に対し
> $\vec{p}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c}$，$\alpha+\beta+\gamma<1$　となりＯを含まない側の空間は、
> $\vec{p}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c}$，$\alpha+\beta+\gamma>1$ で表わされる。

〔定理14〕の１点Ｏに代って点Ｄを入れ、１平面上にない４点、Ａ，Ｂ，Ｃ，Ｄをとることで互いに交わる４面で空間は何個の部分に分けられるであろうか。そして、それらの空間のそれぞれの表示はある筈である。しかし、余りに煩雑になるので、ここでは、その基本的な考え方を押えることにする。先づ〔定理14〕のＯをＤに代えて表現すると。

「平面ＡＢＣに対して、この上にない１点Ｄをきめ、点Ｄを含む側の空間の部分の任意の点Ｐは、$\overrightarrow{DP}=\alpha\overrightarrow{DA}+\beta\overrightarrow{DB}+\gamma\overrightarrow{DC}$，$\alpha+\beta+\gamma<1$ となる実数$\alpha$，$\beta$，$\gamma$で表わされる。」

この式を一定点Ｏからの位置ベクトルに直し、$1-(\alpha+\beta+\gamma)=\delta$ とおくことで、同様に

$\vec{p}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c}+\delta\vec{d}$，$\alpha+\beta+\gamma+\delta=1$，$\delta>0$ と変形できることがわかるから。次のように表現し直して定理とする。

〔定理15〕

> １平面上にない空間の４点Ａ，Ｂ，Ｃ，Ｄが与えられるとき、平面ＡＢＣに対して点Ｄを含む側の点$(\vec{p})$は１点Ｏに対する位置ベクトル$\vec{a}$，b，$\vec{c}$，$\vec{b}$を用いて$\vec{p}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c}+\delta\vec{d}$，$\alpha+\beta+\gamma+\delta=1$ なる実数$\delta$に対して$\delta>0$、Ｄを含まない側の空間では、$\delta<0$となる。また平面ABC上なら $\delta=0$

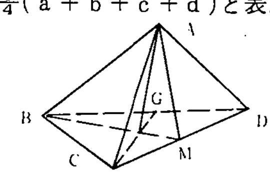
〔定理15〕から、Ａ，Ｂ，Ｃ，Ｄを相互に交換することで四面体ＡＢＣＤの内部を表示するのは容易である。また〔定理15〕の成立で、その逆もまた転換法で成立するから、四面体について、つぎの定理の成立することがわかる。

〔定理16〕

> Ａ，Ｂ，Ｃ，Ｄを同一平面上にない４点とし、Ｐを任意の１点とする、１点Ｏを任意にとり、$\overrightarrow{OP}=\alpha\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OB}+\gamma\overrightarrow{OC}$，$\alpha+\beta+\gamma+\delta=1$，$\alpha,\beta,\gamma,\delta\geqq 0$ と表わせることが、Ｐが四面体ＡＢＣＤの内部または表面上の点であるための必要十分条件である。

なお、定理15は、空間の点の属する部分区間を表示する上に基本的なものとして活用できると思う。四面体の重心を求める次の問題も、空間のベクトルの応用として適当であろう。

（問題）４面体ＡＢＣＤの各頂点と対面の重心を結ぶ線分を３：１に内分する点Ｇの位置ベクトル$\vec{g}$が４頂点の位置ベクトル$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$，$\vec{d}$を用いて$\frac{1}{4}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d})$と表わせることをたしかめよ，このことで、各頂点と対面の三角形の重心を結ぶ４つの線分が１点Ｇで交わることがわかる．この点Ｇは、四面体ＡＢＣの重心と呼ばれる。




また、〔定理15〕から四面体の内部の点に対して〔定理16〕のような条件をつけて表示できたのと同様に、他の半平面によって限られた空間の部分に対しても同様に条件をつけ、表示できるであろうということは、平面の場合に〔定理８〕から〔定理10〕を導いた発想に似ている。すなわち、同一平面上にない４点$A(\vec{a})$，$B(\vec{b})$，$C(\vec{c})$，$D(\vec{d})$に対して空間の１点$P(\vec{p})$が$\vec{p}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c}+\delta\vec{d}$，$\alpha+\beta+\gamma+\delta=1$ で表わされるとき、その実数$\alpha$，$\beta$，$\gamma$，$\delta$ の符号は、点Ｐが空間の平面によって限られたどの部分にあるかによって定まる。したがって、４点Ａ，Ｂ，Ｃ，Ｄのうちの任意の３点で定まる４つの平面によって、空間は何個の部分に分けられるかは、逆に、$\alpha+\beta+\gamma+\delta=1$ をみたす実数$\alpha$，$\beta$，$\gamma$，$\delta$ の異なる符合の組合せの数と一致する筈である。ただし、すべてが負になる場合は条件によって除かれるので、その数は$2^4-1=15$となる筈である。この15通りは、実際、次の表のように整理して表わすことができる。

| 空間 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\alpha$ | ＋ | ＋ | ＋ | ＋ | － | － | － | － | ＋ | ＋ | ＋ | ＋ | － | － | － |
| $\beta$ | ＋ | ＋ | ＋ | － | ＋ | － | ＋ | ＋ | － | － | ＋ | － | ＋ | － | － |
| $\gamma$ | ＋ | ＋ | － | ＋ | ＋ | ＋ | － | ＋ | － | ＋ | － | － | － | ＋ | － |
| $\delta$ | ＋ | － | ＋ | ＋ | ＋ | ＋ | ＋ | － | ＋ | － | － | － | － | － | ＋ |

上の表の例えば７の空間は、平面ＢＣＤに対しては点Ａのない側、平面ＡＣＤに対して点Ｂのある側、平面ＡＢＤに対して点Ｃのない側、平面ＡＢＣに対して点Ｄのある側の空間を表すというように、これを読みとることができる。この内容は〔定理17〕として位置づけられよう。

**（今後の発展）**

このあとは、空間のベクトルに対して、互いに直交する空間の直交座標を導入し、ベクトルの成分表示から、内積を定義、平面と総合的に内積の幾何学的意味について考える。また、垂直関係を問題とする種々の問題が学習内容として展開する。しかし、解析的手法に関しては、現行の教科書にもあり、研究し尽くされているので省略する。ただ、$n$次元ベクトル空間への展望を思うとき、どうしても成分表示に戻らないわけには行かない。内積もまた、$n$次元で定義でき、一次独立、一次従属の概念も$n$次元空間ベクトルの中で同様に定義できることについても納得のいく理解につながるであろうと思われる。

大方の御批判御指導をお願いします。

# 正　誤　表

| ページ | 行 | 誤 | 正 |
|---|---|---|---|
| まえがき | 21 | また、同教諭 | また、米谷教諭 |
| 45 | 13 | (8)立野____： | (8)立野勝彦： |
| 〃 | 14 | (9)前出(7) | (9)前出(2) |
| 〃 | 18 | (12)前出(7) | |
| 〃 | 21 | 運動能力調査報告責 | 運動能力調査書 |
| 〃 | 22、26 | (16)前出(13) | (16)前出(14) |
| 〃 | 23、27 | | |
| 〃 | 24、28 | | |
| 〃 | 25、29 | | |
| 47 | 28 | 3頁 | 49頁 |
| 〃 | 31 | 7頁 | 53頁 |
| 48 | 1 | 7頁 | 53頁 |
| 〃 | 11 | 21頁 | 67頁 |
| 〃 | 17 | 29頁 | 75頁 |
| 〃 | 18 | 31頁 | 77頁 |
| 〃 | 19 | 31頁 | 77頁 |
| 〃 | 24 | 37頁 | 83頁 |
| 〃 | 29 | 43頁 | 89頁 |
| 〃 | 30 | 45頁 | 91頁 |
| 52 | 3 | Seconderies | Secondaries |
| 54 | 8 | to the would | to the wound |
| 〃 | 15 | Japan's coomunication | Japan's communication |
| 55 | 1 | Japan's communication<br>$S^2$　　X<br>Oとして | Japan's communication<br>$S^2$　　X<br>Sとして |
| 56 | 19 | and abhorrence of dirt and litter. | 下線をつける。 |
| 57 | 22 | the pursit, of happiness | カンマをとる。 |
| 60 | 4 | munication | 下線をつける。 |
| 65 | 21 | Carter's renom nation | Carter's renomination |
| 〃 | 36 | dramatic illust ation of | dramatic illustration of |
| 79 | 15 | conscionsness | consciousness |
| 〃 | 41 | his appeargnce | his appearance |
| 93 | 17 | 新課程では必修数学士 | 新課程では必修数学I |
| 158 | 下段1 | 青年で研讃の | 青年で研鑽の |
| 154<br>153 | | | 154ページと153ページ<br>指し替え。 |