東ドイツの数学教科書紹介(2)

海外教育事情視察報告　その３

能　崎　克　己

前号にひきつづき，東ドイッ上級中等学校の数学の教科書の概要を紹介する。

前号では，第11学年教科書の内容のうち，次の部分について紹介した。

A章　数学的帰納法，かんたんな数列

B章　極限値

C章　微分法の初歩　（このうち，学習単位C１からC20まで）

本号においては，これにつづいて，同書の残りの部分である次の内容を紹介する。

C章　微分法の初歩　（このうち，学習単位C21からC34まで）

D章　積分法の初歩

E章　ベクトル計算と解析幾何

内容の紹介は，前号の冒頭に述べた基準によるが，内容のうち，特に，D章では，定積分の定義や，積分の基礎的な内容の部分が，相当にくわしく，かつ，かなり論理的に述べられており，また，E章では，全内容にわたって，A章からD章の説明のしかたと，大きく異なっているのに加えて，解説ならびにその取扱いが，ここでも，かなり論理的になされている。これらの部分においては，この点特に，わが国の教科書における，取扱いや説明とは，ひじょうに異っている点が多い。このため，本稿における紹介に当っても，前号にあげた基準にかかわらず，概要ではあるが，説明文を多くあげなければならなかったことを，特に述べておきたい。また，図や表も，わずかではあるが，本文における解説の必要上，のせておいた。

以上の諸点を考慮において，なるべく原書の意図を損なうことなく，また，なるべく要点をとらえて，紹介するように，つとめたつもりであるが，誤訳，その他の誤があるのではないかと懸念している。この点，ご諒承を願いたい。

なお，巻末には，問題が多数収録され，あたかも，問題集のような形態をなしており，この部分に，６５ページを費し，本文202ページの約 $\frac{1}{3}$ の多くをあてている。問題は，２種類あり，教科書の本文の理解のためのドリル，もしくは，演習にあたる，いわゆる教科書程度の練習問題と，これより幾分程度の高い，そして時には，研究的な意味をもつ，補充問題とから成っている。前号に述べたように，本文のA，B，C，D Eの各章に対応して，それぞれａ，ｂ，ｃ，ｄ，ｅの各章として，あげられている。練習問題については，本文の学習単位の末尾に，その学習単位に対応する問題の番号が示されている。また，補充問題については，各章別に，問題番号の印刷字体を変えて，練習問題の途中の随所に，挿入されている。問題の内容を，すべて記すことは不可能なので，一応，参考として，若干の補充問題をあげるほか，各学習単位別，各章別の問題数を紹介するのみに止めた。

本号につづき，次号以下において，第12学年の教科書の内容を紹介する予定である。

C章　微分法の初歩（つづき）

曲線の研究，極値の問題

21.　関数の単調な状態

関数 f が，f の定義域に属する区間Ⅰの中の，$x_1 < x_2$ なる任意の値 x_1 および x_2 に対して $f(x_1) < f(x_2)$ または $f(x_1) > f(x_2)$ が成り立つとき，かつ，そのときに限り，f はⅠにおいて単調に増加する，または，減少する。

関数 f が，区間Ⅰにおいて単調であり，かつ，x_0 がⅠの中の任意の点であるならば，完全にⅠの中に含まれるような，x_0 の任意の近傍においても単調である。

以上の2つの定義を，例示を加えて復習し，その上で，次の定義をおいている。

23　定義　関数 f と，点 x_0 について

1.　f が x_0 の近傍において定義され
2.　ある　$\varepsilon > 0$　が存在して

$$x_0 - \varepsilon < x < x_0 \quad のとき \quad \left\{\begin{array}{l} f(x) < f(x_0) \\ f(x) > f(x_0) \end{array}\right.$$

$$x_0 < x < x_0 + \varepsilon \quad のとき \quad \left\{\begin{array}{l} f(x) > f(x_0) \\ f(x) < f(x_0) \end{array}\right.$$

が成り立つ

とき，f は，x_0 において，単調に $\left\{\begin{array}{l} 増加 \\ 減少 \end{array}\right\}$ するという。

例としてあげられているものの1つに，次のものがある。

関数　$f(x) = \dfrac{1}{x}$　$(x \neq 0)$ について，ある $\varepsilon > 0$（たとえば $\varepsilon = \dfrac{1}{2}$）が存在して，

$-1 - \varepsilon < x < -1$　なるすべての x に対して　$f(x) > f(-1)$

$-1 < x < -1 + \varepsilon$　なるすべての x に対して　$f(x) < f(-1)$

であるから，f は，点 $x_0 = -1$ において，単調に減少する。

また，定義C23から，次のことが導びかれることを示して，その図形的意味を述べている。

差　$f(x) - f(x_0)$ および $x - x_0$ は，区間（$x_0 - \varepsilon$，$x_0 + \varepsilon$）のすべての $x \neq x_0$ に対して，

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0 \qquad または \qquad \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} < 0$$

が成り立つとき，かつ，そのときに限り，f は，点 x_0 において単調に増加する，または，

減少する。

22. 単調性と第1次導関数

24 定理　関数 f が，x_0 において，単調に $\left\{\begin{matrix}\text{増加}\\\text{減少}\end{matrix}\right\}$ し，かつ，x_0 において微分可能であるとき，$\left\{\begin{matrix}f'(x_0)\geqq 0\\f'(x_0)\leqq 0\end{matrix}\right\}$ が成り立つ。（証明略）

この定理の証明の中に，定理B7から次の定理が導びかれて，それを用いていることを明示している。

$\lim_{x\to x_0} f(x)=g$ が存在し，かつ，x_0 のある近傍が存在し，その近傍のすべての $x\neq x_0$ に対して，$f(x)>0$ （$f(x)<0$）ならば，$g\geqq 0$（$g\leqq 0$）が成り立つ。

また，定理C24から，区間における単調増加（減少）に対して，次の定理があげられている。

関数 f が，(a, b) において，単調に $\left\{\begin{matrix}\text{増加}\\\text{減少}\end{matrix}\right\}$ し，かつ，(a, b) において微分可能であるとき，その区間内のすべての x に対して，$\left\{\begin{matrix}f'(x)\geqq 0\\f'(x)\leqq 0\end{matrix}\right\}$ が成り立つ。（証明なし）

23.

25 定理　関数 f が，x_0 において微分可能で，かつ，$\left\{\begin{matrix}f'(x_0)>0\\f'(x_0)<0\end{matrix}\right\}$ が成り立つとき，f は，x_0 において，単調に $\left\{\begin{matrix}\text{増加}\\\text{減少}\end{matrix}\right\}$ する。（証明略）

この定理の証明の中に，定理B8から次の定理が導びかれて，それを用いていることを明示している。

$\lim_{x\to x_0} f(x)=g$ が存在し，かつ，$g>0$（$g<0$）ならば，x_0 のある近傍が存在してその近傍のすべての $x\neq x_0$ に対して　$f(x)>0$　（$f(x)<0$）が成り立つ。

また，定理C25を，接線の傾きを用いて，図形的な説明もなされている。

$\boxed{24}$ 関数　$f(x)=\frac{1}{3}x^3+x^2+1$　の第1次導関数は　$f'(x)=x^2+2x=x(x+2)$ である。この関数は，$x>0$ または $x<-2$ なるすべての x に対して，単調に増加し，$-2<x<0$ なるすべての x に対して，単調に減少する。

点 $x_1=-2$，および　$x_2=0$　に関しては，その点で，第1次導関数は零である。　このことについては，まだ，何も述べられてはいない。

⑰ 関数 $f(x)=\frac{1}{3}x^3+x^2+1$　のグラフにおいて，例C24で，計算によって見いだされた結果を説明せよ。

24. Rolleの定理

⑱ 関数　$y=-x^2+4x$ の零点を計算し，この関数のグラフを，区間 $-1\leqq x\leqq 5$　において示せ。この関数の第1次導関数の零点を計算し，その結果を，幾何学的に説明せよ。

26 Rolleの定理　　fを，次の条件を満足する関数とする。

(1)　fは，$[a, b]$　で連続である。

(2)　fは，(a, b)　で微分可能である。

(3)　$f(a)=f(b)=0$

このとき，次のことが成り立つ。

$f'(\xi)=0$　かつ，$a<\xi<b$ なるような（少なくとも）1つの数 ξ が存在する。

Rolleの定理については，この定理が，$f'(\xi)=0$，$a<\xi<b$ なる ξ が存在することを示しているのみで，このξが区間のどの点であるかを示していないこと，いわゆる存在定理であることを注意しており，また，この定理の図形的な意味を述べた上で，次のように，その証明を明記している。

Rolleの定理の証明

fは，$[a, b]$ で連続であるから，（定理B25によって）$[a, b]$の中に，最大の関数値M，および，最小の関数値mが存在し，$[a, b]$ のすべての x に対して，

$$m\leqq f(x)\leqq M$$

が成り立つ。

$M=m$　ならば，fは，$[a, b]$ においては一定であり，(a, b) のすべての x に対して，　　$f'(x)=0$

が成り立つ。

$M>m$　ならば，（$f(a)=f(b)=0$ であるから）Mとmを，ともに区間 $[a, b]$の端にとることはできない。すなわち，2つの関数値Mあるいはmの少なくとも一方は，関数fの　$a<\xi<b$ なる点ξにおいてとることができる。いま，関数fが，点ξ（$a<\xi<b$）において最大値Mをとる場合を考え，$f'(\xi)=0$ を証明する。

$f'(\xi)\neq 0$　と仮定すれば，$f'(\xi)>0$ か，または，$f'(\xi)<0$　である。

a）$f'(\xi)>0$　ならば，fは，ξにおいて単調に増加する。このとき，$x>\xi$なる数 x が存在し，かつ，$f(x)>f(\xi)=M$

b）$f'(\xi)<0$　ならば，fは，ξにおいて単調に減少する。このとき，$x<\xi$なる数 x が

存在し，かつ，$f(x)>f(\xi)=M$

どの場合においても，Mは，$[a,b]$ における，fの最大値ではない。したがって，$f'(\xi)\neq 0$ なる仮定は誤りであり，よって，$f'(\xi)=0$ が成り立つ。

fが，$a<\xi<b$ なる点ξにおいて，その最小値mをとる場合についても，同様な方法で，証明される。

25. 微分法の平均値の定理

(19) 関数 $y=\frac{1}{3}x^3$ のグラフが与えられたとする。曲線上の点$P_1(0,0)$，$P_2(3,9)$によって定められる割線の傾きm_sを計算せよ。区間$[0,3]$の中の点ξにおいて，その点での曲線の接線が，さきに考えた割線と等しい傾きをもつような点ξが存在するかどうかを確かめよ。その結果を，図によって説明せよ。

27 平均値の定理　関数fが，$[a,b]$において連続で，かつ，(a,b) において微分可能ならば，$a<\xi<b$ で

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi)$$

なるような数ξが存在する。

ここで，平均値の定理の幾何学的な意味を述べ，また，この定理が，さきのRolleの定理と同じく，純粋に，存在定理であることを注意し，Rolle の定理が，平均値の定理の特別な場合であることを述べている。また，以下の，例題25，および，練習⑳のあとに，定理の証明が，明記されている。この証明は，ふつうに行なわれているものであり，特に変ったものではないが，一応，その全文をあげておく。

25 関数 $f(x)=x^2$ が，任意の区間$[a,b]$で与えられたとする。平均値の定理によって，$a<\xi<b$，かつ，$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi)$，したがって，$\frac{b^2-a^2}{b-a}=2\xi$ なるξが存在する。これから，$a+b=2\xi$ すなわち，$\xi=\frac{1}{2}(a+b)$ が導びかれる。

この場合，ξは，つねに，区間$[a,b]$の中点であることを示している。

(20) 関数 $f(x)=x^2$ について，ここに示された性質は，任意の2次関数についても成立することを証明せよ。この結果を，放物線 $y=x^2$ の，点P(1，1) における接線の作図に利用せよ。

平均値の定理の証明

fを，$[a,b]$において連続で，かつ，(a,b)において微分可能な任意の関数とする。ここで，

(*) $$g(x)=f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$$

として，関数

$$\varphi(x)=f(x)-g(x) \qquad (x\in[a,b])$$

をつくる。ここに，(*)は1次関数の方程式であるから，順序対 $[a, f(a)]$ および，〔$b, f(b)$〕によって，一意的に決定される。幾何学的には，(*)は，点 $P_1(a, f(a))$ および $P_2(b, f(b))$ によって定まる割線の方程式であり，関数 φ は，すべての $x\in[a,b]$ に対して，曲線の縦座標 $f(x)$ と，それにともなう割線 $g(x)$ の縦座標との差を与えている。

関数 $\varphi(x)$ は，Rolle の定理の仮定を満足する。

(1) f は，仮定によって，$[a,b]$ で連続であり，また，g は1次関数としていたるところで連続であるから，φ は $[a,b]$ において連続である。

(2) φ は，(a,b) において，微分可能である。実際に，

$$\varphi'(x)=f'(x)-g'(x)=f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

である。

(3) 容易にわかるように，$\varphi(a)=\varphi(b)=0$ が成り立つ。

Rolleの定理によって，$a<\xi<b$，かつ，$\varphi'(\xi)=0$ なる数 ξ が存在する。このとき(2)から

$$0=f'(\xi)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \quad \text{すなわち} \quad f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \quad (a<\xi<b)$$

が得られる。

よって，平均値の定理は証明された。

平均値の定理を用いて証明される定理として，次の2つがあげられている。

28 定理　f が，定義域のすべての x に対して，$f'(x)=0$ が成り立つとき，かつ，そのときに限り，f は定数関数である。（証明略）

29 定理　閉区間で第1次導関数が一致するような関数は，定数のみ異なる。（証明略）

26. 関数の極値

26　100mの長さの垣で，できるだけ大きい長方形の面を囲みたい。別のことばでいえば，すべての長方形の中で，その周囲が全部で100mであり，その面積が最大であるものが存在すると仮定して，それを求める。（解略）　答，1辺の長さが25mの正方形

(21) 関数　$f(x)=-x^2+50x$ の，点 $x_8=25$ における第1次導関数を定めよ。

30 定義　関数 f と点 x_0 について，$x\neq x_0$，かつ，$x_0-\epsilon<x<x_0+\epsilon$ なるすべての x に

ついて，$\begin{cases} f(x)<f(x_0) \\ f(x)>f(x_0) \end{cases}$ が成り立つような $\varepsilon>0$ が存在するとき，f は，x_0 において

$\begin{cases} \text{極大値} \\ \text{極小値} \end{cases}$ をもつという。

この定義において，区間（$x_0-\varepsilon$，$x_0+\varepsilon$）は，f の定義域に属していることを仮定していることを注意しており，また，極大値および極小値を，まとめて，極値と定義している。

学習単位B20で定義された，関数 f の区間Ⅰにおける最大値，最小値，〔Ⅰにおける f の上限，下限〕と，ここに定義された極大値，極小値との差異を述べ，区間 $[a, b]$ において連続な関数 f の最大値は，f の，$[a, b]$ における最大の極大値，または，関数値 $f(a)$ または $f(b)$ のどれかであること，最小値についても同様であることを述べている。

27. 極値のための必要条件

31 定理　関数 f が，x_0 において極値をもち，かつ，x_0 において微分可能ならば，$f'(x_0)=0$ が成り立つ。（証明略）

ここで，この定理の幾何学的意味が示されている。ついで，$f(x)=x^3$ における $f'(0)=0$ の例を用いて，この定理は，$f'(x_0)=0$ は，点 x_0 において f の極値が存在するために必要であるが十分ではないことを注意している。さらに，$f(x)=|x|$ は，点0において微分可能ではないが，その点において，極小値 $f(0)=0$ をもつことがあげられている。

関数

$$f(x)=\begin{cases} \frac{1}{2}x^2 & (x\leqq 2) \\ x-1 & (x>2) \end{cases}$$

は，点2において，連続ではない（したがってこの点においては微分可能ではない）が，区間 $1<x<3$ の，$x\neq 2$ なるすべての x に対して，$f(x)<f(2)=2$ が成り立つから，この点で極大値をもつ，などの例も示されている。

(22) a）関数　$y=x^2-2$，　$y=-x^2+3$，　$y=x^3+2$，　$y=-\frac{1}{2}x^3-1$　のそれぞれのグラフにおいて，x 軸に平行な接線を作図せよ。

b）関数　$f(x)=\dfrac{x-1}{x+1}$（$x\neq -1$）は極値をもたない。なぜか。

28. 極値のための十分な基準

32 定理　関数 f に対して次の条件が成り立つものとする。

(1)　f は，x_0 の近傍において，微分可能である。

(2)　$f'(x_0)=0$

(3) f' は，点 x_0 において，符号を変える。

このとき，fは，点 x_0 において極値をもち，f' が，xの増加とともに正から負の値に移るときには，極大であり，f'が，xの増加とともに負から正の値に移るときは，極小である。

証明

f'が，正から負の値へ移る場合について証明する。

仮定によって，ある$\varepsilon>0$が存在し，

a) fは，区間$(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)$ において微分可能であり，

b) $x_0-\varepsilon<x<x_0$ なるすべてのxについて $f'(x)>0$

$x_0<x<x_0+\varepsilon$ なるすべてのxについて $f'(x)<0$ である

ことが成り立つ。このとき，$0<\delta<\varepsilon$ なるδが存在するならば，fは，区間$[x_0-\delta, x_0+\delta]$において連続であり，それによって，平均値の定理の仮定は満足されている。したがって，区間 $[x_0-\delta, x_0+\delta]$ の $x\neq x_0$ なるすべてのxに対して，$x<\xi<x_0$ または $x_0<\xi<x$ で，かつ，

$$f(x)-f(x_0)=(x-x_0)f'(\xi)$$

なるξが存在する。いま

$$x-x_0<0 \quad \text{に対して} \quad f'(x)>0$$

かつ

$$x-x_0>0 \quad \text{に対して} \quad f'(x)<0$$

ならば

$$(x-x_0)f'(\xi)<0$$

が成り立つ。これより，$x_0-\delta\leqq x<x_0$ または $x_0<x\leqq x_0+\delta$ なるすべてのxに対して

$$f(x)-f(x_0)<0 \quad \text{すなわち} \quad f(x)<f(x_0)$$

である。これは，fが，x_0において極大値をもつことを示す。

$\boxed{27}$ 関数 $f(x)=x^4$ の第1次導関数は，$f'(x)=4x^3$ である。

$$f'(0)=0$$

$x<0$ のとき $f'(x)<0$ また，$x>0$ のとき $f'(x)>0$

が成り立つから，これは，点0において極小値をもつ。

29. 極値の存在のための，さらに広い十分な基準

33 定理， fを，点x_0において，2回微分可能な関数とする。$f'(x_0)=0$ かつ $f''(x_0)\neq0$ のとき，fは，x_0において極値をもつ。さらに，$f''(x_0)<0$ では極大値，$f''(x_0)>0$ では極小値である。

証明

仮定によって$f''(x_0)$は存在する。このとき，x_0の一定の近傍において，f'は存在しなければならない。$f''(x_0)<0$ ならば，f'は点x_0において単調に減少する。$f'(x_0)=0$であることから，f'はx_0において，xの増加に伴って，正から負の値に移る。定理C32により，fはx_0において極大値をもつ。$f''(x_0)>0$ のときも同様に証明される。

定理C33は，（定理C32と同じく），極値の存在性に対する十分条件であって，必要条件ではないことを注意している。

$\boxed{28}$ 関数 $f(x)=\dfrac{x}{1+x^2}$ の極値を求めよう。（解略）

答　極大値 $f(1)=\frac{1}{2}$，　極小値 $f(-1)=-\frac{1}{2}$

ここで，以上の要約として，次のようにまとめてある。

要約

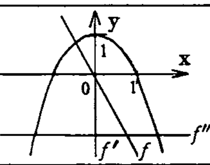
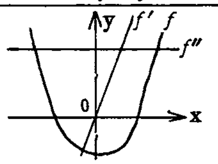
fを，x_0において微分可能な関数とする。fが，x_0において極値をとるための

必要条件（しかし，十分ではない）　　$f'(x_0)=0$

十分条件（しかし，必要ではない）

a）$f'(x_0)=0$　かつ，f'が，x_0において符号を変える。（fは，x_0の近傍において微分可能であるとの仮定のもとに）

b）$f'(x_0)=0$　かつ　$f''(x_0)\neq 0$　（fが，x_0において，2回微分可能であるとの仮定のもとに）

<table>
<tr><th></th><th>x</th><th>$f'(x)$</th><th>$f''(x)$</th><th>$f(x_0)$</th><th colspan="2">例と図解</th></tr>
<tr><td rowspan="3">第1の場合</td><td>$x_0-\varepsilon<x<x_0$</td><td>正</td><td></td><td rowspan="3">極大</td><td rowspan="3">
</td><td rowspan="3">$f(x)=-x^2+1$
$x_0=0$</td></tr>
<tr><td>x_0</td><td>0</td><td>負</td></tr>
<tr><td>$x_0<x<x_0+\varepsilon$</td><td>負</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="3">第2の場合</td><td>$x_0-\varepsilon<x<x_0$</td><td>負</td><td></td><td rowspan="3">極小</td><td rowspan="3">
</td><td rowspan="3">$f(x)=x^2-1$
$x_0=0$</td></tr>
<tr><td>x_0</td><td>0</td><td>正</td></tr>
<tr><td>$x_0<x<x_0+\varepsilon$</td><td>正</td><td></td></tr>
</table>

区間［a，b］における，関数fの極値を求めるためには，次の方法で行なう。

1. 第1次導関数f'（さらに必要あればf''も）を求める。
2. ［a，b］におけるf'の零点を計算する。
3. その零点のそれぞれに対して，（定理C32，または，定理C33を用いて）fがそこで極値をもつかどうかを決定する。
4. 場合によっては，［a，b］の内部で，fが微分可能でない点，または，連続でない点において，極値をとるかどうかをしらべる。

［a，b］において連続な関数の最大小値は，求められた極値に，さらに，関数値$f(a)$または$f(b)$のそれぞれと比較して求められる。

30. 凸と凹

関数 $f(x)=x^3$ のグラフ，および，$x=-1, 0, 1$ における接線をつくり，

$x=-1$ のある近傍においては，曲線は，接点を除いて，接線の下側にある。

$x=0$ のある近傍においては，曲線は，接線の上側にも下側にもある。

$x=1$ のある近傍においては，曲線は，接点を除いて，接線の上側にある，

こと，および，$0<h<1$ なる任意の h について

$$f'(-1-h)>f'(-1+h) \quad \text{および，} \quad f'(1-h)<f'(1+h)$$

であることを例示し，次の定義をあげている。

34 定義 x_0 の近傍において微分可能な関数 f で，f' が x_0 において $\left\{\begin{matrix}\text{単調に増加する}\\ \text{単調に減少する}\end{matrix}\right\}$ ならば，f は，x_0 において，$\left\{\begin{matrix}\text{凸}\\ \text{凹}\end{matrix}\right\}$ であるという。

ここで，凸，または，凹の幾何学的な意味を，一般的に説明しているが，その1つとして，x_0 において凸である関数では，そのグラフは，x_0 の点を除いて，x_0 における接線の上側にあることを，次のように述べている。

仮定によって，f は，x_0 のある近傍において微分可能であり，かつ，f' は，x_0 において単調に増加する。このとき，$\varepsilon>0$ が存在し，f は，$[x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon]$ において連続で，かつ，すべての x に対して，

(1) $x_0-\varepsilon<x<x_0$ のとき $f'(x)<f'(x_0)$

(2) $x_0<x<x_0+\varepsilon$ のとき $f'(x)>f'(x_0)$

が成り立つ。$f'(x_0)$ は，f のグラフの，点 x_0 における接線の傾きである。いま，区間 $(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)$ において，$x\neq x_0$ なる任意の点 x を考察する。$g(x)$ を，この点 x における接線の縦座標とすれば，

$$f'(x_0)=\frac{g(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

を得る。平均値の定理によって，区間 $(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)$ の中の $x\neq x_0$ なるすべての x に対して

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(\xi)$$

が成り立つような ξ が存在する。$x<\xi<x_0$ ならば，(1)によって $f'(\xi)<f'(x_0)$ であり，したがって

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} < \frac{g(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

である。$x-x_0<0$ であるから，これより

$$f(x)-f(x_0)>g(x)-f(x_0) \quad \text{すなわち，} \quad f(x)>g(x)$$

を得る。$x_0<\xi<x$ ならば，(2)によって，$f'(\xi)>f'(x_0)$ であり，したがって

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} > \frac{g(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

であり，これより，

$$f(x) > g(x)$$

である。

[29] 関数 $f(x)=x^3$ は，$x>0$ ($x<0$) なるすべての x に対して，凸 (凹) である。(説明略)

31. 関数の第2次導関数の幾何学的意味

35 定理　f を，点 x_0 において2回微分可能な関数とする。$\left\{\begin{array}{l} f''(x_0)>0 \\ f''(x_0)<0 \end{array}\right\}$ ならば，f は x_0 において，$\left\{\begin{array}{c} \text{凸} \\ \text{凹} \end{array}\right\}$ である。(証明略)

[30] 関数 $f(x)=\frac{1}{3}x^3+x^2+1$ では，$x>-1$ ($x<-1$) なるすべての点において，凸 (凹) である。(説明略)

ここで，注意として，定理C35は，関数の凸 (凹) に対する十分な基準を与えるものであるが，条件 $f''(x_0)\neq 0$ は，必要ではないことを，$f(x)=x^4$ における $f''(0)=0$ を例としてあげている。そして，$f''(x_0)=0$ の場合については，定理C35は，何も与えておらず，まだここでは，$f''(x_0)=0$ については，未解決であるとしている。

36 定義　x_0 の近傍において微分可能な関数 f について，f' が x_0 において極値をもつならば，f は，点 x_0 において，変曲点をもつという。

定理C31. 32. 33 から，変曲点についての条件を，次のように与えている。

f を，x_0 において，2回 (または3回) 微分可能であるとする。

f が，x_0 において，変曲点をもつための

必要条件 (しかし，十分ではない) は

$$f''(x_0)=0$$

十分条件 (しかし，必要ではない) は

a) $f''(x_0)=0$　かつ，f'' が x_0 において符号を変える (f'' が x_0 の近傍において存在するとの仮定のもとに)

b) $f''(x_0)=0$　かつ，$f'''(x_0)\neq 0$

である。

㉓ 次のことがらの理由を述べよ。

1) f が，x_0 において変曲点をもつならば，点 $P_0(x_0, f(x_0))$ は，f のグラフを，つねに

凹に曲がった部分と凸に曲がった部分とに分ける。〔fが，x_0において凸（凹）のときに，fのグラフは点x_0において，「凸（凹）に曲がっている」ともいうことが，定義C34のつぎに述べられているが，区間については，どこにも，明記されてはいない。—訳者注—〕

2）$P_0(x_0, f(x_0))$が，曲線の変曲点ならば，P_0における接線は，この点において，曲線を貫通する。

㉔ 関数　$f(x)=x^5$ が，点0において変曲点をもつことを，どうして定めるか。

曲線の変曲点における接線を，変曲接線と定義している。特に，fが，x_0 において変曲点をもち，かつ，$f'(x_0)=0$　のときには，水平変曲接線なる用語を用いている。

32. 関数の研究，曲線の議論

関数の状態を図解するには，その関数の，極値，変曲点，零点，極点　などをしらべること，また，場合によっては，その無限遠における状態をしらべること，を述べ，次の例題をあげている。

$\boxed{31}$ 関数　$f(x)=\frac{1}{6}(3x^4+4x^3-12x^2+5)$　の零点，極値，変曲点を計算し，区間［−3，2］において，グラフを描く。（以下略解）

1）零点

$3x^4+4x^3-12x^2+5=0$　より　$(x-1)^2(3x^2+10x+5)=0$

これから，零点は，$x_1=x_2=1$，$x_3=\frac{1}{3}(-5+\sqrt{10})\fallingdotseq-0.61$，$x_4=\frac{1}{3}(-5-\sqrt{10})\fallingdotseq-2.72$

2）極値

$f'(x)=2x(x^2+x-2)$　　　　$f''(x)=2(3x^2+2x-2)$

$f'(x)=0$ より　$x_5=0$，$x_6=1$，$x_7=-2$，で，$f''(0)<0$，$f''(1)>0$，$f''(-2)>0$

極大値　$f(0)=\frac{5}{6}$　　　極小値　$f(1)=0$，　$f(-2)=-4.5$

3）変曲点

$3x^2+2x-2=0$　より　$x_8\fallingdotseq0.39$，　$x_9\fallingdotseq-2.26$

$f'''(x)=2(6x+2)$　で，　$f'''(x_8)>0$，　$f'''(x_9)<0$

fは，点x_8およびx_9において，それぞれ，変曲点をもつ。

4）関数のグラフ

以上のほか，$f(2)\fallingdotseq6.2$，$f(-3)\fallingdotseq5.3$（グラフ略）

最後に，零点の多重性の幾何学的意味について，次のようにまとめている。

有理整関数fが，k重の零点x_0をもつならば，すべてのxに対して

$$f(x)=(x-x_0)^k g(x)\ ,\quad g(x_0)\neq0$$

なる有理整関数gが存在し，これを微分することによって，

$$f'(x)=(x-x_0)^{k-1}\ \{k g(x)+(x-x_0)g'(x)\}$$

を得るから，x_0は，第1次導関数f'の（k−1）重の零点となる。

例えば，x_0が，fの２重の零点ならば，x_0は，f'の１重の零点である。したがって $f''(x_0)\neq 0$で，fは，x_0において極値をもち，fのグラフは，この点でｘ軸に接する。

また，x_0が，fの３重の零点ならば，x_0は，f''の１重の零点である。したがって，$f'''(x_0)\neq 0$で，fは，点x_0において変曲点をもち，曲線は，点x_0において，ｘ軸を切る。

Ｄ章　積分法の初歩

定積分

1. 復習と，積分の概念の準備

ある線分の長さを単位としてえらぶことにより，どんな線分にも，その長さに対して，１つの実数が一意的に対応する。また，この単位線分を１辺とする正方形の面積が，面積の単位として利用される。こうして，直線図形に対しては，その面積が求められ，対応

多角形　→　面積

は，次の条件を満足する。

1. 合同な多角形は，等しい面積をもつ。
2. 多角形Ｆを，１つの対角線で，多角形F_1とF_2に分解するならば，Ｆの面積は，F_1とF_2の面積の和に等しい。
3. 多角形の面積に対する数は，つねに，負でない実数である。
4. 面積の単位に対する数は，１である。

直線図形について，上のことがらを述べたあとで，曲線図形，例えば，円の面積の計算に言及し，上の事実だけでは，その面積の決定には，困難が生ずることを述べ，このためには解析的方法，極限の過程が必要であるとし，以下の考察の導入を試みている。

① ａ）平行四辺形，ｂ）三角形，ｃ）台形　の面積は，長方形の面積から，どのようにして得られるか。

定積分への導入段階として，次の内容が，かなりくわしく記述されている。

関数fのグラフと，ｘ軸，および，直線$x=a$，$x=b$　で囲まれた点集合Ｆを考え，これを，すでに面積がわかっている図形によって，近似的に表わすことを考える。

このため，区間［ａ，ｂ］を，部分区間（長さが等しいことを要しない）に分割する。

任意の自然数ｎと，任意の数　x_0，x_1，x_2，…… x_{n-1}，x_nを

$$a=x_0<x_1<x_2<\cdots\cdots<x_{n-1}<x_n=b$$

なるようにえらび，これによって，区間［ａ，ｂ］をｎ個の部分区間に分割し，これらの分点において，ｙ軸に平行線をひく。それぞれの部分区間$[x_{i-1}, x_i]$（$i=1, 2, \cdots; n$）にお

いて，任意の数ξ_iを，$x_{i-1} \leqq \xi_i \leqq x_i$ なるようにえらび，それぞれの区間において，辺の長さが，$x_i - x_{i-1}$ および$f(\xi_i)$で，したがって，面積が，$f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$ なる長方形を考察する。このとき，

$$S_n = f(\xi_1)(x_1 - x_0) + f(\xi_2)(x_2 - x_1) + \cdots\cdots + f(\xi_n)(x_n - x_{n-1})$$
$$= \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$

は，Fの面積の近似値である。このS_nは，nを大きくすればするほど，また，部分区間の長さを小さくすればするほど，Fの面積に次第に近づいていく。

いま，自然数nに対して，区間［a，b］をn個の部分区間に分割するものとし，その分割を，nの増加とともに，すべての部分区間の長さが，任意に与えられた小さな正数εよりも小さくなるようにえらび，このような分割それぞれに対して，その都度，中間点ξ_iのえらび方を完全に任意にして，和S_nをつくれば，Fの面積に対する近似値の数列(S_n)を得る。こうしてつくられた数列(S_n)が，すべて収束し，かつ，つねに等しい数に収束することが示されるとき，この数を，Fの面積として対応させる。

上の一般的な考え方を，区間［0，b］における関数$f(x) = x^2$ のグラフと，x軸，および直線　$x = b\ (b > 0)$によって区切られた点集合を例としてとりあげ，以下の順序で，くわしく扱われている。

区間［0，b］の分割

$$x_i = \frac{ib}{n} \quad (x_0 = 0\ ,\ x_n = b) \qquad \text{部分区間の長さ}\quad l_n = x_i - x_{i-1} = \frac{b}{n}$$

中間点のえらび方

部分区間$[x_{i-1}, x_i]$のそれぞれにおいて

$$\xi_i = \frac{x_{i-1} + x_i}{2} = \frac{1}{2}\left\{(i-1)\frac{b}{n} + i \cdot \frac{b}{n}\right\} = \frac{b}{2n}(2i-1)$$

をえらぶ。このとき，ξ_iに対する関数値は

$$f(\xi_i) = \frac{b^2}{4n^2}(2i-1)^2$$

で，第i番目の長方形$(i = 1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n)$の面積は，

$$f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = \frac{b^2}{4n^2}(2i-1)^2\ \frac{b}{n} = \frac{b^3}{4n^3}(2i-1)^2$$

である。

和S_nをつくる。

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{b^3}{4n^3}(2i-1)^2 = \frac{b^3}{3}\left(1 - \frac{1}{4n^2}\right)$$

このようにして，自然数nそれぞれについて，一意的に定まった和Snが対応する。数列

$$(S_n) = \left(\frac{b^3}{3}\left(1 - \frac{1}{4n^2}\right)\right)$$

は収束し，かつ

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{b^3}{3}$$

である。

あとでわかるように，部分区間の長さが n の増加とともに零に収束するようないかなる分割に対しても，また，中間点をどのようにえらんでも，つねに，同じ極限値を得ることから，この数 $\frac{b^3}{3}$ を与えられた点集合の面積とする。

2. 定積分の定義

定義に先立って，学習単位D 1で述べられたことを，さらに厳密な形で書かれている。まず，その概略を記す。

区間 $[a, b]$ において連続である任意の関数 f が与えられたとする。

区間 $[a, b]$ の，n 個の部分区間への分割 z_n とは

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots\cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

なるように任意にえらばれた数　$x_0, x_1, x_2, \cdots\cdot, x_{n-1}, x_n$ の（有限）数列を意味するものと考える。第 i 番目の部分区間の長さは，差

$$x_i - x_{i-1} \qquad (i = 1, 2, \cdots\cdots, n)$$

に等しい。数 $x_i - x_{i-1}$ のうちの最大のもの，すなわち，分割 z_n の部分区間の最大の長さを，l_n で表わす。z_n が $[a, b]$ の分割であるとき，

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$

なる数を，z_nに属する分割和という。ここに，ξ_iは，$x_{i-1} \leqq \xi_i \leqq x_i$ なる，任意にえらばれた数である。ξ_i のえらび方に応じて，与えられた分割 z_nに対し，任意個数の分割和が得られるが，ξ_i が一度び定まれば，z_n に対して，数 S_n は一意的に決定する。それぞれの自然数 n に対して，区間 $[a, b]$ の分割 z_n が与えられるならば，区間 $[a, b]$ に対する分割列 (z_n) が得られる。分割列の 1 つ 1 つの分割における分点を

$$a = x_0^{(n)}, x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \cdots\cdots, x_{n-1}^{(n)}, x_n^{(n)} = b$$

と定める。

それぞれの分割 z_n に対して，最大の区間の長さが存在するから，それぞれの分割列 (z_n) には，一意的に，最大の区間の長さの数列 (l_n) が対応する。この数列 (l_n) が零数列であるとき，この分割列を，特別分割列という。

分割列 (z_n) の，それぞれの分割に対して，その部分区間 $[x_{i-1}^{(n)}, x_i^{(n)}]$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$ において，1つの数 $\xi_i^{(n)}$ を，$x_{i-1}^{(n)} \leqq \xi_i^{(n)} \leqq x_i^{(n)}$ なるようにえらび，これらの数 $\xi_i^{(n)}$ によって，それぞれの分割に対して，和

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i^{(n)})(x_i^{(n)} - x_{i-1}^{(n)})$$

をつくれば，それぞれの分割列 (z_n) には，分割和の数列 (S_n) が対応する。

さきの例，$f(x) = x^2$，$[0, b]$　においては，$[0, b]$ の分割列の第 n 番目の分割は，

分点

$$x_0^{(n)}=0,\quad x_1^{(n)}=\frac{b}{n},\quad x_2^{(n)}=\frac{2b}{n},\quad \cdots\cdots,\quad x_{n-1}^{(n)}=\frac{(n-1)b}{n},\quad x_n^{(n)}=\frac{nb}{n}=b$$

によって与えられ，このとき，$\lim_{n\to\infty} l_n=\lim_{n\to\infty}\frac{b}{n}=0$ であるから，この分割列は，特別分割列である。この特別分割列に対して，特別分割和の数列

$$(S_n)=\left(\frac{b^3}{3}\left(1-\frac{1}{4n^2}\right)\right)$$

がつくられ，(S_n)は，収束する数列であることが確かめられる。

1 定理，　fが，区間 $[a,b]$ において連続な任意の関数とすれば，特別分割列をどのようにえらんでも，また，その中間点をどのようにえらんでも，それに属する分割和の数列は，つねに，かつ，確かに，1つの同じ数 g に収束する。（証明なし）

ここで，定積分の定義が，次のように述べられている。

定理D1における数 g を，関数 f の，区間 $[a,b]$ における定積分といい $\int_a^b f(x)dx$ で表わす。

区間 $[a,b]$ に対して，ある特別分割列をえらび，すなわち，数 $x_i^{(n)}$を，$x_0^{(n)}=a$，$x_n^{(n)}=b$，かつ，$x_{i-1}^{(n)}<x_i^{(n)}$ （$i=1,2,\cdots\cdots,n$）なるようにし，かつ，定数 $\xi_i^{(n)}$を $x_{i-1}^{(n)}\leqq\xi_i^{(n)}\leqq x_i^{(n)}$ なるようにえらぶならば

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i^{(n)})(x_i^{(n)}-x_{i-1}^{(n)})=\int_a^b f(x)dx$$

である。

この定義によって，定理D1を次のように，いいかえている。

区間 $[a,b]$ において連続な任意の関数 f に対して，定積分 $\int_a^b f(x)dx$ が存在する。

ついで，積分の下端，上端，被積分関数，積分変数，積分区間　の用語が，ふつうのように定義されているが，その全文は省略する。

2 定義　　fが区間 $[a,b]$ において連続な関数で，その関数値が $[a,b]$ において負でないならば，fのグラフ，x軸，および，直線 $x=a$，$x=b$で囲まれた面分の面積Aを，区間 $[a,b]$ における関数 f の定積分とする。すなわち

$$A=\int_a^b f(x)dx$$

である。

3. 例題

$\boxed{1}$ 関数 $f(x)=2x+1$ のグラフ，x軸，および，直線 $x=0$，$x=3$　で囲まれた面分の面積を計算しよう。（定積分を用いないで，台形の面積の公式を用いている）　答　12

[2] 例題Ｄ１と同じ問題を考えよう。

略解　定義Ｄ２によって，台形の面積は，　$A=\int_0^3 (2x+1)\,dx$　である。

特別分割列の選定

$x_0^{(n)}=0,\ x_1^{(n)}=\frac{3}{n},\ x_2^{(n)}=2\cdot\frac{3}{n},\ \cdots\cdots,\ x_i^{(n)}=i\cdot\frac{3}{n},\ \cdots,x_n^{(n)}=n\cdot\frac{3}{n}=3$ とする。

このとき　$x_i^{(n)}-x_{i-1}^{(n)}=\frac{3}{n}$　$(i=1,2,\cdots\cdots,n)$　である。

中間点の選定

$\xi_i^{(n)}=x_i^{(n)}=i\cdot\frac{3}{n}$　なるようにえらべば，

$f(\xi_i^{(n)})=i\cdot\frac{6}{n}+1,\qquad f(\xi_i^{(n)})(x_i^{(n)}-x_{i-1}^{(n)})=\frac{18}{n^2}\,i+\frac{3}{n}$　である。

数列 (S_n) の構成

$$S_n=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{18}{n^2}\,i+\frac{3}{n}\right)=3+\frac{18}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i=3+9\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

$$A=\int_0^3 (2x+1)\,dx=\lim_{n\to\infty}\left[3+9\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]=12$$

[3] $\int_a^b \frac{dx}{x^2}$　$(0<a<b)$　を計算しよう。

解　(z_n)を，区間 $[a,b]$ に対する完全に任意な特別分割列とする。この分割列の第 n 番目の分割は，分点

$$x_0^{(n)}=a,\ x_1^{(n)},\ x_2^{(n)},\ \cdots\cdots,\ x_{n-1}^{(n)},\ x_n^{(n)}=b$$

で与えられるものとする。この例題においては，それぞれの部分区間 $[x_{i-1}^{(n)},x_i^{(n)}]$ $(i=1.\ 2,\cdots,n)$ において，中間点として数

$$\xi_i^{(n)}=\sqrt{x_i^{(n)}\cdot x_{i-1}^{(n)}}$$

をえらぶのが適当である。このとき

$$f(\xi_i^{(n)})=\frac{1}{(\xi_i^{(n)})^2}=\frac{1}{x_i^{(n)}\cdot x_{i-1}^{(n)}}$$

$$f(\xi_i^{(n)})(x_i^{(n)}-x_{i-1}^{(n)})=\frac{x_i^{(n)}-x_{i-1}^{(n)}}{x_i^{(n)}\,x_{i-1}^{(n)}}=\frac{1}{x_{i-1}^{(n)}}-\frac{1}{x_i^{(n)}}$$

であり，かつ，

$$S_n=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{x_{i-1}^{(n)}}-\frac{1}{x_i^{(n)}}\right)$$

$$=\left(\frac{1}{x_0^{(n)}}-\frac{1}{x_1^{(n)}}\right)+\left(\frac{1}{x_1^{(n)}}-\frac{1}{x_2^{(n)}}\right)+\cdots\cdots+\left(\frac{1}{x_{n-1}^{(n)}}-\frac{1}{x_n^{(n)}}\right)$$

$$=\frac{1}{x_0^{(n)}}-\frac{1}{x_n^{(n)}}=\frac{1}{a}-\frac{1}{b}$$

である。

中間点をこのように特別にえらぶことによって，分割和　S_n　は，n に無関係である。したがって，このようにしてつくられたどんな数列 (S_n) に対しても，極限値は

$$\lim_{n\to\infty} S_n=\frac{1}{a}-\frac{1}{b}$$

である。よって

$$\int_a^b \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{a} - \frac{1}{b}$$

である。

② $\int_{-1}^{3}(x+3)\,dx$ および $\int_0^4 2x\,dx$ を計算せよ。同時に，また，ここで考えている面分を示し，その面積を，すでに知っている面積の公式によって，かんたんに計算してみよ。

③ 関数 $f(x)=x^3$ のグラフ，x軸，および，直線 $x=b$（$b>0$）で囲まれた面分の面積を計算せよ。

4. 定積分の若干の性質

Ⅰ。［a，b］において連続な関数の定積分 $\int_a^b f(x)dx$ は，与えられた関数 f と，積分の下端aと上端bによって一意的に決定する数であり，それは，積分変数の記号には関係しない。

たとえば，$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(z)dz = \int_a^b f(t)dt$ である。

Ⅱ。定積分 $\int_a^b f(x)dx$ に対する制限 $a<b$ は，次の定義を付加することによって除去される。

定義

f が，aにおいて定義されるとき，$\int_a^a f(x)dx=0$ とする。

$a<b$ で，$\int_a^b f(x)dx$ が存在するとき，$\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$ とする。

定積分は，その下端と上端を交換すると，符号が変る。

Ⅲ。 ここでは証明なしで述べるが，次の定理が成り立つ。

3 定理　f が，［a，b］において連続な関数で，cを区間［a，b］の任意の数とすれば，

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

である。（この定理には，幾何学的な意味づけが，説明されているが，省略する。）

Ⅳ

4 積分法の平均値の定理　f が区間［a，b］において連続な関数ならば

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a) \quad かつ \quad a \leqq \xi \leqq b$$

なる数 ξ が，つねに（少なくとも）1つは存在する。

数 $f(\xi)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ を，関数 f の，区間［a，b］における積分平均値という。

（この定理の証明も，ここではなされていない。ただ，幾何学的な意味が，実例を用いて行なわれているが，ここでは省略する。）

$\boxed{4}$ $\displaystyle\int_a^b \frac{dx}{x^2}=\frac{1}{\xi^2}(b-a)$ が成り立つ数ξを，区間$[a,b]$（$0<a<b$）において求めよう。

（解略）　答　$\xi=\sqrt{ab}$

不定積分

5. 原始関数と不定積分

ここでの考察課題は，次の質問に答えることである。

1. 与えられた関数fに対して，$F'=f$　なる関数Fが存在するか。
2. もし，存在すれば，このような関数Fを，いかにして求めるか。

微分法の知識によって，一定の（有理）関数fに対しては，直ちに，$F'=f$　なる関数Fを求めることができる。

$\boxed{5}$ a）$f(x)=2x$，$F_1(x)=x^2$，$F_2(x)=x^2+1$，$F_3(x)=x^2-1$

b）$f(x)=3x^2$，$F_1(x)=x^3$，$F_2(x)=x^3+3$，$F_3(x)=x^3-2$

c）$f(x)=3x^2+2x$，$F_1(x)=x^3+x^2$，$F_2(x)=x^3+x^2+C$　（Cは任意の実数）

▷5 定義　区間Iにおける関数fがあって，Iのすべてのxに対して，$F'(x)=f(x)$ が成り立つとき，関数Fを，Iにおけるfの原始関数という。

ここで，$(F_1(x)+C)'=F_1'(x)=f(x)$　なることから，F_1 がfの原始関数ならば，F_1+C　もfの原始関数であること，fに少なくとも1つの原始関数が存在するならば，fの原始関数は無限個存在し，それらは，定数だけのちがいであること（定理C29参照）が述べられている。

▷6 定義　区間Iにおいて定義された関数fの不定積分 $\int f(x)dx$ とは，Iにおけるfのすべての原始関数の集合である。

ついで，積分定数の定義，および，演算としての積分の定義がなされ，また，

$$f(x)=(F(x)+C)'=F'(x) \quad と \quad \int f(x)dx=F(x)+C$$

とは，同じ事実を異なった記法で表現したものと述べている。

$\boxed{6}$ a）$\int 2x\,dx=x^2+C$　　b）$\int x^2dx=\frac{1}{3}x^3+C$

c）$\int dx=\int 1dx=x+c$

d）$\int(3x^2+2x)dx=x^3+x^2+C$　　e）$\int\frac{dx}{x^2}=-\frac{1}{x}+C$　（$x\neq0$）

6. 積分定数の幾何学的意味

区間 I において定義された関数 f の不定積分 $\int f(x)dx = F(x) + C$ のグラフ表示として同じ点において等しい傾きの接線をもつすべての曲線群（いわゆる積分曲線）が得られ，積分定数Cは，この曲線群のパラメーターである。Cは，座標系において，これらの曲線の位置のみに関係し，その形には何ら影響を与えない。Cを定めるには，その曲線が通る1点を与えれば十分である。

$\boxed{7}$ 関数　$f(x)=2x$　の原始関数で，点1における関数値が－3であるものを求めよう。
（解略）　　　答　$F(x)=x^2-4$

④ 関数　$f(x)=\frac{1}{x^2}$　（$x \neq 0$）の原始関数で，点－2における関数値が$\frac{1}{2}$であるものを求めよ。

7. 積分法則

次の法則があげられている。証明は，法則(d)について，数学的帰納法によってと明記されている他は，すべてなされている。

$n \neq -1$　なるすべての整数に対して，

(a)　$$\int x^n\, dx = \frac{1}{n+1}\, x^{n+1} + C$$

が成り立つ。この法則は，$n \geqq 0$のときはすべてのxに対して，また，$n<-1$　のときには$x \neq 0$　なるすべてのxに対して成り立つ。（証明略）

関数f，または，fおよびgが，連続であるすべての区間について，

(b)　$$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx \qquad (k \neq 0)$$
(c)　$$\int (f(x)+g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

が成り立つ。（証明略）

公式(b)および(c)から数学的帰納法によって

(d)　$$\int (\sum_{\nu=1}^{n} k_\nu f_\nu(x))dx = \sum_{\nu=1}^{n} k_\nu \int f_\nu(x)dx\ ,\ \nu=1,2,\cdots\cdots,n \text{ に対して } k_\nu \neq 0$$

を得る。（証明なし）

$\boxed{8}$ a）$\int dx = \int 1dx = \int x^0\, dx = x + C$　　　b）$\int 5dx = 5x + C$

c）$\int xdx = \frac{1}{2}x^2 + C$　　　d）$\int 5x^3dx = 5\int x^3dx = \frac{5}{4}x^4 + C$

e）$\int (4x^2+3x-1)dx = 4\int x^2dx + 3\int xdx - \int dx = \frac{4}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - x + C$

f）$\int \frac{dx}{x^2} = \int x^{-2}\, dx = \frac{x^{-1}}{-1} + C = -\frac{1}{x} + C$　（$x \neq 0$）

g） $\displaystyle\int\frac{4x^4+5x^3+1}{x^3}\,dx=\int\left(4x+5+\frac{1}{x^3}\right)dx=2x^2+5x-\frac{1}{2x^2}+C$ （$x\neq 0$）

法則 (a)，(d) を用いて，すべての有理整関数について

$$\int(a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0)dx=\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}+\frac{a_{n-1}}{n}x^n+\cdots+\frac{a_1}{2}x^2+a_0x+C$$

を得る。

有理整関数の，すべての原始関数は，有理整関数である。しかし，有理分数関数の原始関数は，一般には，有理関数ではない。

微分積分法の主要定理

8. 上端の関数としての定積分

7 定理　fが，区間 $[a,b]$ において連続な関数ならば

$$\Phi(x)=\int_a^x f(t)\,dt$$

なる関数Φは，$[a,b]$ における，fの原始関数である。

略証　x_0を，区間 $[a,b]$ 内の任意の点とすれば

$$\Phi(x_0)=\int_a^{x_0}f(t)dt \quad \text{かつ} \quad \Phi(x_0+h)=\int_a^{x_0+h}f(t)dt\ ,\text{ここに}\ a\leqq x_0+h\leqq b$$

である。$h\neq 0$ に対して，

$$\frac{\Phi(x_0+h)-\Phi(x_0)}{h}=\frac{1}{h}\left[\int_a^{x_0+h}f(t)dt-\int_a^{x_0}f(t)dt\right]=\frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h}f(t)dt$$

が成り立つ。（定理Ｄ３）積分法の平均値の定理により，$x_0\leqq\xi\leqq x_0+h$，または $x_0+h\leqq\xi\leqq x_0$ なる数ξが存在して

$$\int_{x_0}^{x_0+h}f(t)dt=hf(\xi)$$

である。よって，このとき

$$\frac{\Phi(x_0+h)-\Phi(x_0)}{h}=f(\xi)$$

である。

ξは，区間 $[x_0,x_0+h]$ または $[x_0+h,x_0]$ の中の点であるから

$$\xi=x_0+\theta h\quad,\quad 0\leqq\theta\leqq 1$$

と書くことができ，fの連続性によって

$$\lim_{h\to 0}f(\xi)=\lim_{h\to 0}f(x_0+\theta h)=f(x_0)$$

が成り立ち，したがって，極限値

$$\lim_{h\to 0}\frac{\Phi(x_0+h)-\Phi(x_0)}{h}=\Phi'(x_0)$$

が存在し，かつ

$$\Phi'(x_0)=f(x_0)$$

である。よって，［a，b］のすべてのxに対して，　$\Phi'(x)=f(x)$　が成り立つ。

8> 定理　任意の連続関数には，原始関数が存在する。（定理D7から得られるとの説明のみがなされている。）

9．定積分の計算

9> 微分積分法の主要定理

fが，区間［a，b］において連続な関数で，Fが，fの1つの原始関数ならば，

$$\int_a^b f(x)\,dx=F(b)-F(a)$$

である。（証明略）

ここで，上の式の右辺を，$[F(x)]_a^b$ と書くことが述べられている。また，この定理ではa＜bの場合についての定理であるが，a＞bの場合にも成立することが述べられている。

9　a）$\int_0^2 x^2\,dx=[\frac{1}{3}x^3]_0^2=\frac{8}{3}$　　b）$\int_{-2}^0 x^2\,dx=[\frac{1}{3}x^3]_{-2}^0=0-(-\frac{8}{3})=\frac{8}{3}$

c）$\int_{-1}^3 (x^3+x^2+x+1)\,dx=[\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+x]_{-1}^3$

$=\frac{81}{4}+9+\frac{9}{2}+3-(\frac{1}{4}-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-1)=37\frac{1}{3}$

d）$\int_1^3 \frac{dx}{x^2}=[-\frac{1}{x}]_1^3=-\frac{1}{3}-(-1)=\frac{2}{3}$

⑤ 関数　$f(x)=x^3-6x^2+8x$の，区間［0，2］，［2，4］，［0，4］における定積分を計算せよ。

⑥（定理D9および学習単位D7の法則(b)と(c)を用いて）次のことを証明せよ。

fとgが，［a，b］において連続ならば，

$$\int_a^b kf(x)\,dx=k\int_a^b f(x)\,dx \qquad (k\neq 0)$$

$$\int_a^b (f(x)+g(x))\,dx=\int_a^b f(x)\,dx+\int_a^b g(x)\,dx$$

積分法の応用

10．面積の計算

fが区間［a，b］で連続な関数であり，かつ，区間［a，b］におけるfの関数値が負でないならば，fのグラフ，x軸，および，直線，x=a，x=b　で囲まれた面分の面積は，定義D

2によって，　$A=\int_a^b f(x)dx$　である。

$\boxed{10}$ 関数　$f(x)=x^3-9x^2+15x+30$　のグラフ，x軸，および，曲線の極大点，極小点を通り，y軸に平行な直線で囲まれた面分の面積を求めよう。　（解略）　　答　84

fが，$[a,b]$において連続な関数で，かつ，$[a,b]$のすべてのxに対して$f(x)\geqq 0$ならば，区間$[a,b]$の任意の分割z_nについて，$f(\xi_i^{(n)})\geqq 0$ かつ $x_i^{(n)}-x_{i-1}^{(n)}>0$　であることから，すべての分割和

$$S_n=\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i^{(n)})\,(x_i^{(n)}-x_{i-1}^{(n)})$$

は，負でない数である。このとき，定理B７から，このようなすべての数列(S_n)の極限値に対して，

$$\lim_{n\to\infty} S_n=\int_a^b f(x)dx\geqq 0$$

が導びかれる。

同様に，fが，区間$[a,b]$で連続な関数で，かつ，$[a,b]$における関数値が正でないならば，　$\int_a^b f(x)dx\leqq 0$　である。

さらに，次の定理が得られる。

定理　　fが，$[a,b]$において連続な関数で，$[a,b]$においてその関数値が負でなく（正でなく），かつ，$f(x_0)>0$　（$f(x_0)<0$）　なる数x_0が，$[a,b]$の中に少くとも１つ存在するならば，　$\int_a^b f(x)dx>0$　　（$\int_a^b f(x)dx<0$）

である。（説明なし）

連続関数fの関数値が，区間$[a,b]$において正でないならば，fのグラフ，x軸，および直線　$x=a$，$x=b$　で囲まれる面分の面積Aは，

$$A=\left|\int_a^b f(x)dx\right|=-\int_a^b f(x)dx$$

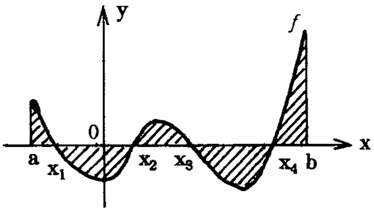
で定義される。

$\boxed{11}$　x軸と，放物線　$y=x^2-5x+4$　で囲まれる部分の面積を計算しよう。（解略）答　4.5

11.

例えば，図の斜線部の面積Aは，

$$A=\int_a^{x_1} f(x)dx+\left|\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx\right|+\int_{x_2}^{x_3} f(x)dx+\left|\int_{x_3}^{x_4} f(x)dx\right|+\int_{x_4}^{b} f(x)dx$$



である。

$\boxed{12}$ 区間[0，4]において，関数$f(x)=x^3-6x^2+8x$　とx軸によって囲まれた部分の面積を計算しよう。（解略）　　答　8

この例題に対する注意として，この面積が$\int_0^4(x^3-6x^2+8x)dx$　とは一致しないことをあげている。そして，連続関数fのグラフ，x軸，および，直線　$x=a$，$x=b$　によって囲まれる面分の面積は，$a<b$に対して，［a，b］のすべてのxに対して$f(x)\geqq 0$が成り立つとき，かつ，そのときに限り，定積分$\int_a^b f(x)dx$　と一致することを特に述べている。

12.

f_1およびf_2を，次の性質をもつ関数とする。

1）区間［a，b］において，連続である。

2）［a，b］のすべてのxに対して　　$f_1(x)\geqq f_2(x)$　である。

3）$f_1(a)=f_2(a)$　かつ　　$f_1(b)=f_2(b)$　である。

このとき，関数f_1およびf_2のグラフによって囲まれた面分の面積は，次の方法で定められる。

$$A=\int_a^b f_1(x)dx-\int_a^b f_2(x)dx=\int_a^b(f_1(x)-f_2(x))dx$$

直線$x=a$，$x=b$および，連続関数f_1およびf_2のグラフ（ただし，［a，b］のすべてのxに対して$f_1(x)\geqq f_2(x)$とする）で囲まれた部分の面積も

$$A=\int_a^b(f_1(x)-f_2(x))dx$$

で定められる。このとき，［a，b］において，関数f_1，f_2が零点をもっている場合でも同じである。（この場合については，$\varphi=f_1+C$　かつ$\psi=f_2+C$が［a，b］において零点をもたないように正数Cを見つけることができることを用い，y軸方向への平行移動によって説明されている。）

$\boxed{13}$ 放物線　$y=x^2$と$y=\frac{3}{4}x^2+1$　によって囲まれた面分は，どんな面積であるか。
（解略）　　答　$\frac{8}{3}$

⑦ 連続な偶関数に対して

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx=2\int_0^a f(x)dx$$

が成り立つ理由を述べよ。

$\boxed{14}$ 直線　$y=2x-5$　および　放物線　$y=x^2-4x$　によって囲まれた部分の面積を求めよう。（解略）　答　$\frac{32}{3}$

13. 変化する力による物理的仕事

Fを力の総量，sを動いた道のりの長さとすれば，仕事は，全体で

$$W = F \cdot s$$

である。

力Fが，$F = f(s)$なる連続関数fによって与えられ，この力が，直線上に沿って動く物体に作用するとき，点 s_1 から s_2 までに行なわれた力学的仕事は

$$W = \int_{s_1}^{s_2} f(s)\,ds$$

によって定められる。この積分を，力の線積分という。

ここには，例題 15，16 および，練習 ⑨ があげられているが，省略する。

E 章　ベクトル計算と解析幾何

移動、移動の加法

1. 移動

線分 $\overline{AB}$に対して，方向または向きを定めたとき，その線分を有向線分といい，その線分が，AからBへ向かうときには $\overrightarrow{AB}$，BからAへ向かうときには$\overrightarrow{BA}$と書く。図示するときには，その終点に矢印をつけて表示する。

有向線分$\overrightarrow{AB}$は，その始点Aと終点Bの指定によって決定する。また，始点，長さ，方向向きを指定することによっても決定する。

平面上で，有向線分$\overrightarrow{AB}$が与えられたならば，この平面で，Aと異なる任意の点Cに対して，有向線分$\overrightarrow{CD}$が，$\overrightarrow{AB}$と等しい長さ，かつ，同じ方向，向きをもつような点Dがただ1つ存在する。

AおよびCを原点，BおよびDを像点というならば，上の方法によって，平面上の各点はその像点に対応し，さらに，これは，可逆的一意的である。したがって，これは，平面のそれ自身の上への可逆的一意的写像を定める。これを，移動という用語で表わそう。

1 定義　2つの有向線分$\overrightarrow{AB}$と$\overrightarrow{CD}$は，次の各場合に，平行で等しい。

a) 点A，B，C，D，が同一直線上になく，かつ，線分$\overline{AB}$が線分$\overline{CD}$に平行で，かつ，線分$\overline{AC}$が線分$\overline{BD}$に平行であるとき，

b) 点A，B，C，D，が同一直線上にあって，かつ，$\overrightarrow{AB}$と$\overrightarrow{EF}$，$\overrightarrow{CD}$と$\overrightarrow{EF}$が，ともに，a)により平行で等しいような点E，Fが存在するとき，

c)　A＝B　かつ　C＝D　のとき

▷2　定義　原点と像点によって決定されるすべての有向線分が，平行で等しいような，平面のそれ自身の上への可逆的一意的写像を，平面の移動という。

定義E 2は，つぎのようにいうこともできる。

平面の移動は，順序をもった点対（原点と像点）の集合である。そのおのおのは，1つの有向線分を定め，原点と像点によって定まるすべての有向線分は，平行で等しい。

これらの点対のそれぞれを，移動の代表という。

① $\overline{AB}$によって定められる移動による，P_1，P_2，…，P_6 の像点P'_1，P'_2，…，P'_6 を2つの三角定規を用いてしらべよ。

2.

有向線分による移動は，一意的に定められるから，平面の移動は，物理で扱われた意味における「ベクトル量」である。「ベクトル量」に対する考察はあとであげるが，一般的なベクトルの概念を明確にするには，移動の集合をくわしく研究しなければならない。

▷3　定義　原点と像点によって決定されるすべての有向線分が，平行で等しいような，空間の（直線の），それ自身の上への可逆的一意的写像を，空間の（直線の）移動という。

移動を，一般に，文字で，たとえば，$\mathfrak{a}$，$\mathfrak{b}$，$\mathfrak{c}$，$\mathfrak{x}$，などで表わし，図形的には，移動の代表によって定められる線分で表わす。移動の記号$\mathfrak{a}$には，その代表，たとえば，順序をもった点対〔A，B〕がその基礎にある。この場合に$\mathfrak{a}$に対して，記号$\overrightarrow{AB}$を用い，$\mathfrak{a}=\overrightarrow{AB}$と書く．$\overrightarrow{AB}$なる記号は，つねに，AがBに移る移動を意味し，有向線分$\overline{AB}$を意味しない。

	図　示	記　号	代　表
有向線分	$A \longrightarrow B$	$\overline{AB}$	——
移　動	$C \xrightarrow{\mathfrak{a}} D$	$\overrightarrow{CD}$ または $\mathfrak{a}$	〔C，D〕

移動 $\mathfrak{a}=\overrightarrow{AB}$ の代表に対応する有向線分の長さを，移動距離，または，移動の大きさといい，$|\mathfrak{a}|$ または $|\overrightarrow{AB}|$ で表わす。2つの移動 $\mathfrak{a}$ と $\mathfrak{b}$ が，同じ方向，同じ向きをもつとき，これらは，同じ向きといい，同じ方向で，異なった向きをもつとき，これらを，逆の向きという。特に，逆の向きで，等しい大きさの移動を，逆の移動という．$\overrightarrow{AB}$が1つの移動ならば，$\overrightarrow{BA}$は，$\overrightarrow{AB}$と逆の移動である。

② 直線aの移動$\overrightarrow{AB}$のそれぞれに対して，

a)　直線aを含む平面αの移動$\overrightarrow{AB}$は存在するか。

b) 空間の移動$\overrightarrow{AB}$は存在するか。

③ 直線aの移動$\overrightarrow{AB}$は，次の移動と，どこで区別されるか。

c) 平面αの移動　$\overrightarrow{AB}$

d) 空間の移動　$\overrightarrow{AB}$

④ 点AとBを含む平面αの移動のそれぞれに対して，AとBで定まる直線の移動が，対応するか。

3. 移動の加法

4 定理　　2つの移動をひきつづき行なった結果は，1つの移動である。

証明　2つの任意の移動を $\mathfrak{a}$ および $\mathfrak{b}$ とする。任意の2点A_1，A_2をえらび，移動$\mathfrak{a}$によるA_1・A_2の像点を，B_1，B_2 とし，また，これらの，移動 $\mathfrak{b}$ による像点をC_1，C_2 で表わす．すなわち，$\mathfrak{a} = \overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{A_2B_2}$，$\mathfrak{b} = \overrightarrow{B_1C_1} = \overrightarrow{B_2C_2}$ である。

$\mathfrak{a}$ と $\mathfrak{b}$ は可逆的一意的な移動であるから，$\mathfrak{a}$ と $\mathfrak{b}$ を，示された順序でひきつづき行なうことによって，各点は，1つの点に，可逆的一意的に対応づけられる。たとえば，点A_1とC_1，点A_2とC_2など。ここで，有向線分$\overline{A_1C_1}$ と $\overline{A_2C_2}$ が，点A_1とA_2のえらび方に関係なく，平行で等しいこと，すなわち，これらは，同一の移動を決定することが示されれば，定理は証明される。さて，

1. 点A_1，B_1，C_1は，同一直線上にはない
2. 点A_2は，A_1，B_1，C_1によって定められる平面α上にはない

場合にのみ証明しよう。

線分 $\overline{A_1B_1}$ と $\overline{A_2B_2}$ および $\overline{B_1C_1}$ と $\overline{B_2C_2}$ はそれぞれ平行であるから，点A_2，B_2，C_2はαに平行で，αと共有点をもたない平面βをつくる．有向線分$\overline{A_1B_1}$ と $\overline{A_2B_2}$，および，$\overline{B_1C_1}$ と $\overline{B_2C_2}$は平行で等しいことから，$\overline{A_1A_2} \mathbin{/\mkern-5mu/} \overline{B_1B_2}$および$\overline{B_1B_2} \mathbin{/\mkern-5mu/} \overline{C_1C_2}$が導びかれ，よって$\overline{A_1A_2} \mathbin{/\mkern-5mu/} \overline{C_1C_2}$ である。

$\overline{A_1C_1} \mathbin{/\mkern-5mu/} \overline{A_2C_2}$ なる関係は，これらの線分が，2つの直線に属し，この2直線は，一方では，互いに平行な平面α，βの上にあり，また，他方では，平行な直線A_1A_2とC_1C_2によって定まる平面γの上にあることから，導びかれる。これらの直線は，平面γ上の直線として，等しい方向をもち，それ故に，互いに平行である。よって，$A_1C_1 \mathbin{/\mkern-5mu/} A_2C_2$　ゆえに，$\overline{A_1C_1}$ と $\overline{A_2C_2}$ は，平行で等しい。

5 定義　$\mathfrak{a} = \overrightarrow{AB}$ および $\mathfrak{b} = \overrightarrow{BC}$ が，任意の2つの移動ならば，$\mathfrak{a}$ と $\mathfrak{b}$ をひきつづき行なった結果として生ずる移動 $\mathfrak{c} = \overrightarrow{AC}$ を，$\mathfrak{a}$ と $\mathfrak{b}$ の和という。

このことを，$\mathfrak{c} = \mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ または $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ と書く。

移動 $\mathfrak{a} = \overrightarrow{AB}$ と，その逆 $\mathfrak{b} = \overrightarrow{BA}$の和は，恒等写像$\overrightarrow{AA}$である。これを$\mathfrak{o}$で表わし零移動という。すべての移動 $\mathfrak{a} = \overrightarrow{AB}$ に対して，$\overrightarrow{AA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{AB}$ または，

$\mathfrak{o} + \mathfrak{a} = \mathfrak{a} + \mathfrak{o} = \mathfrak{a}$ が成り立つ。

$\boxed{1}$ 2つの移動 $\mathfrak{a} = \overrightarrow{AB}$ および $\mathfrak{b} = \overrightarrow{AC}$ について

$$|\mathfrak{a}| = 2.5\,\mathrm{cm},\quad |\mathfrak{b}| = 1.5\,\mathrm{cm},\quad \angle CAB = 35^\circ$$

である。

$\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ および $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = \overrightarrow{AD}$ を図形的に表わし，さらに，$|\mathfrak{a}+\mathfrak{b}|$，$\angle DAB$，$\angle CAD$ をしらべよ。（解略） 答 $\overline{AD} \fallingdotseq 3.8\,\mathrm{cm}$，角については，答なし

任意の移動 $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ に対して，次の関係式が成り立つ。

(1) $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = \mathfrak{b} + \mathfrak{a}$ （交換法則）

(2) $(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) + \mathfrak{c} = \mathfrak{a} + (\mathfrak{b} + \mathfrak{c})$ （結合法則）

(1)の証明 任意の点Aをえらび，点B, C, D, を，$\mathfrak{a} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$，かつ，$\mathfrak{b} = \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ なるように定める。このとき，

$$\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$
$$\mathfrak{b} + \mathfrak{a} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AC}$$

と書くことができる。

有向線分 $\overline{AC}$ は，移動 $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ を表わすとともに，移動 $\mathfrak{b} + \mathfrak{a}$ も表わす。すなわち，

$$\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = \mathfrak{b} + \mathfrak{a}$$

が成り立つ。

以上の考察の結果は，点Aのえらび方に無関係であるから，(1)の成立が証明された。

(2)の証明 点Aをえらび，点B，C，Dを，$\mathfrak{a} = \overrightarrow{AB}$，$\mathfrak{b} = \overrightarrow{BC}$，$\mathfrak{c} = \overrightarrow{CD}$ なるように定めて

$$(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) + \mathfrak{c} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD}$$
$$\mathfrak{a} + (\mathfrak{b} + \mathfrak{c}) = \overrightarrow{AB} + (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}) = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD}$$

であり，これから直ちに，

$$(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) + \mathfrak{c} = \mathfrak{a} + (\mathfrak{b} + \mathfrak{c})$$

が得られる。

⑤ 移動 $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ が，同じ向き，または，逆の向きであるとき，移動の加法の交換法則，結合法則に対する上の証明は成立するか。

⑥ 力の加法は，物理の授業では，「力の合成」という名称で学んだ。1点に作用する力の加法について，交換法則，結合法則が，同じように成立するかどうかをしらべよ。

(2)より，3つの移動の加法については，どのように括弧でくくってもよいこと，すなわち括弧は不必要である。

4. 移動の減法

6 定義　2つの任意の移動 $\mathfrak{b}$ および $\mathfrak{a}$ に対して，方程式 $\mathfrak{a}+\mathfrak{x}=\mathfrak{b}$ が成りたつような移動 $\mathfrak{x}$ を，$\mathfrak{b}$ と $\mathfrak{a}$ の差という。これを，$\mathfrak{x}=\mathfrak{b}-\mathfrak{a}$ と書く。

2　2つの移動 $\mathfrak{a}=\overrightarrow{AB}$ および $\mathfrak{b}=\overrightarrow{AC}$ に対して，

$$|\mathfrak{a}| = 2.5\,\mathrm{cm},\quad |\mathfrak{b}| = 1.5\,\mathrm{cm},\ \angle CAB = 35°$$

が成り立っている。$|\mathfrak{a}-\mathfrak{b}|$ をしらべよう。(解略)　　答 約 1.54 cm

移動の差の定義から，次の法則が導びかれる。

(I) $\mathfrak{a}-\mathfrak{o}=\mathfrak{a}$　　(II) $\mathfrak{o}-\mathfrak{a}=-\mathfrak{a}$

(III) $\mathfrak{a}=-(-\mathfrak{a})$　　(IV) $\mathfrak{b}-\mathfrak{a}=\mathfrak{b}+(-\mathfrak{a})$

(V) $-(\mathfrak{a}-\mathfrak{b})=-\mathfrak{a}+\mathfrak{b}$　　(VI) $-(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})=-\mathfrak{a}-\mathfrak{b}$

法則 I の証明　$\mathfrak{x}=\mathfrak{a}-\mathfrak{o}$ に対して，移動の差の定義によって，$\mathfrak{o}+\mathfrak{x}=\mathfrak{a}$ と書くことができる。$\mathfrak{o}+\mathfrak{x}=\mathfrak{x}$ であるから，$\mathfrak{x}=\mathfrak{a}$ となる。したがって，任意の移動 $\mathfrak{a}$ に対して，$\mathfrak{a}-\mathfrak{o}=\mathfrak{a}$ である。

法則 II の証明　$\mathfrak{x}=\mathfrak{o}-\mathfrak{a}$ に対して，$\mathfrak{a}+\mathfrak{x}=\mathfrak{o}$ と書ける。一方において，任意の $\mathfrak{a}$ および $\mathfrak{b}$ ($\mathfrak{b}=\mathfrak{o}$ に対してでも) に対して，方程式 $\mathfrak{a}+\mathfrak{x}=\mathfrak{b}$ は，ただ1つの解 $\mathfrak{x}$ をもち，また，他方においては，互いに逆の向きの移動の和は $\mathfrak{o}$ であることから，上にあげた場合には，$\mathfrak{x}=-\mathfrak{a}$ でなければならない。したがって，いかなる $\mathfrak{a}$ に対しても，$\mathfrak{o}-\mathfrak{a}=-\mathfrak{a}$ である。

法則 IV の証明　方程式 $\mathfrak{a}+\mathfrak{x}=\mathfrak{b}$ の両辺に，移動 $-\mathfrak{a}$ を加えると

(3)　　$-\mathfrak{a}+\mathfrak{a}+\mathfrak{x}=-\mathfrak{a}+\mathfrak{b}$

(3)の左辺において，$-\mathfrak{a}+\mathfrak{a}=\mathfrak{o}$　また，$\mathfrak{o}+\mathfrak{x}=\mathfrak{x}$ とかけること，および，右辺において，(1)を用いて，$-\mathfrak{a}$ と $\mathfrak{b}$ とを交換する。方程式 $\mathfrak{a}+\mathfrak{x}=\mathfrak{b}$ の解，$\mathfrak{x}=\mathfrak{b}-\mathfrak{a}$ は，このとき，$\mathfrak{x}=\mathfrak{b}+(-\mathfrak{a})$ なる形に書かれる。これより，任意の移動 $\mathfrak{a}$ と $\mathfrak{b}$ に対して，

(4)　　$\mathfrak{b}-\mathfrak{a}=\mathfrak{b}+(-\mathfrak{a})$

なる関係式が成立することが示された。

物理における力の分解について，力 $\mathfrak{F}$ の1つの成分 $\mathfrak{F}_1$ が，$\mathfrak{F}$ と同じ点に作用するならば，第2の成分 $\mathfrak{F}_2$ が一意的に決定し，$\mathfrak{F}_1+\mathfrak{F}_2=\mathfrak{F}$ である。この $\mathfrak{F}_2$ の決定は，差 $\mathfrak{F}_2=\mathfrak{F}-\mathfrak{F}_1$ の決定にほかならない。

移動と実数との乗法

5.

7 任意の移動を $\mathfrak{a}$ とする。作図によって，和 $\mathfrak{a}+\mathfrak{a}+\mathfrak{a}$ および $(-\mathfrak{a})+(-\mathfrak{a})$ の代表をそれぞれ定めよ。これらの和を，$\mathfrak{a}$ と比較せよ。

$\mathfrak{a}+\mathfrak{a}+\mathfrak{a}$，$(-\mathfrak{a})+(-\mathfrak{a})$ をかんたんに，それぞれ $3\mathfrak{a}$，$2(-\mathfrak{a})$ と書く。

$\boxed{7}$ 定義　移動 $\mathfrak{a}$ と実数λとの積とは，その大きさが $\mathfrak{a}$ の大きさの $|\lambda|$ 倍で，$\lambda \geqq 0$ ならば，$\mathfrak{a}$と同じ向き，$\lambda < 0$ ならば，$-\mathfrak{a}$ と同じ向きである移動のことである。

この積を，$\lambda\mathfrak{a}$で表わす。

任意のλおよび$\mathfrak{a}$に対して，

(I) $|\lambda\mathfrak{a}| = |\lambda||\mathfrak{a}|$　(II) $0\cdot\mathfrak{a} = \mathfrak{o}$　(III) $\lambda\mathfrak{o} = \mathfrak{o}$

(IV) $1\cdot\mathfrak{a} = \mathfrak{a}$　(V) $-1\cdot\mathfrak{a} = -\mathfrak{a}$

が成り立つことは，定義から直ちに得られる。

さらに，移動と実数の乗法について，次の計算法則が成り立つ。

(5)　$(\lambda+\mu)\mathfrak{a} = \lambda\mathfrak{a} + \mu\mathfrak{a}$　(第1分配法則)

(6)　$\lambda(\mathfrak{a}+\mathfrak{b}) = \lambda\mathfrak{a} + \lambda\mathfrak{b}$　(第2分配法則)

(7)　$\lambda(\mu\mathfrak{a}) = (\lambda\mu)\mathfrak{a}$　(結 合 法 則)

ここに，$\mathfrak{a}$および$\mathfrak{b}$は，任意の移動，λおよびμは，任意の実数である。

$\lambda=0$，$\mu=0$，$\mathfrak{a}=\mathfrak{o}$，$\mathfrak{b}=\mathfrak{o}$　のどの場合にも，この計算法則が成立することは容易にわかる。その他の場合について，(5)から(7)の成立を証明する。

(7)の証明（略証）

$$|\lambda(\mu\mathfrak{a})| = |\lambda||\mu\mathfrak{a}| = |\lambda||\mu||\mathfrak{a}|$$

$$|(\lambda\mu)\mathfrak{a}| = |\lambda\mu||\mathfrak{a}| = |\lambda||\mu||\mathfrak{a}|$$

ゆえに，　$|\lambda(\mu\mathfrak{a})| = |(\lambda\mu)\mathfrak{a}|$

また，$\lambda<0$，$\mu>0$のとき，$\mu\mathfrak{a}$は$\mathfrak{a}$と同じ向き，$\lambda(\mu\mathfrak{a})$ と $(\lambda\mu)\mathfrak{a}$は　$-\mathfrak{a}$ と同じ向きをもち，したがって互いに同じ向きである。

$\lambda>0$，$\mu>0$，または，$\lambda>0$，$\mu<0$，または，$\lambda<0$，$\mu<0$のときも同様に示される。

(5)は，定義および問題 e 1 b の結果を理由として，同様に証明される。

6.

$\boxed{8}$ 定義　2つの移動 $\mathfrak{a}$ と $\mathfrak{b}$ は，ある実数λが存在して，$\mathfrak{a}=\lambda\mathfrak{b}$ または $\mathfrak{b}=\lambda\mathfrak{a}$ なるとき，互いに平行である。

略記法として，$\mathfrak{a}$と$\mathfrak{b}$が平行であることを，かんたんに　$\mathfrak{a}\parallel\mathfrak{b}$と書く。

数λが正ならば，特に　$\mathfrak{a}\upuparrows\mathfrak{o}$　と書く。

数λが負ならば，特に　$\mathfrak{a}\uparrow\downarrow\mathfrak{b}$　と書く。

$\mathfrak{a}$と$\mathfrak{b}$が平行でないならば，$\mathfrak{a}\nparallel\mathfrak{b}$ と書く。

$\boxed{3}$ 同じ向き，または，逆の向きの，2つの任意の移動は，互いに平行である。

特に，法則II，IV，Vにより，いかなる移動も

恒等写像に平行，すなわち，$\mathfrak{a}\parallel\mathfrak{o}$

それ自身に平行，すなわち，$\mathfrak{a}\parallel\mathfrak{a}$　あるいは　$\mathfrak{a}\upuparrows\mathfrak{a}$

その逆向きの移動に平行，すなわち，$\mathfrak{a}\parallel-\mathfrak{a}$　あるいは　$\mathfrak{a}\uparrow\downarrow-\mathfrak{a}$

である。（説明なし）

(6)の証明　$\lambda > 0$ かつ　$\mathfrak{a} \nparallel \mathfrak{b}$ の場合について証明する。

任意の１点Aをえらび，点B, C, D, E, を，

(8)　$\mathfrak{a} = \overrightarrow{AB}$,　$\mathfrak{b} = \overrightarrow{BC}$,　$\lambda\mathfrak{a} = \overrightarrow{AD}$,　$\lambda\mathfrak{b} = \overrightarrow{DE}$

なるように定める。$\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$，$\lambda\mathfrak{a}$，$\lambda\mathfrak{b}$ の代表をこのようにえらぶことによって，２つの三角形ABC, ADE が定まり，(8)によって，これらは，相似で，かつ，相似の位置にある。ゆえに，

$$\overline{AE} : \overline{AC} = \overline{AD} : \overline{AB} = \overline{ED} : \overline{CB} = \lambda$$

である。

移動$\overrightarrow{AC}$ と$\overrightarrow{AE}$ は同じ向きである。すなわち，$\overrightarrow{AE} = \lambda\overrightarrow{AC}$ なる関係が成り立つ。しかるに，２つの移動の和の定義によって，$\overrightarrow{AC} = \mathfrak{a} + \mathfrak{b}$，かつ，$\overrightarrow{AE} = \lambda\mathfrak{a} + \lambda\mathfrak{b}$ であるから，　$\lambda(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) = \lambda\mathfrak{a} + \lambda\mathfrak{b}$ が成り立つ。

⑧　a）$\lambda > 0$に対して行なわれた(6)の証明は，一部を修正して，$\lambda < 0$ の場合についての証明にすることができる。そのために必要な修正を行なえ。

b）(7)と(5)を用いて，$\lambda(\mathfrak{a} + \mathfrak{b})$ なる表わし方に同値変形を行なうことによって，任意のλに対し，かつ，$\mathfrak{a} \parallel \mathfrak{b}$ が成り立つときに，(6)を示せ。

移動と実数の乗法については，分配法則は２つ存在する。この乗法は，異った集合の要素の間の演算であり，$(\lambda + \mu)\mathfrak{a}$ と $\lambda(\mathfrak{a} + \mathfrak{b})$ とは，本質的に異なるものである。

移動の集合の中に定義された実数との乗法は，また，１点に作用する力の集合の中において適用することもできる。

7.

⑨　平面の移動の集合や，直線の移動の集合における「和」や「差」や「移動と実数の積」の概念が，同様な方法で定義することができること，および，これらの集合において，与えられた演算に関しては，空間の移動の集合においても同じく適用されることを確かめよ。

$\boxed{4}$　定理　　三角形の２辺の中点を結ぶ線分は，第３辺に平行で，かつ，長さは第３辺の半分である。

略証　三角形ＡＢＣの辺$\overline{BC}$, $\overline{CA}$の中点をA′，B′とすると，$\overrightarrow{B'A'} = \overrightarrow{B'C} + \overrightarrow{CA'}$

$$\overrightarrow{B'A'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$$

$\boxed{5}$　定理　　平行四辺形においては，対角線は互いに他を２等分する。

証明　平行四辺形ABCDが与えられたとし，対角線の交点をMとする。Mは，線分 $\overline{AC}$ および$\overline{BD}$に属するから，$\overrightarrow{AM} /\!/ \overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{BM} /\!/ \overrightarrow{BD}$ である。すなわち，$\overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{AC}$ および $\overrightarrow{BM} = \mu\overrightarrow{BD}$ なる数λ　およびμが存在する。

関係式　$\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{AB}$　を変形して

$$\lambda\,\overrightarrow{AC}-\mu\,\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AB}$$

$$\lambda\,(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})-\mu\,(-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})=\overrightarrow{AB}$$

$$(\lambda+\mu-1)\,\overrightarrow{AB}=(\mu-\lambda)\,\overrightarrow{BC}$$

仮定 $\overrightarrow{AB}\nparallel\overrightarrow{BC}$　により，この式においては，$\lambda+\mu-1=0$　かつ　$\mu-\lambda=0$ でなければならない。もし，$\mu-\lambda\nparallel 0$ ならば，$\overrightarrow{BC}=\dfrac{\lambda+\mu-1}{\mu-\lambda}\overrightarrow{AB}$　で，$\overrightarrow{BC}\parallel\overrightarrow{AB}$ となって仮定に反する。同様に，$\lambda+\mu-1\neq 0$ と仮定すれば，関係式　$\overrightarrow{AB}=\dfrac{\mu-\lambda}{\lambda+\mu-1}\overrightarrow{BC}$ となり，$\overrightarrow{AB}\parallel\overrightarrow{BC}$ となって仮定に反する。$\mu-\lambda=0$ かつ $\lambda+\mu-1=0$　より $\lambda=\mu=\frac{1}{2}$ を得る。

ベクトル空間の概念

8.

移動の集合，および，1点に作用する力の集合の中で，加法や，実数との乗法が定義され，そのときの集合の任意の要素 $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$，および，任意の実数 λ，μ に対して，次の式が成立することを学んできた。

(1°)　$\mathfrak{a}+\mathfrak{b}=\mathfrak{b}+\mathfrak{a}$　(交換法則)

(2°)　$(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})+\mathfrak{c}=\mathfrak{a}+(\mathfrak{b}+\mathfrak{c})$　(結合法則)

(3°)　集合のいかなる要素 $\mathfrak{a}$ と $\mathfrak{b}$ についても，$\mathfrak{a}+\mathfrak{x}=\mathfrak{b}$ であるような集合の要素 $\mathfrak{x}$ がただ1つ存在する。

(4°)　$1\,\mathfrak{a}=\mathfrak{a}$

(5°)　$(\lambda+\mu)\,\mathfrak{a}=\lambda\mathfrak{a}+\mu\mathfrak{a}$　(第1分配法則)

(6°)　$\lambda\,(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})=\lambda\mathfrak{a}+\lambda\mathfrak{b}$　(第2分配法則)

(7°)　$\lambda\,(\mu\mathfrak{a})=(\lambda\mu)\,\mathfrak{a}$　(結合法則)

ここで，これらの法則が成立するような，今一つの例として，順序のついた数〔x，y〕(x，yは実数) の集合を考え，次のように定義し，かつ，これらの法則の成立を示そう。

9 定義　2つの数対〔x_1，y_1〕および〔x_2，y_2〕について，数対〔x_1+x_2，y_1+y_2〕をその和といい，〔x_1，y_1〕+〔x_2，y_2〕=〔x_1+x_2，y_1+y_2〕と書く。

数対〔x，y〕と実数 λ について，数対〔λx，λy〕をそれらの積といい λ〔x，y〕=〔λx，λy〕と書く。

(1°) の略証

〔x_1，y_1〕+〔x_2，y_2〕=〔x_1+x_2，y_1+y_2〕

〔x_2，y_2〕+〔x_1，y_1〕=〔x_2+x_1，y_2+y_1〕

実数の加法については，交換法則が成立するから

$$x_1+x_2=x_2+x_1 \qquad y_1+y_2=y_2+y_1$$

であるから，

$$[x_1+x_2,\ y_1+y_2]=[x_2+x_1,\ y_2+y_1]$$

(3°) の略証　$[x_1, y_1]$と$[x_2, y_2]$によって定まる数対$[x, y]$が，方程式

(9)　$[x_1, y_1]+[x, y]=[x_2, y_2]$

を満足することを述べなければならない。(9)の左辺は，$[x_1+x, y_1+y]$ であるから，(9)は，

$$[x_1+x, y_1+y]=[x_2, y_2]$$

を意味し，よって，$x_1+x=x_2$，$y_1+y=y_2$ である。これから，x・y は一意的に定められ

$$[x, y]=[x_2-x_1, y_2-y_1]$$

は，(9)の解となる。この$[x, y]$は，数対の集合の中にある。

(6°) の略証

$$\lambda([x_1, y_1]+[x_2, y_2])=\lambda[x_1+x_2, y_1+y_2]=[\lambda(x_1+x_2), \lambda(y_1+y_2)]$$
$$=[\lambda x_1+\lambda x_2, \lambda y_1+\lambda y_2]=[\lambda x_1, \lambda y_1]+[\lambda x_2, \lambda y_2]=\lambda[x_1, y_1]+\lambda[x_2, y_2]$$

(2°) (4°) (5°) (7°) の証明は，同様に証明されるとして，明示されてはいない。

9.

空間の移動も，ある定点Aに作用する力も，点Aを始点とする有向線分によって，特長づけることができる。移動$\mathfrak{a}$に，力$\mathfrak{F}_{\mathfrak{a}}$を，点Aを始点として $\mathfrak{a}$ と等しい大きさをもつ有向線分によって対応させるならば，空間の移動と，点Aに作用する力との間に，可逆的な一意対応がつけられる。したがって，これらの集合には，等しい数学的性質（構造 — 訳者註—）がある。

平面上で，数対と，その平面の移動との間にも，可逆的一意対応をつけることができる。数対と，空間の移動との間には，可逆的一意対応は存在しない。

10 定義　集合で，その要素に対して，加法ならびに実数との乗法が定義され，集合の任意の要素$\mathfrak{a}$，$\mathfrak{b}$ および$\mathfrak{x}$，ならびに，任意の実数λ，μに対して，法則

(1°)　$\mathfrak{a}+\mathfrak{b}=\mathfrak{b}+\mathfrak{a}$

(2°)　$(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})+\mathfrak{c}=\mathfrak{a}+(\mathfrak{b}+\mathfrak{c})$

(3°)　集合のいかなる2つの要素$\mathfrak{a}$と$\mathfrak{b}$に対しても，$\mathfrak{a}+\mathfrak{x}=\mathfrak{b}$が成り立つような，この集合の要素$\mathfrak{x}$が，ただ1つ存在する。

(4°)　$1\,\mathfrak{a}=\mathfrak{a}$

(5°)　$(\lambda+\mu)\,\mathfrak{a}=\lambda\mathfrak{a}+\mu\mathfrak{a}$

(6°)　$\lambda(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})=\lambda\mathfrak{a}+\lambda\mathfrak{b}$

(7°)　$\lambda(\mu\mathfrak{a})=(\lambda\mu)\mathfrak{a}$

が成り立つならば，この集合を，ベクトル空間といい，その要素を，ベクトルという。

$\boxed{6}$ ベクトル空間の例として，さきに学んだ，次のものがある。

a） 空間の移動の集合

b） 任意の平面の移動の集合

c） 任意の直線の移動の集合

d） 1点に作用する力の集合

e） 順序づけられた数対の集合

これらのそれぞれには，加法，および，実数との乗法が，定義されているものとする。

1点に作用する力，移動，順序づけられた数対は，定められたベクトル空間の要素としてのベクトルである。数学や，物理学で，考察される集合の多くは，ベクトル空間である。

nが自然数ならば，n個の実数，x_1，x_2，$\cdots$，x_n の，順序づけられた集合のそれぞれを，n個の実数によるベクトルといい，これを，$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ と書く。$n=2$ のときは，特に，数対，$n=3$ のときは，3数組という。

⑩ 与えられたnに対して，n個の実数によるベクトルの集合は，ベクトル空間をつくることを示せ。

平面における基底と座標系

10. ベクトルの1次結合

移動は，ベクトルであり，また，それ自身の上への恒等写像を，零ベクトルという。

11▷ 定義　$\mathfrak{b} = \lambda_1 \mathfrak{a}_1 + \lambda_2 \mathfrak{a}_2 + \cdots + \lambda_n \mathfrak{a}_n$

なる形で書かれるベクトル $\mathfrak{b}$ を，ベクトル $\mathfrak{a}_1$，$\mathfrak{a}_2$，$\cdots$，$\mathfrak{a}_n$ の1次結合という。ここに，λ_1，λ_2，$\cdots$，λ_n は実数であり，これらを，1次結合の係数という。

$\boxed{7}$ 図（略）は，関係式

$$\mathfrak{b}_1 = 2.5\,\mathfrak{a}_1 + 0.5\,\mathfrak{a}_2 + \mathfrak{a}_3 + 0\mathfrak{a}_4 + 3\mathfrak{a}_5 \qquad \text{および}$$

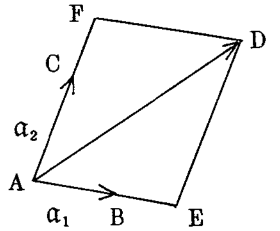
$$\mathfrak{b}_2 = \mathfrak{a}_2 - 4\,\mathfrak{a}_1$$

を図示したものである。このとき，$\mathfrak{b}_1$ および $\mathfrak{b}_2$ は，ベクトル $\mathfrak{a}_1$，$\mathfrak{a}_2$，$\cdots$，$\mathfrak{a}_5$ の1次結合である。

零ベクトルでないベクトル $\mathfrak{a}$ が与えられたとき，$\mathfrak{a}$ に平行なすべてのベクトル $\mathfrak{b}$ は，零ベクトルも含めて，$\mathfrak{b} = \lambda\,\mathfrak{a}$ と書けるから，$\mathfrak{b}$ は $\mathfrak{a}$ の1次結合と考えられる。また，$\mathfrak{a}_1$ と $\mathfrak{a}_2$ が互いに平行でなく，また，零ベクトルでないならば，そのどちらも，他方の1次結合として表わすことはできない。

12▷ 定理　平面で，$\mathfrak{b}$ が任意のベクトル，$\mathfrak{a}_1$ および $\mathfrak{a}_2$ が互いに平行でない2つのベクト

ルならば，$\mathfrak{b}$は一意的な方法で，$\mathfrak{a}_1$および$\mathfrak{a}_2$の１次結合 $\mathfrak{b}=\lambda_1\mathfrak{a}_1+\lambda_2\mathfrak{a}_2$ として表わすことができる。



略証　$\mathfrak{b}=\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{ED}=\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{FD}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AF}$

$\overrightarrow{AE}/\!/\mathfrak{a}_1$，$\overrightarrow{AF}/\!/\mathfrak{a}_2$ より，$\overrightarrow{AE}=\lambda_1\mathfrak{a}_1$，$\overrightarrow{AF}=\lambda_2\mathfrak{a}_2$

よって，$\mathfrak{b}=\lambda_1\mathfrak{a}_1+\lambda_2\mathfrak{a}_2$ である。

(11) 上で得られた $\mathfrak{b}$ の表わし方以外に，$\mathfrak{a}_1$と$\mathfrak{a}_2$の１次結合としての，別の表わし方 $\mathfrak{b}=\lambda_1'\mathfrak{a}_1+\lambda_2'\mathfrak{a}_2$ は存在しないことを示せ。

$\overrightarrow{AE}=\lambda_1\mathfrak{a}_1$および，$\overrightarrow{AF}=\lambda_2\mathfrak{a}_2$ から，ベクトルと実数の乗法の定義によって，

$$|\lambda_1|=\frac{|\overrightarrow{AE}|}{|\mathfrak{a}_1|}\quad \text{および}\quad |\lambda_2|=\frac{|\overrightarrow{AF}|}{|\mathfrak{a}_2|}$$

が得られる。ここで，$\overrightarrow{AE}\upuparrows\mathfrak{a}_1$，$\overrightarrow{AF}\upuparrows\mathfrak{a}_2$ のときは，それぞれ $\lambda_1>0$，$\lambda_2>0$であり $\overrightarrow{AE}\uparrow\downarrow\mathfrak{a}_1$，$\overrightarrow{AF}\uparrow\downarrow\mathfrak{a}_2$のときは，それぞれ，$\lambda_1<0$，$\lambda_2<0$ である。

$\mathfrak{b}\parallel\mathfrak{a}_2$のときは $\lambda_1=0$，$\mathfrak{b}\parallel\mathfrak{a}_1$のときは$\lambda_2=0$ である。特に，$\mathfrak{b}=\mathfrak{o}$ならば，１次結合は，$\mathfrak{b}=0\mathfrak{a}_1+0\mathfrak{a}_2$ の形しかない。

▷13 定義　等式

$$\lambda_1\mathfrak{a}_1+\lambda_2\mathfrak{a}_2+\cdots+\lambda_n\mathfrak{a}_n=\mathfrak{o}$$

が，$\lambda_1=\lambda_2=\cdots\cdots=\lambda_n=0$に対してのみ成り立つとき，ベクトル$\mathfrak{a}_1$，$\mathfrak{a}_2$，……，$\mathfrak{a}_n$は１次独立であるという。

１次独立でないベクトルを，１次従属という。

平面においては，２つの互いに平行でないベクトルは，１次独立である。

(12) 平面において，任意の３つのベクトルは，１次従属であることを示せ。

11. 基底と成分

▷14 定義　１次独立なベクトル$\mathfrak{a}_1$と$\mathfrak{a}_2$の組を，それぞれ，平面のベクトル空間の基底といい，これを，$\{\mathfrak{a}_1,\mathfrak{a}_2\}$で表わす。$\mathfrak{b}=\lambda_1\mathfrak{a}_1+\lambda_2\mathfrak{a}_2$であるとき，数 λ_1，λ_2 およびベクトル$\lambda_1\mathfrak{a}_1$，$\lambda_2\mathfrak{a}_2$を，それぞれ，基底$\{\mathfrak{a}_1,\mathfrak{a}_2\}$に関する，$\mathfrak{b}$の座標，および成分という。

ベクトル $\mathfrak{b}$ の，基底$\{\mathfrak{a}_1,\mathfrak{a}_2\}$に関する座標$\lambda_1\cdot\lambda_2$を，かんたんに，$\mathfrak{b}(\lambda_1,\lambda_2)$と書く。

$\boxed{8}$ 図（略）は，それぞれ，基底$\{\mathfrak{a}_1,\mathfrak{a}_2\}$および，この基底$\{\mathfrak{a}_1,\mathfrak{a}_2\}$に関する成分表示による，ベクトル$\mathfrak{b}$を示している。

15 定理　2つのベクトル $\mathfrak{b}$ と $\mathfrak{c}$ の和（差）の，ある基底に関する座標は，$\mathfrak{b}$ と $\mathfrak{c}$ の，それに相当する座標の和（差）に等しい。

略証　$\mathfrak{b}$，$\mathfrak{c}$ が，基底 $\{\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2\}$ に関して，$\mathfrak{b} = \lambda_1 \mathfrak{a}_1 + \lambda_2 \mathfrak{a}_2$，$\mathfrak{c} = \mu_1 \mathfrak{a}_1 + \mu_2 \mathfrak{a}_2$ と書けるときは，

$$\mathfrak{b} + \mathfrak{c} = (\lambda_1 \mathfrak{a}_1 + \lambda_2 \mathfrak{a}_2) + (\mu_1 \mathfrak{a}_1 + \mu_2 \mathfrak{a}_2) = (\mu_1 + \lambda_1)\mathfrak{a}_1 + (\lambda_2 + \mu_2)\mathfrak{a}_2$$

であり，同様に

$$\mathfrak{b} - \mathfrak{c} = (\lambda_1 - \mu_1)\mathfrak{a}_1 + (\lambda_2 - \mu_2)\mathfrak{a}_2$$

である。

16 定理　ベクトル $\mathfrak{b}$ と実数 λ の積の，ある基底に関する座標は，$\mathfrak{b}$ のそれに相当する座標と λ との積に等しい。（証明略）

12. 座標系

平面上に，任意の点Oと，任意の基底 $\{\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2\}$ をえらぶ。順序づけられた点対〔A，B〕は，ただ1つのベクトル $\overrightarrow{AB}$ を決定するから，Oと任意の点Pによって，ベクトル $\overrightarrow{OP}$ が一意的に決定する。これを，$\overrightarrow{OP} = \lambda_1 \mathfrak{a}_1 + \lambda_2 \mathfrak{a}_2$ とかけば，$\overrightarrow{OP}$ と数対〔λ_1，λ_2〕も一意的に対応し，これによって，点Pを，数対〔λ_1，λ_2〕に対応づけられる。この対応は，可逆的であり，これらの対応は，点Oと基底 $\{\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2\}$ のえらび方にのみ関係する。

点Oと基底 $\{\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2\}$ を一緒にして，平面の座標系といい，$\{O : \mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2\}$ で表わす。ベクトル $\overrightarrow{OP}$ を，座標系の原点Oに関する，点Pの位置ベクトルといい，$\overrightarrow{OP} = \lambda_1 \mathfrak{a}_1 + \lambda_2 \mathfrak{a}_2$ の係数 λ_1，λ_2 を $\{O : \mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2\}$ に関する，点Pの座標といい，$P(\lambda_1, \lambda_2)$ と略記する。

ベクトル $\mathfrak{a}$ と $\mathfrak{b}$ を，共通の始点にとるとき，この2つの有向線分のなす角を，$\mathfrak{a}$ と $\mathfrak{b}$ との間の角（向きは問わない）といい，$\sphericalangle(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ で表わす。

基底ベクトル $\mathfrak{a}_1$ と $\mathfrak{a}_2$ は，0と π との間（0，π を除く）の任意の角をつくることができる。この座標系を，一般に，斜交座標系という。$\mathfrak{a}_1$ と $\mathfrak{a}_2$ が，互いに直角をなすとき，それらは互いに直交するといい，基底 $\{\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2\}$ を直交基底，これに対応する座標系を，直交あるいは直角座標系という。基底ベクトルが単位ベクトルであるとき，基底または座標系は標準化されたといい，直角で標準化された基底あるいは座標系を，直交標準化基底あるいは座標系という。直交標準化座標系は，また，カルテシャン座標系ともいう。

13. 座標

⑬ 有向線分または方向づけられた線分，方向づけられた角とは何か。

平面において，カルテシャン座標系が与えられたとき，この基底ベクトルを $\mathfrak{i}$ および $\mathfrak{j}$ で表わし，点Pまたは任意のベクトル $\mathfrak{x}$ の座標を，x および y で表わす。すなわち，

$$\overrightarrow{OP} = x\mathfrak{i} + y\mathfrak{j} \quad \text{または} \quad \mathfrak{r} = x\mathfrak{i} + y\mathfrak{j}$$

と書く。

$|\mathfrak{i}| = |\mathfrak{j}| = 1$ かつ $\measuredangle(\mathfrak{i}, \mathfrak{j}) = \dfrac{\pi}{2}$ であるから，点Pの座標x，yは，

$\alpha = \measuredangle(\mathfrak{i}, \overrightarrow{OP}) \leqq \pi$ かつ $\beta = \measuredangle(\mathfrak{j}, \overrightarrow{OP}) \leqq \dfrac{\pi}{2}$ のとき

(11) $x = |\overrightarrow{OP}| \cos\alpha$, $y = |\overrightarrow{OP}| \sin\alpha$

$0 \leqq \alpha \leqq \pi$ かつ $\dfrac{\pi}{2} < \beta \leqq \pi$ のとき

(12) $x = |\overrightarrow{OP}| \cos\alpha$, $y = -|\overrightarrow{OP}| \sin\alpha$

が成り立つ。

(11)および(12)によって， $x^2 + y^2 = |\overrightarrow{OP}|^2$ であるから，点Pに対し， xおよびyから，$|\overrightarrow{OP}|$，α，βは一意的に定まる。

平面の一方の側において，平面上に1つの円をかく。円周上を点Pが，「反時計まわり」にまわるときに正，その反対の場合に負とみなすように定めたとき，その平面は，正の方向づけがなされたといい，「反時計まわり」にまわるときに負とみなすならば，その平面は，負の方向づけがなされたという。このどちらかの定め方がなされた平面を，方向づけられた平面という。

方向づけられた平面において，零ベクトルでない2つのベクトル $\mathfrak{a}$ および $\mathfrak{b}$ があるとき，$\mathfrak{a}$の代表〔A，B〕によって定まる半直線ABを，$\mathfrak{b}$の代表〔A，C〕によって定まる半直線ACの上へうつす回転の角を，ベクトル $\mathfrak{a}$ と $\mathfrak{b}$ の間の角といい，記号で $\measuredangle(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ とかく。その符号は，半直線ABから，正にまわった円弧ではかるときに正，その逆の場合は負とするのがふつうである。方向づけられた平面における，2つのベクトルの間の角は，2π の整数倍を除いて，決定される。$1\pi < \measuredangle(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) \leqq \pi$ においては，角$\measuredangle(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ は一意的に定まる。$\measuredangle(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = \pm\dfrac{\pi}{2}$ が成り立つか，または，一方のベクトルが零ベクトルのとき，ベクトル $\mathfrak{a}$ と$\mathfrak{b}$ は，互いに直交するという。明らかに，$\measuredangle(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = -\measuredangle(\mathfrak{b}, \mathfrak{a})$ である。

正の方向づけがされた平面で，$\alpha = \measuredangle(\mathfrak{i}, \overrightarrow{OP})$ とすれば，公式(11)は，平面上の任意の点Pについて成立することになり，(12)は不要になる。

ベクトル$\mathfrak{r}$の，$\{O; \mathfrak{i}, \mathfrak{j}\}$ に関する座標を，x，yとし，$\measuredangle(\mathfrak{i}, \mathfrak{r}) = \alpha$ とすれば，すべての$\mathfrak{r}$に対して，$x = |\mathfrak{r}| \cos\alpha$，$y = |\mathfrak{r}| \sin\alpha$ が成り立つ。

2点P_1，P_2 の距離は，ベクトル$\overrightarrow{P_1P_2}$ の大きさに等しい。$P_1(x_1, y_1)$，$P_2(x_2, y_2)$ とすれば，座標 $\overrightarrow{P_1P_2}(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$ をもつベクトル $\mathfrak{a}$ に対して，$\alpha = \measuredangle(\mathfrak{i}, \overrightarrow{P_1P_2})$ とするとき，

$$x_2 - x_1 = |\overrightarrow{P_1P_2}| \cos\alpha \ , \quad y_2 - y_1 = |\overrightarrow{P_1P_2}| \sin\alpha$$

であり，これから，公式

(13) $$|\overrightarrow{P_1P_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

が得られる。

14. 応用問題

この学習単位では，測量に関する内容を，直角座標系｛O；i，j｝に関連づけて，説明がなされているが，特にあげる必要はないと考えられるので，一切を省略する。

15. 座標系の変換

座標系｛O；i，j｝に関する点Pの座標x，yと，他の座標系｛O′；i′，j′｝に関する同じ点Pの座標x′，y′との関係を求めよう。

角$\measuredangle$(i，j) および $\measuredangle$(i′，j′) が，ともに負でない，すなわち，両座標系が右系であるように定める。〔$\measuredangle$(i，j) ＜０の場合は，座標系｛O；i，j｝は左系であるという。〕

｛O；i，j｝に関する，点P，O′，i′，j′ の座標が

$$\overrightarrow{OP} = x\,i + y\,j\,,\qquad \overrightarrow{OO'} = a_0\,i + b_0\,j$$

(14) $$i' = a_1\,i + b_1\,j,\qquad j' = a_2\,i + b_2\,j$$

であるとする。

$\overrightarrow{O'P} = x'\,i' + y'\,j'$ ならば $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'P}$ より

$$x\,i + y\,j = a_0\,i + b_0\,j + x'\,i' + y'\,j$$
$$= a_0\,i + b_0\,j + x'(a_1\,i + b_1\,j) + y'(a_2 i + b_2\,j)$$

すなわち，

$$(x - a_1 x' - a_2 y' - a_0)\,i + (y - b_1 x' - b_2 y' - b_0)\,j = 0$$

i と j は，1次独立であるから，

(15) $$x = a_1 x' + a_2 y' + a_0\,,\qquad y = b_1 x' + b_2 y' + b_0$$

である。いまは，$|i| = 1$，$|j| = 1$，$|i'| = 1$，$|j'| = 1$，$\measuredangle(i,\ j) = 90°$，$\measuredangle(i',\ j') = 90°$であるから，$\measuredangle(i,\ i') = \alpha$ とおけば，基底｛i，j｝に関する i′ の座標 (a_1，b_1) および，j′ の座標 (a_2，b_2) に対して，

$$a_1 = \cos\alpha\,,\qquad b_1 = \sin\alpha$$
$$a_2 = \cos(90° + \alpha) = -\sin\alpha\qquad b_2 = \sin(90° + \alpha) = \cos\alpha$$

である。したがって，

(16)
$$i' = \cos\alpha\cdot i + \sin\alpha\cdot j$$
$$j' = -\sin\alpha\cdot i + \cos\alpha\cdot j$$

(17)
$$x = \cos\alpha\cdot x' - \sin\alpha\cdot y' + a_0$$
$$y = \sin\alpha\cdot x' + \cos\alpha\cdot y' + b_0$$

となる。(17)を，x′，y′について解けば，

(17′)
$$x' = \cos\alpha\cdot x + \sin\alpha\cdot y - (\cos\alpha\cdot a_0 + \sin\alpha\cdot b_0)$$
$$y' = -\sin\alpha\cdot x + \cos\alpha\cdot y - (-\sin\alpha\cdot a_0 + \cos\alpha\cdot b_0)$$

である。｛O′；i′，j′｝に関する点Oの座標 (a_0'，b_0') は，

$$a_0' = -(\cos\alpha\cdot a_0 + \sin\alpha\cdot b_0)$$
$$b_0' = -(-\sin\alpha\cdot a_0 + \cos\alpha\cdot b_0)$$

であるから，(17′) は，

(17″)
$$x' = \cos\alpha\cdot x + \sin\alpha\cdot y + a_0'$$
$$y' = -\sin\alpha\cdot x + \cos\alpha\cdot y + b_0'$$

となる。

方程式(17)を，2つの直交右系 $\{O;\ \mathbf{i},\ \mathbf{j}\}$ および $\{O';\ \mathbf{i}',\ \mathbf{j}'\}$ に関する点Pの座標についての変換方程式といい，平面の任意の点Pの，$\{O;\ \mathbf{i},\ \mathbf{j}\}$ に関する座標（x，y）の，$\{O';\ \mathbf{i}',\ \mathbf{j}'\}$ に関するPの座標（x'，y'）への1対1の写像を，座標変換という。$\{O;\ \mathbf{i},\ \mathbf{j}\}$ から $\{O';\ \mathbf{i}',\ \mathbf{j}'\}$ の上への写像を，座標系の変換という。

$\alpha=0$ のときは，この変換を，平行移動といい，このとき，公式(17)は，

(17 a) $\quad x'=x-a_0,\qquad y'=y-b_0$

となる。

$\alpha\neq 0$ で，$O'=O$ ならば，これを，座標系の回転，あるいは，座標系のもとになる基底の変換という。この場合には，$a_0=b_0=0$ で，公式(17)は，

(17 b)
$$x'=\cos\alpha\cdot x+\sin\alpha\cdot y$$
$$y'=-\sin\alpha\cdot x+\cos\alpha\cdot y$$

となる。

$\boxed{10}$ 座標系 $\{O;\ \mathbf{i},\ \mathbf{j}\}$ に関して，座標 $P(8,-4)$ なる点Pについて，座標系 $\{O';\ \mathbf{i}',\ \mathbf{j}'\}$ に関する座標 $P(x',\ y')$ を求めよう。ただし，O' は，$\{O;\ \mathbf{i},\ \mathbf{j}\}$ に関して，座標 $O'(6,\ 2)$ をもち，$\{\mathbf{i},\ \mathbf{j}\}$ に関する $\mathbf{i}'$ および $\mathbf{j}'$ の座標は，それぞれ，$\mathbf{i}'\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ および，$\mathbf{j}'\left(\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ であるとする。（解略）

答 $x'=2\sqrt{2}$，$\quad y'=4\sqrt{2}$

16. 三角関数の加法定理

同じ原点を持つ3つの直交右系 $\{O;\ \mathbf{i},\ \mathbf{j}\}$，$\{O;\ \mathbf{i}',\ \mathbf{j}'\}$，$\{O;\ \mathbf{i}'',\ \mathbf{j}''\}$ が与えられ，かつ，$\measuredangle(\mathbf{i},\ \mathbf{i}')=\alpha$，$\measuredangle(\mathbf{i}',\ \mathbf{i}'')=\beta$ とする。(16)によって

$$\mathbf{i}'=\cos\alpha\cdot\mathbf{i}+\sin\alpha\cdot\mathbf{j},\qquad \mathbf{i}''=\cos\beta\cdot\mathbf{i}'+\sin\beta\cdot\mathbf{j}'$$
$$\mathbf{j}'=-\sin\alpha\cdot\mathbf{i}+\cos\alpha\cdot\mathbf{j},\qquad \mathbf{j}''=-\sin\beta\cdot\mathbf{i}'+\cos\beta\cdot\mathbf{j}'$$

であり，これから，代入によって，

$$\mathbf{i}''=(\cos\alpha\ \cos\beta-\sin\alpha\ \sin\beta)\ \mathbf{i}+(\sin\alpha\ \cos\beta+\cos\alpha\ \sin\beta)\ \mathbf{j}$$
$$\mathbf{j}''=-(\sin\alpha\ \cos\beta+\cos\alpha\ \sin\beta)\ \mathbf{i}-(\sin\alpha\ \sin\beta-\cos\alpha\ \cos\beta)\ \mathbf{j}$$

を得る。一方，$\measuredangle(\mathbf{i},\ \mathbf{i}'')=\alpha+\beta$ および(16)によって，

$$\mathbf{i}''=\cos(\alpha+\beta)\cdot\mathbf{i}+\sin(\alpha+\beta)\cdot\mathbf{j}$$
$$\mathbf{j}''=-\sin(\alpha+\beta)\cdot\mathbf{i}-\cos(\alpha+\beta)\cdot\mathbf{j}$$

が成り立つ。$\mathbf{i}''$ に対する2つの式を互いに等しいとおき，$\mathbf{i}$ と $\mathbf{j}$ の1次独立性によって，

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\ \cos\beta+\cos\alpha\ \sin\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\ \cos\beta-\sin\alpha\ \sin\beta$$

が得られる。これが，三角関数の加法定理である。

同様にして，$\measuredangle(\mathbf{i}',\ \mathbf{i}'')=-\beta$ とおけば，

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\ \cos\beta-\cos\alpha\ \sin\beta$$
$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\ \cos\beta+\sin\alpha\ \sin\beta$$

が得られる。

これらの式においては，α，βは，２つのベクトルの間の角として，$-\pi$とπとの間の角について論じられているが，(11)と(16)は，この制限を除いても成立するから，上にあげた加法定理においては，αとβは任意の値をとることができる。

$\boxed{11}$ 関数　$y = \sin x$ および　$y = \cos x$ の，変数0°，30°，45°，60°，90°および　90°の整数倍の値を覚えているならば，加法定理を用いて，変数の多くの値に対して，そのときの関数値が求められる。

$$300° = 270° + 30°$$
$$\sin 300° = \sin(270° + 30°)$$
$$= \sin 270° \cos 30° + \cos 270° \sin 30° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

平面における直線の解析幾何

17. 媒介変数による直線の方程式

(16) a) あなたは，いままでに，一度でも「媒介変数」なる言葉に出会ったことがあるか。また，それを，どんな意味に理解したか。

b) 直線を一意的に決定することは，どんな利点があるか。

直線gを，その上の点P_0と，直線の方向を示すベクトル$\mathfrak{a}$によって，与えられるとする。gの上の任意の点を，Pで表わすならば，$\overrightarrow{P_0P} \parallel \mathfrak{a}$ であり，それによって，

(18) $$\overrightarrow{P_0P} = \lambda\mathfrak{a}$$

が成り立つ。このとき，$\lambda > 0$ならば，$\overrightarrow{P_0P} \upuparrows \mathfrak{a}$，　$\lambda < 0$ならば，$\overrightarrow{P_0P} \uparrow\downarrow \mathfrak{a}$ であり，かつ，$|\lambda| = \dfrac{|\overrightarrow{P_0P}|}{|\mathfrak{a}|}$ である。

点Pが直線g上を動くとき，λは$-\infty$と∞の間の，対応する値をとり，(18)において，1つのλは，それぞれ，1つの点Pに対応する。これより，(18)は，直線上の点と実数との，可逆的一意対応をつくる。

方程式(18)を，直線gの媒介変数による方程式という。λは，大ていの場合にはtとかかれるものであるが，これを，直線の媒介変数といい，$\mathfrak{a}$を方向ベクトルという。

方程式(18)の決定に際して，P_0 以外の，平面上の任意の点Oを与えれば，gの媒介変数による方程式は，

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_0} + \overrightarrow{P_0P}$$

と書け，また，$\overrightarrow{OP}$を$\mathfrak{x}$で，$\overrightarrow{OP_0}$を$\mathfrak{x}_0$で表わすならば，

(19) $$\mathfrak{x} = \mathfrak{x}_0 + t\mathfrak{a}$$

と書くことができる。

$\boxed{12}$ a) 点A (1, 1) を通り，方向ベクトルが，$\mathfrak{a} = \mathfrak{i}$ なる直線gが与えられたとする。

方程式⒆への代入によって，gの方程式として，$\mathfrak{x} = \mathfrak{i} + \mathfrak{j} + t\,\mathfrak{i}$　すなわち
$\mathfrak{x} = (t+1)\,\mathfrak{i} + \mathfrak{j}$　を得る。

b）gの上で，媒介変数値　$t = -5$ に対応する点Pを定めよう。（解略）　答，P（－4．1）

18.

$\boxed{13}$　a）方程式

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{x}_0 + t\,\mathfrak{a}_1, \qquad t \geqq 0$$

は，P_0 を始点とする半直線 $P_0P_\mathfrak{a}$ の媒介変数による方程式である。

b）方程式

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{x}_0 + t\,\mathfrak{a}, \qquad 0 \leqq t \leqq 1$$

は，線分 $\overline{P_0P_\mathfrak{a}}$ の，媒介変数による方程式である。

c）方程式

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{x}_0 + t\,\mathfrak{a}, \qquad |t| \geqq 1$$

は，g上で，媒介変数値 $t = 1$ および $t = -1$ に対応する点を端点とする，共有点のない2つの半直線の，媒介変数による方程式である。

⑰　直線の方向ベクトルは，一意的に定められるか。

gの媒介変数による方程式⒆の決定に際して，$\mathfrak{a}$と，g上で $P_1 \neq P_0$ なる P_1 から考えれば，その，媒介変数による方程式は，

$$(19') \qquad \mathfrak{x} = \mathfrak{x}_1 + \overline{t}\,\mathfrak{a}$$

と書ける。λを定数として，$\overrightarrow{P_0P_1} = \lambda\mathfrak{a}$ とおけば，$\overrightarrow{P_0P_1} = \mathfrak{x}_1 - \mathfrak{x}_0$　すなわち
$\mathfrak{x}_1 = \overrightarrow{P_0P_1} + \mathfrak{x}_0 = \mathfrak{x}_0 + \lambda\,\mathfrak{a}$　となり，(19′）に代入して，

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{x}_0 + (\lambda + \overline{t})\,\mathfrak{a}$$

となる。これから，$t = \lambda + \overline{t}$　がわかる。

⑱　次のものが与えられたとき，直線gの，媒介変数による方程式を書け。

a）点 $P_0 \in g$　と，方向ベクトル　$\mathfrak{a}' \neq \mathfrak{a}$

b）$P_1 \neq P_0$ なる点　$P_1 \in g$　と，方向ベクトル　$\mathfrak{a}'$

⑲　媒介変数による直線gの方程式 ⒆ の媒介変数tと，練習18の a）と b）の場合における gの媒介変数　$\overline{\overline{t}}$ と $\overline{\overline{\overline{t}}}$ との間には，どんな関係があるか。

方向ベクトルを指定することによって，方向づけがなされた直線を，方向づけられた直線または軸という。軸は，進み方（方向づけ）の目印として，媒介変数値が増加するように進む方に，矢印をつけた直線によって表わされる。

平面における座標系について考察すれば，これを，O，および，この平面の2つの方向づけられた直線 $\mathfrak{i}$　および $\mathfrak{j}$ の指定によって表わし，かつ，

a) Oを通り，方向ベクトル $\mathfrak{i}$ なる直線を，x軸，または，横軸といい，

b) Oを通り，方向ベクトル $\mathfrak{j}$ なる直線を，y軸，または，縦軸という。

これらの軸を，座標系 $\{O;\mathfrak{i},\ \mathfrak{j}\}$ の座標軸という。

19. 1点と方向による直線の方程式

平面において，座標系 $\{O;\mathfrak{i},\ \mathfrak{j}\}$ が与えられているとき，直線 g の方程式(19)に，ベクトル $\mathfrak{x}$，$\mathfrak{x}_0$，$\mathfrak{a}$ の基底ベクトル $\mathfrak{i}$，$\mathfrak{j}$ による分解

$$\mathfrak{x}=x\,\mathfrak{i}+y\,\mathfrak{j},\quad \mathfrak{x}_0=x_0\,\mathfrak{i}+y_0\,\mathfrak{j},\quad \mathfrak{a}=a_x\,\mathfrak{i}+a_y\,\mathfrak{j}$$

を代入して，$\mathfrak{i}$ と $\mathfrak{j}$ の1次独立なることを用いれば，

(20)
$$x=x_0+t\,a_x$$
$$y=y_0+t\,a_y$$

を得る。これから，t を消去して，

(21)
$$a_y\,x-a_x\,y=a_y\,x_0-a_x\,y_0$$

となる。ここで，$\mathfrak{a}\neq 0$ より，$a_x^2+a_y^2\neq 0$ である。(21)を，直線 g の，媒介変数を除いた方程式という。

$a_x^2+a_y^2\neq 0$ であるから，a_x と a_y は同時に零ではない。$a_x\neq 0$ のときには，(20)は

(22)
$$y=y_0+\frac{a_y}{a_x}(x-x_0)$$

となり，また，$\alpha=\measuredangle(\mathfrak{i},\mathfrak{a})$ とすると，$a_x=|\mathfrak{a}|\cos\alpha$，$a_y=|\mathfrak{a}|\sin\alpha$ であるから，

$\dfrac{a_y}{a_x}=\tan\alpha$ となる。$\dfrac{a_y}{a_x}$ をふつう m で表わし，これを，直線 g の傾きという。こうして得られる方程式

(23)
$$y-y_0=m(x-x_0)$$

を，1点と方向による g の方程式という。$\alpha=\pm\dfrac{\pi}{2}$ すなわち，$a_x=0$ ならば，(20)は，

(24)
$$x=x_0$$
$$y=y_0+t\,a_y$$

となるが，この第2の方程式は，y が，g の点に対し，$-\infty$ と $+\infty$ の間のすべての値をとることを示すから，(24)を，かんたんに，$x=x_0$ と書く。

媒介変数による方程式(19)は，1点と方向による方程式(22)または(23)のベクトル形式である。

$\boxed{14}$ 直線 g が，点 $P_0(-1,\ 3)$ を通り，方向係数 $m=-\dfrac{4}{5}$ であるとする。このとき，g の媒介変数による方程式を求めよう。（解略）

答　$\mathfrak{x}=-\mathfrak{i}+3\mathfrak{j}+t(5\mathfrak{i}-4\mathfrak{j})$ または，$\mathfrak{x}=-\mathfrak{i}+3\mathfrak{j}+t'(-10\mathfrak{i}+8\mathfrak{j})$
など

20. 2点による直線の方程式

2点 P_0，P_1 を通る直線 g があるとき，ベクトル $\overrightarrow{P_0P_1}=\mathfrak{x}_1-\mathfrak{x}_0$ が，g の方向ベクト

ルであることから，方程式(19)は，このとき

(25) $$\mathfrak{x} = \mathfrak{x}_0 + t(\mathfrak{x}_1 - \mathfrak{x}_0)$$

の形で書くことができる。ベクトル$\mathfrak{x}$，$\mathfrak{x}_0$，$\mathfrak{x}_1$ を $\mathfrak{i}$，$\mathfrak{j}$で表わして代入し，ベクトル$\mathfrak{i}$と$\mathfrak{j}$との１次独立性に注意すれば，

(26) $$\begin{aligned} x &= x_0 + t(x_1 - x_0) \\ y &= y_0 + t(y_1 - y_0) \end{aligned}$$

が得られる。これから，媒介変数 t を消去すると，

(27) $$(x - x_0)(y_1 - y_0) = (y - y_0)(x_1 - x_0)$$

となる。 $x_1 \neq x_0$ のときには，

(28) $$\frac{y - y_0}{x - x_0} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

と書ける。この形はきれいであるが，無条件に成立するものではない。〔点P_0に対しては成立しない。〕

方程式(27)を，２点による直線 g の方程式という。

⑳ ２点による直線の方程式は，つねに，$Ax + By + C = 0$ （ただし，$A^2 + B^2 \neq 0$)なる形に書くことができることを示せ。

21. 直線の方程式の標準形．軸の切片による方程式

直線 g が，傾き m で，点 P_0 (0，b) を通るならば，１点と方向による方程式(23)は，

(29) $$y = mx + b$$

と書くことができる。 b＝0のとき，すなわち，P_0 がOと重なるときには，直線の方程式は

$$y = mx$$

である。

関係式(29)を，直線の方程式の標準形という。

㉑ (29)における b の符号の意味を説明せよ。

２点に関する直線 g の方程式において，２点P_0，P_1が，それぞれ，座標P_0 (a，0)および，P_1 (0，b) をもつときには，方程式

$$(x - a)b = y(-a)$$

となる。特に，$a \neq 0$，$b \neq 0$ならば，これを

(30) $$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

と書くことができる。

関係式(30)を，直線 g の，軸の切片による方程式という。

22. 一般の直線の方程式

すべての直線の方程式は，

(31) $$Ax + By + C = 0 \qquad (A^2 + B^2 \neq 0)$$

の形に書くことができる。

逆に，(31)は，$B \neq 0$のとき

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$$

と書くことができる。これは，傾き　$m = -\frac{A}{B}$　で，点$(0, -\frac{C}{B})$を通る直線の方程式の標準形である。$B = 0$のときは，$A \neq 0$であるから，方程式(31)は，

$$x = -\frac{C}{A}$$

となり，これは，点$(-\frac{C}{A}, 0)$を通り，y軸に平行な直線の方程式である。

直線の方程式(31)を，直線の一般方程式という。

23. 2直線の交点

2直線g_1とg_2が，ただ1つの共有点Sをもつならば，Sを，2直線の交点という。その座標を求めよう。

1) g_1とg_2が，一般方程式

(32) $$A_1x + B_1y + C_1 = 0 \ , \ A_2x + B_2y + C_2 = 0 \quad \text{ただし，} A_1{}^2 + B_1{}^2 \neq 0, \ A_2{}^2 + B_2{}^2 \neq 0$$

によって与えられている場合

Sの座標　x_s，y_s　は，g_1，g_2の2つの方程式を満足しなければならない。すなわち

$$A_1x_s + B_1y_s + C_1 = 0$$
$$A_2x_s + B_2y_s + C_2 = 0$$

$A_1B_2 - A_2B_1 \neq 0$ のとき，g_1とg_2は，ただ1つの共有点Sをもち，その座標は，

(33) $$x_s = \frac{B_1C_2 - B_2C_1}{A_1B_2 - A_2B_1} \ , \ y_s = \frac{A_2C_1 - A_1C_2}{A_1B_2 - A_2B_1}, \quad (A_1B_2 - A_2B_1 \neq 0)$$

である。

$A_1B_2 - A_2B_1 = 0$，かつ，$B_1 \neq 0$のときは，$B_2 \neq 0$でなければならない。このとき(32)は，

$$y = -\frac{A_1}{B_1}x - \frac{C_1}{B_1} \quad , \quad y = -\frac{A_2}{B_2}x - \frac{C_2}{B_2}$$

と書くことができ，このとき，$\frac{A_1}{B_1} = \frac{A_2}{B_2}$ であるから，これらの直線は互いに平行である。

さらに，$\frac{C_1}{B_1} = \frac{C_2}{B_2}$ のときには，それらは重なる。

$A_1B_2 - A_2B_1 = 0$　かつ，$B_1 = 0$　のときは，$B_2 = 0$ も成り立ち，このとき$A_1 \neq 0$かつ　$A_2 \neq 0$　であるから，(32)は，

$$x = -\frac{C_1}{A_1} \quad , \quad x = -\frac{C_2}{A_2}$$

となり，これらは，ともにy軸に平行であり，さらに，$\frac{C_1}{A_1} = \frac{C_2}{A_2}$　のときは，一致する。

㉒ 2つの直線の方程式(32)は，

(34)　$A_1 = kA_2,\ B_1 = kB_2,\ C_1 = kC_2$　　ただし　$k \neq 0$

が成り立つときには，同一の直線を表わすことを示せ。

2)　g_1 と g_2 が，媒介変数による方程式

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{x}_0 + t\mathfrak{a} \ ,\quad \overline{\mathfrak{x}} = \overline{\mathfrak{x}_0} + \overline{t}\,\overline{\mathfrak{a}} \ ,\quad \mathfrak{a} \neq 0,\ \overline{\mathfrak{a}} \neq 0$$

によって与えられている場合

g_1 と g_2 の交点Sを，g_1，g_2 上で，それぞれ，媒介変数値 t_s，$\overline{t_s}$ に対応する点とすれば

(35)　$$\mathfrak{x}_s = \overline{\mathfrak{x}_s} \quad すなわち，\quad \mathfrak{x}_0 + t_s\mathfrak{a} = \overline{\mathfrak{x}_0} + \overline{t_s}\,\overline{\mathfrak{a}}$$

が成り立つ。これらを，座標の記法で表わし，

$$x_0 + t_s a_x = \overline{x_0} + \overline{t_s}\,\overline{a_x}$$
$$y_0 + t_s a_y = \overline{y_0} + \overline{t_s}\,\overline{a_y}$$

から，t_s，$\overline{t_s}$ を求める。

$a_x \overline{a_y} - a_y \overline{a_x} \neq 0$　のときは，

$$t_s = \frac{(\overline{x_0} - x_0)\,\overline{a_y} - (\overline{y_0} - y_0)\,\overline{a_x}}{a_x\,\overline{a_y} - a_y\,\overline{a_x}}$$

$$\overline{t_s} = \frac{(\overline{x_0} - x_0)\,a_y - (\overline{y_0} - y_0)\,a_x}{a_x\,\overline{a_y} - a_y\,\overline{a_x}}$$

である。交点Sは，この t_s，$\overline{t_s}$ を，それぞれ g_1，g_2 の方程式に代入して得られる。

$a_x\overline{a_y} - a_y\overline{a_x} = 0$ のときは，$a_x \neq 0$ ならば，$\dfrac{a_y}{a_x} = \dfrac{\overline{a_y}}{\overline{a_x}}$　であり，$a_x = 0$　ならば，$a_y = \overline{a_y}$，$a_x = \overline{a_x} = 0$　である。これらの場合においては，いずれも $\mathfrak{a}$ は $\overline{\mathfrak{a}}$ に平行であり，$\lambda \neq 0$ なる定数に対して，$\overline{\mathfrak{a}} = \lambda\mathfrak{a}$ である。このとき，(35)は，

$$(t_s - \lambda\overline{t_s})\,\mathfrak{a} = \overline{\mathfrak{x}_0} - \mathfrak{x}_0$$

となる。

(1)　$\overline{\mathfrak{x}_0} - \mathfrak{x}_0 /\!/ \mathfrak{a}$　すなわち　$\overline{\mathfrak{x}_0} - \mathfrak{x}_0 = \mu\mathfrak{a}$（$\mu$は定数）のとき，

$$(t_s - \lambda\overline{t_s})\,\mathfrak{a} = \mu\mathfrak{a} \quad すなわち \quad (t_s - \lambda\overline{t_s} - \mu)\,\mathfrak{a} = 0$$

は，無限に多くの解〔t_s，$\overline{t_s}$〕をもつ。したがって，g_1 と g_2 は，一致する。

(2)　$\overline{\mathfrak{x}_0} - \mathfrak{x}_0 \not\parallel \mathfrak{a}$　のとき，方程式

$$(t_s - \lambda\overline{t_s})\,\mathfrak{a} = \overline{\mathfrak{x}_0} - \mathfrak{x}_0$$

は，どんな〔t_s，$\overline{t_s}$〕に対しても成立しない。したがって，g_1 と g_2 は，互いに平行で，かつ，一致しない。

$\boxed{15}$ 2つの直線 g_1 と g_2 が，方程式

g_1：$\mathfrak{x} = \mathfrak{x}_0 + t\mathfrak{a}$　　ここに　$\mathfrak{x}_0\,(3,\ 0)$，$\mathfrak{a}\,(a_x,\ 3)$

g_2：$\overline{\mathfrak{x}} = \overline{\mathfrak{x}_0} + \overline{t}\,\overline{\mathfrak{a}}$　　ここに　$\overline{\mathfrak{x}_0}\,(0,\ y)$，$\overline{\mathfrak{a}}\,(-\frac{4}{3},\ 1)$

で与えられている。

y と a_x がどんな値のときに，この2直線は共有点をもつかを定めよう。

略解　$a_x\,\overline{a_y} - a_y\,\overline{a_x} = 0$　より　$a_x = -4$　を得る。

$\overline{\mathfrak{x}_0} - \mathfrak{x}_0 /\!/ \mathfrak{a}$　すなわち　$\overline{\mathfrak{x}_0} - \mathfrak{x}_0 = \mu\mathfrak{a}$ のときは2直線は一致する。このとき，

$$\overline{x}_0 - x_0 = \mu a_x \qquad\qquad -3 = \mu(-4)$$
より，
$$\overline{y}_0 - y_0 = \mu a_y \qquad\qquad y = \mu(3)$$
が得られ，これから　$\mu = \dfrac{3}{4}$　，　$y = \dfrac{9}{4}$　である。したがって，$a_x = -4$，$y = \dfrac{9}{4}$　のとき，g_1 と g_2 は一致する。

$a_x \neq -4$ のとき，2直線は，互いに平行ではなく，ただ1つの交点をもち，その交点は，媒介変数値　$t_s = \dfrac{4y-9}{3a_x+12}$　，　$\overline{t}_s = -\dfrac{a_x y + 9}{a_x + 4}$　に対応する。たとえば，$y = 0$，$a_x = 0$　とおいて，$t_s = -\dfrac{3}{4}$，　$\overline{t}_s = -\dfrac{9}{4}$　を得るから，これを代入して，

$$x_s = x_0 + t_s a_x = 3, \qquad y_s = y_0 + t_s a_y = -\frac{9}{4}$$

である。

3）g_1 が，方程式

$$Ax + By + C = 0, \qquad A^2 + B^2 \neq 0$$

で与えられ，g_2 が，方程式

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{x}_0 + t\mathfrak{a}, \qquad \mathfrak{a} \neq 0$$

によって与えられている場合，

g_1 と g_2 の共有点Sの座標 x_s と y_s について，

(36)　$$A x_s + B y_s + C = 0$$

および，媒介変数による g_2 の方程式の座標記法において，

(37)　$$x_s = x_0 + t a_x \quad , \quad y_s = y_0 + t a_y$$

が成立する。(37)を(36)に代入して，t_sを求める。

$A a_x + B a_y \neq 0$　のとき

$$t_s = -\frac{A x_0 + B y_0 + C}{A a_x + B a_y}$$

であり，この t_s を(37)に代入して，x_s，y_sが得られる。

㉓ $A a_x + B a_y = 0$ のとき，g_1 と g_2 には，どんな位置関係があるか。

24. 部分比

17 定義　Pが，点AとBで定まる直線上の点で，かつ，$P \neq B$ であるとき，有向線分$\overline{AP}$と$\overline{PB}$の間に，関係式

(38)　$$\overline{AP} = \lambda\, \overline{PB}$$

が成り立つとき，このような数 λ を，点Pが有向線分$\overline{AB}$を分ける部分比という。

Pが，AとBの間にないならば，$\lambda < 0$，Pが，AとBの間にあるならば，$\lambda > 0$，$P = A$ ならば $\lambda = 0$ である。

$\overrightarrow{AP} = \lambda \overrightarrow{PB}$ から，$\overrightarrow{OP}$ を求めれば，

(40) $$\overrightarrow{OP}=\frac{\overrightarrow{OA}+\lambda\overrightarrow{OB}}{1+\lambda} \qquad (\lambda \neq -1)$$

となるから，与えられた2点A，Bと，数$\lambda \neq -1$によって，部分比λに対応する分点Pの座標x_P，y_P は，

$$x_P=\frac{x_A+\lambda x_B}{1+\lambda}, \qquad y_P=\frac{y_A+\lambda y_B}{1+\lambda}$$

である。また，これから逆に，部分比λは，

$$\lambda=\frac{x_P-x_A}{x_B-x_P}=\frac{y_P-y_A}{y_B-y_P}$$

によって定められる。

(24) a) $\{O:\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2\}$に関するPの，あるいは，基底$\{\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2\}$に関するベクトル$\mathfrak{x}$の座標x，yの意味

b) 直線の方程式(18)の，部分比としての媒介変数tの意味

を説明せよ。

補遺　必要条件と十分条件について

命題あるいは命題形式の多くは，数学においてのみならず，

p　ならば　q　である

の形である。ここに，pおよびqも，やはり，命題または命題形式である。

$\boxed{16}$ 自然数aに対して，

aが6で割り切れるならば，aは3で割り切れる

が成り立つ。

$\boxed{17}$ 2つの三角形が合同ならば，それは，また，相似である。

$\boxed{18}$ すべての実数a，bに対して，

$ab=0$　ならば，$a=0$　または　$b=0$　である

が成り立つ。

$\boxed{19}$ すべての実数a，bに対して，

$a>0$　かつ　$b>0$　ならば，　$ab>0$　である

が成り立つ。

$\boxed{20}$ すべての実数a，b，cに対して，

$a>b$　ならば，　$a+c>b+c$　である

が成り立つ。

例題E16において，pは，命題形式「aは6で割り切れる」であり，qは，命題形式「aは3で割り切れる」である。

自然数について，それが，6で割り切れることが知られれば，それはまた，3でも割り切れることが導びかれる。このことを，6で割り切れることは，3で割り切れるためには，十分であるという。これに対して，3で割り切れなければ，もはや，6では割り切れない。このことを，3で割り切れることは，6で割り切れるためには，必要であるという。

「………ならば………である」の形をした定理の表わし方としては，次のような形をとることも多い。

仮定：aは6で割り切れる

結論：aは3で割り切れる

1つの内容を，いろいろな異なった表わし方で表わされるが，次のことがらは，互いに，完全に同値である。

a） pならば，qである。

b） qでないならば，pでない。

c） pはqであるために十分である。（pは，qであるための十分条件である）

d） qはpであるために必要である。（qは，pであるための必要条件である）

e） 仮定：p　　　　結論：q

㉕ 例題E17からE20までの定理を，上にあげたb）からe）にしたがって表わせ。

例題E18は，逆も成り立つ。これは，次のことを意味する。

任意の実数a，bに対して，

$ab=0$　ならば，　$a=0$　または　$b=0$

かつ，$a=0$　または　$b=0$　ならば，　$ab=0$

が成り立つ。

したがって，$ab=0$は，$a=0$　または　$b=0$　であるために十分であり，かつ，$ab=0$は，$a=0$　または　$b=0$　であるために必要である。このことを，$ab=0$は，$a=0$　または　$b=0$　であるための，必要かつ十分な条件であるという。同様に，このとき，$a=0$　または　$b=0$　は，$ab=0$であるための，必要十分条件である。

巻末の，章別，学習単位別の問題数の一覧

練習問題数

各章において，左側は，学習単位，右側は，それに対する問題数を示す。また，問題が与えられていない学習単位は，省略してある。

a章		b章		c章		d章		e章	
A 1	8	B 2	3	C 1	5	D 1	4	E 2	5
2	7	3	4	2	4	2	3	3	5
4	8	4	2	3	4	3	1	4	15
6	10	9	12	5	7	4	4	7	16
9	12	10	3	7	1	5	3	9	5
10	8	12	20	8	2	6	5	10	7
12	9	13	1	9	1	7	7	11	14
13	3	14	3	10	8	8	1	12	12
14	11	15	3	11	1	9	8	13	12
15	10	16	1	13	12	10	11	14	10
17	10	18	1	14	4	11	4	15	5
19	7	19	1	15	3	12	9	16	7
20	6	20	1	16	2	13	2	18	8
22	11			19	1			19	6
24	12			20	1			20	4
				31	4			21	5
				32	8			22	2
				33	2			23	10
				34	36			24	3
計	132	計	55	計	106	計	62	計	151

総数　506

補充問題数

a章　33　　b章　4　　c章　10　　d章　11　　e章　15

総数　73

以上，あわせて　579題の問題があげられている。

補　充　問　題　の　例

a14. フランスの数学者であり法学者であったPIERRE DE FERMAT（1601－1665）は，

$$Zn = 2^{2^n} + 1$$

について研究し，$n = 0, 1, 2, 3, 4$ についてしらべた上で，すべての自然数 n に対して Zn は素数であるとの予想を立てた。

LEONHARD EULERは，$n = 5$ のときに，すでに正しくないことを証明した。

a）$2^{2^5} + 1$ は，$2^4 + 5^4 = 5 \times 2^7 + 1$ でわりきれることを示せ。

b）$Z = 2^m + 1$ は，m が奇数の約数をもたず，したがって，$m = 2^n$ のときには素数であることを証明せよ。

a18. $n \geqq 2$ のとき，n 個の正の実数 x_i の相乗平均は，それらの相加平均よりも大きくないこと，すなわち，$\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots\cdots x_n} \leqq \dfrac{x_1 + x_2 + \cdots\cdots + x_n}{n}$ が成り立つことを証明せよ。（解法のヒントが与えられている。）

a28. a）数列 $\left(\dfrac{1}{k!}\right)$, $\left(\dfrac{k}{k!}\right)$, $\left(\dfrac{k^2}{k!}\right)$, $\left(\dfrac{k^3}{k!}\right)$, $\left(\dfrac{k^4}{k!}\right)$ の単調性について研究せよ。ここに $k \geqq 0$ とする。

b）指数 n に対してある k_0 が存在し，それに対して，数列 $(a_n) = \left(\dfrac{k^n}{k!}\right)$ は単調に減少すること，すなわち，$k \geqq k_0$ に対して，$\dfrac{(k+1)^n}{(k+1)!} < \dfrac{k^n}{k!}$ が成り立つことを証明せよ。

c）$(a_n) = \left(\dfrac{n^k}{k!}\right)$ についても，同様なことをしらべよ。

c 4. a）関数 $y = \dfrac{x^2 + 4x + 3}{x^2}$ の，零点，極点，極値，変曲点を定めよ。この曲線の，$x \to \pm\infty$ における状態をしらべよ。

b）この曲線の概形をかけ。

c）この関数のグラフは，どのような点において，傾き $m = 2$ の接線をもつか。

d 6. 次の不定積分を，できるだけかんたんに求めよ。

a）$\int (a + bx)\,dx - \int (a - bx)\,dx$

b）$\int \left(x^3 - 2x^2 - \dfrac{1}{5}x + 1\right) dx + \int \left(x^3 + 2x^2 + \dfrac{1}{5}x - 1\right) dx$

d 7. 与えられた区間において，関数のグラフと x 軸との間にある部分の面積Aが，示された値をとるように，次のそれぞれの場合において，a，b，c などの値，または，その関係を定めよ。

a) $f(x)=-x^2+c^2$, $[-c, c]$, $A=36$

b) $f(x)=ax^3$, $[0, 2]$, $A=1$

c) $f(x)=ax^2$, $[-b, b]$, $A=b^2$

d) $f(x)=x(x-c)^2$, $[0, c]$, $A=\frac{4}{3}$

e 6. 数学的帰納法を用いて，ベクトル空間において，次の関係式が成立することを証明せよ。

a) $(\lambda_1+\lambda_2+\cdots\cdots+\lambda_n)\mathfrak{a} = \lambda_1\mathfrak{a}+\lambda_2\mathfrak{a}+\cdots\cdots+\lambda_n\mathfrak{a}$

b) $\lambda(\mathfrak{a}_1+\mathfrak{a}_2+\cdots\cdots+\mathfrak{a}_n) = \lambda\mathfrak{a}_1+\lambda\mathfrak{a}_2+\cdots\cdots+\lambda\mathfrak{a}_n$

e 7. 三角形ＡＢＣについて，頂点Ａ（2.5，－0.5），Ｂ（－1，4.5）と重心Ｓ（－0.5，1）が与えられている。頂点Ｃの座標，および，三角形の辺の長さを，それぞれ計算せよ。

e 10. 点Ａ（－1，－1），Ｂ（1，－4），Ｃ（8，4），Ｄ（1，6）は，$\{O : \mathfrak{i}, \mathfrak{i}\}$に関して計算された座標をもつ，四角形の頂点である。次にあげられた基底を持つ座標系$\{O' : \mathfrak{i}', \mathfrak{i}'\}$に関して，ベクトル$\overrightarrow{AC}$および$\overrightarrow{BD}$の成分を決定せよ。

a) $O'(1, 4)$, $\mathfrak{i}'\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $\mathfrak{i}'\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

b) $O'(-1, 1)$, $\mathfrak{i}'\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $\mathfrak{i}'\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

e 15. 2つの三角形ＡＢＣおよびＡ′Ｂ′Ｃ′の頂点Ａ（3，0），Ｂ（0，3），Ｃ（－2，－1）およびＡ′$(6\frac{1}{2}, 2\frac{1}{2})$，Ｂ′（5，4），Ｃ′（4，2）が与えられている。これらの三角形の辺は，2つずつ，互いに平行であること，および，2つの三角形の，互いに対応する2点を通る直線は，1点で交わることを証明せよ。

教科書の内容の系統図

A．数学的帰納法，数列	
数学的帰納法	A 7
和の記号	A 13
二項係数	A 14
数　列	A 16

B．極限値	
収束数列	B 3
発散数列	B 4
部分数列	B 6
級　数	B 11
連続性	B 18

上下界と上下限	
数集合の上下界，上下限	A 3
数列の上下界，上下限	A 18

極限値	
数列の極限値	B 1
関数の極限値	B 14

C．微分法	
微分可能性	C 4
導関数	C 7
有理関数	C 13
曲線の研究	C 21
平均値の定理	C 25

D．積分法	
定積分	D 2
原始関数と不定積分	D 5
積分法則	D 7
定積分の計算	D 9
平均値の定理	D 4

E．ベクトル計算，解析幾何	
移　動	E 1
ベクトル空間	E 8

一次結合	E 10
基底，成分	E 11
座標系の変換	E 15
直線の方程式	E 17
交点，部分比	E 23

第11学年教科書　　　　終