数学Ⅰ(ベクトル)の学習指導についての一つの試み

米 谷 数 子

【は じ め に】

高校での数学科の教育課程は，今また再検討され，指導要領の改訂をめぐって，各種の研究がなされ，現状を踏まえて如何に実施すべきかについては容易に断じ難い過渡期にあります。共通必修の数学Ⅰの内容をどうしたらよいかも最も論義される問題点の一つかと思います。併し，新しく改訂される数学Ⅰの内容がどう落ち着こうと，数学Ⅰのつぎに続く分としては，原則として選択の形をとるのであるから，指導内容が何であっても，それを通して数学を学ぶという態度を摑ませるねらいであることは肯けます。実際には，各学校の限られた教師陣容で，また，入試の枠などもあって理想的な幅広い選択は無理としても，大綱としてうち出された内容別の選択制度の中に自ら，高校の数学をどのような姿勢で指導するのが望ましいかを示唆したものと受けとめています。従って以下に展開する指導内容（ベクトル）は，これが現行の数学Ⅰの内容に属していたので，本校の一年生を対象に実践したのですが，新しい課程の中で，何処に位置づけられたとしても，それなりに一つのねらいを果すものにしたいと思ってとりあげたものです。また，付属学校である為の機会の教育実習期間に限って，一つの実験授業としてこれを行うこととなり，三名の教生（高井・北川・上江）諸君が実際に授業担当をし，テストの実施に協力参加したものであり，本校数学科教官特に上田外志夫教諭には準備・企画・指導案作りの教生指導に協力して貰ったものです。

【実施計画と研究経過】

(1) 指導内容の選択 —— ベクトルをとりあげたのは，つぎの理由からであった。生徒にとって，全く学習したことのない新しい内容であることが望ましい。すなわち，中学校または高校で既習の内容となるべく無関係であった方が指導法の実験には適するからである。また延10時間程度で或る区切りがつくものであることが望ましい。以上のことから，現行の数学Ⅰのベクトル教材を実施することに定めた。その段階で1年生の数学の既習事項は，東書数Ⅰ第一章数と式，第Ⅴ章三角関数のみでした。

(2) 指導目標（ねらい）についての討議 —— 教生を迎えるに先立って，教官室内での打ち合わせの結果，このベクトル教材を実施するねらいとして，以下のものがあげられた。

- ベクトルの意味と数学の演算法則の理解
- 平面図形の図形的直観の養成
- 座標平面の理論的基礎
- 図形の代数的取扱い
- 数学以外の教科，他領域への応用等。

この指導のねらいについては教生を迎えて更に具体的な討議にうつり，各目標間の関係等について話し合い，ねらいの記録をとった。

(3) この領域に関連する数学についての講義・討論 —— ベクトル空間，内積空間の初歩，ベクトル空間における定理の各例における意味，他教科における利用例等について，教生諸君と話し合い，教材資料の収集を宿題として課す。

(4) 教育学からの抜粋 —— 小目標をカードに記すときの必要条件，禁止事項，流れ図のかき方，以下の作業の途中で適宜説明，討論をする。

(5) 最終目標問題の選択 —— この指導内容の目標の上に立って私たちは，つぎの問題を最終の目標問題としてえらんだ。「三角形の周および内部を表わすベクトル方程式をかき，そうなることを証明する。」

(6) 目標問題の模範答案の作製 —— 教生の各人がこれを作る。

(7) 模範答案の分析 —— 各人の作った答案の各行を書けるようにする為に如何なる知識・技能が必要とされるかを分析し，それを生徒の学習目標を記述するような文体で，カードに各人が記入する。すなわち，具体的に定めた問題を通して，学習目標の分析をし，目標カードの作製する。

（留意点）1. 各目標は，達成されたかどうかを判定する為の評価問題が作れるものであること。

2. 必要以上の多くの因子が入りすぎないこと。（目標が大きすぎたり，小さすぎたりしないこと。）

(8) 各目標を望ましいと思われる指導順序に並べる —— 目標カードに各人で指導順序番号をつける。

（留意点）1. 最適なものを求めて時間をかけ過ぎない。(10)で再検討する。

(9) 重要目標の抽出 —— 各人の目標カードの中から，多くの人が書いた目標を抽出する。(1時間の授業に用いられる教材につき10個位が適当かと思う。)……… 討論する。

(10) 重要目標の指導順序の決定 —— 目標カードを大きな紙に左端によせて，指導順序に従って糊付けする。—— 討論しながら作業をすすめる。

(11) 第1時限の指導計画の作成 —— 指導者のリードにより，重要目標以外の目標を重要目標の間にはさみこむ。（学習目標の書き方の適否の指導，流れ図のかき方の指導，学習活動のかき方の指導）指導順序の決定した目標カードを見て，指導案に学習目標，学習活動，流れ図，留意点を書いてみせる。

(12) 指導案作製の分担 —— 順序のついた学習目標カードを適当なブロックに分け，指導案作製の役割を分担して，各自の作業をする。

(13) 綜合検討 —— 各自の分担作製した指導案を持ち寄り，順番に並べ，全員でよみ，改良を加える。

(14) 練習問題の作製 —— 練習の必要な目標のチェック，練習問題の作製

(15) 授業に使用する教具の使用法と準備 —— 特にO.H.P.の使用とそれの使用箇所の検討と準備をする。

(16) テスト問題の作製 —— はじめに定めた最終目標としての(5)の問題を具体化し，それに関連する実施問題を作製する。

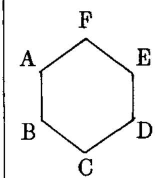
(17) 授業の実施 —— 以下の学習指導案に従って授業を展開する。ただし，部分的に，その指導法を，学級によって異なる仕方，例えば一方では具体例から導入して一般的なものに及ぼす帰納的な方法で他方では，逆に一般論から入る演繹的な方法でするなどの実験を行った。

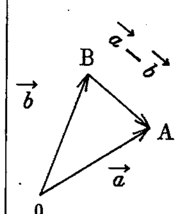
(18) 評価 —— 3学級共通のテストを2回行い，その理解度の評価をし指導法による差異があるかどうかを検討した。

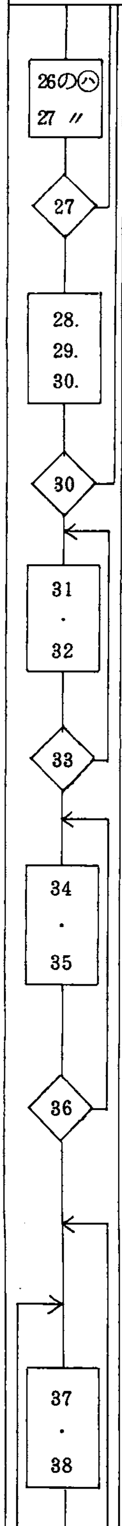
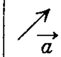
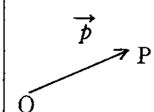
(19) まとめと反省 —— 上記の評価を通して，この実験研究授業の意義・方法についての反省をする。

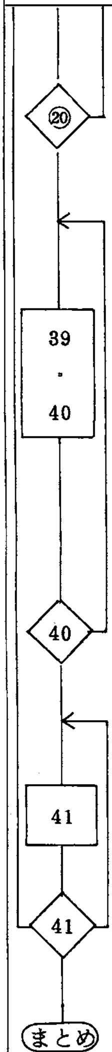
1年(　　)組　数学科学習指導案		期間　昭和52年6月20日 ～ 7月2日
題目	ベクトルとその演算	授業実施年月日　(　)年(　)月(　)日(　)曜(　)限
学習内容	Ⅰ　ベクトルの定義, 　有向線分(矢線), 相等 ……… 1時間 Ⅱ　ベクトルの加法, 零ベクトル, 　減法 ……………………… 1 〃 Ⅲ　ベクトルの実数倍, 演算法則 … 1 〃 Ⅳ　位置ベクトル, 図形への応用 … 1 〃 Ⅴ　直線上のベクトル, 半直線, 　線分, ベクトル方程式 ……… 2 〃 Ⅵ　三角形内の点のベクトル表示 … 1 〃 Ⅶ　評価(テスト) ……………… 2 〃 Ⅷ　まとめと反省 ……………… 1 〃 合計10時間	指導教官　上田・米谷・能崎 授業担当者 高井純一　東京大学理・卒　大阪大学大学院2年 北川博規　金沢大学教育学部　数学専攻4年 上江正信　金沢大学教育学部　数学専攻4年

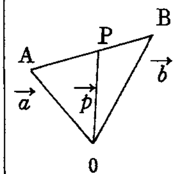
学習の流れ図	学習目標	学習内容	指導上の留意点
S 1の ㋑㋺ 2 〃 3. 4の ㋑㋺ 5 〃 8 〃	有向線分の定義を①のように述べることができる。	1. 有向線分とは①「線分の二つの端点に順序を与えたもの」であるという定義を㋑書く㋺読む㋩見ないで言ってみる。	
	有向線分によって表わした方が都合のいいような例として, 平行移動, 力, 速度を挙げることができる。	2. ②「有向線分の端点の第一のものを始点, 第二のものを終点」と言い, それを矢線で表わすと便利であることを知る。	ベクトルの表示 $\vec{a}$, $\mathbf{a}$ $\overrightarrow{AB}$ などあること
	有向線分の始点, 終点, 大きさの定義を②のように述べることができる。	3. 有向線分をベクトルと呼ぶことを知る。	
	二つの有向線分が同じ向きである, 逆向きである, の意味を③のように述べることができる。	4. ②「有向線分(矢線)の長さをベクトルの大きさという」なる定義を聞く。	ベクトルの大きさは $\lvert\vec{a}\rvert$, $\lvert\overrightarrow{AB}\rvert$ など
1の㋩ 2 〃 4 〃 5 〃 6. 7.	ベクトルは有向線分であると言える。 二つのベクトルが等しいという内容を④のように述べることができる。	5. ③「平行移動によって二つのベクトルの始点を一致させたとき, 始点と二つの終点が同一直線上にあるならば, 二つのベクトルは同じ方向を持つといい, このとき, 始点に関して二つの終点が同じ側にあるならば二つのベクトルは同じ向きである, 反対側にあるならば逆向きであるという」なる定義を聞く。	向きと方向の区別

学習の流れ図	学習目標	学習内容	指導上の留意点
		6. 正六角形の辺や対角線は有向線分と見ると二つの意味があることを聞き，それらの中から等しいベクトル，大きさの等しいベクトル，向きの等しいベクトル，逆向きのベクトルを見出す。	
7 ④		7. 各定義が言えるかを確かめる。	O.H.P.に上の正六角形や移動する矢線のシートを用意してこれを活用する
		8. ④「二つのベクトルが等しいときは，その向きと大きさが共に等しいことである」なる定義を聞く。	
9. 10.		9. 平行移動の合成はどのような平行移動であるか，力の合成はどのような力であるか考える。	
		10. ベクトルの和はどのようなものであるべきかを考える。	
11の ㋑㋺	ベクトルの和の定義を⑤のように述べることができる。この和が一意であることを示すことができる。	11. ベクトル$\vec{a}$，$\vec{b}$が与えられたとき，⑤「一点Aをとり，$\vec{a}$に等しいベクトル$\overrightarrow{AP}$と$\vec{b}$に等しいベクトル$\overrightarrow{PB}$を作る。このとき$\overrightarrow{AB}$を$\vec{a}+\vec{b}$と定義する」ことを聞く。	
11の㋩ 12.	ベクトルの和を作図することができる。	12. ノートにベクトルの和を作図してみる。	
12	零ベクトルの定義を⑥のように述べることができるとともに，その大きさと向きを述べることができる。	13. 正六角形の例で，あるベクトルが他のベクトルの和になっているようなものを探す。	上記O.H.P.の活用
13.	逆ベクトルの定義を⑦のように述べることができる。その作図ができる。	14. ベクトルの和が一意的であることの平行四辺形を用いての証明を聞く。	
13		15. ⑥「大きさが0であるベクトルを零ベクトルといい，$\vec{0}$で表わす」ことを聞く。	$\vec{0}$では始点と終点とが一致することを注意する
14.		16. 0の性質として $\lvert\vec{0}\rvert = 0$， $\vec{0}$の向きは任意， $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$	

学習の流れ図	学習目標	学習内容	指導上の留意点
15の㋑㋺ 16. 17の㋑㋺		であることを聞く。 17. ベクトル$\vec{a}$に対し，⑦「$\vec{a}$と向きが反対で，大きさが等しいベクトルを$\vec{a}$の逆ベクトルと言い，$-\vec{a}$と書く」なる定義を聞く。	
15の㋩ 17 〃 18. 19.		18. $\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$であることを見つける。	
19		19. $-\vec{a}$の逆ベクトルは$\vec{a}$であることを見つける。	
20. 21. 22の㋑㋺ 23.	ベクトルの和の交換法則を⑧のように述べることができる。	20. ⑧「任意の二つのベクトル$\vec{a}$，$\vec{b}$に対して$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$である」ことの証明を聞く。	
	ベクトルの和の結合法則を⑨のように述べることができる。	21. ⑨「任意の三つのベクトル$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$に対して$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$である」ことの証明を聞く。	
24. 22の㋩	ベクトルの差の定義を⑩のように述べることができる。	22. ⑩「$\vec{a}+(-\vec{b})$を$\vec{a}-\vec{b}$と書き，$\vec{a}$から$\vec{b}$を引いた差という」なる定義を聞く。	
	ベクトルの差を作図できる。	23. 「$\vec{a}-\vec{b}=\vec{x}$と$\vec{a}=\vec{b}+\vec{x}$とは同値である」ことの証明を聞く。	
24		24. ノートに二つのベクトルの差を作図する。	
25.		25. $a+a=2a$であるから$\vec{a}+\vec{a}$を$2\vec{a}$と書いてみることを類推する。	
26の㋑㋺ 27の 〃	ベクトルの実数倍の定義を⑪のように述べることができる。 ⑫のような性質を述べることができる。	26. 実数kとベクトル$\vec{a}$の積$k\vec{a}$を次のベクトルとして定義する。 ⑪「$k\geqq 0$のとき$k\vec{a}$は$\vec{a}$と同じ向きで，大きさが$k\lvert\vec{a}\rvert$に等しいベクトル，$k<0$のとき$k\vec{a}$は$\vec{a}$と逆向きで，大きさが$\lvert k\rvert\cdot\lvert\vec{a}\rvert$に等しいベクトル」	$k=0$，または$\vec{a}=\vec{0}$のときの注意を述べる。

学習の流れ図	学習目標	学習内容	指導上の留意点
		27. ⑫次の性質を定義より知る。 $\begin{cases} 1\cdot\vec{a}=\vec{a}, & (-1)\cdot\vec{a}=-\vec{a}, \\ 0\cdot\vec{a}=\vec{0}, & m\cdot\vec{0}=\vec{0} \end{cases}$	
	積の結合法則⑬を述べることができる。	28. ⑬「任意の実数 k，ℓ と任意のベクトル$\vec{a}$に対し $(k\ell)\vec{a}=k(\ell\vec{a})$ である」ことを例によって知る。	$\vec{a}+\vec{a}=2\vec{a}$  $-3\vec{a}$などの作図
	分配法則⑭⑮を述べることができる。	29. ⑭「$(k+\ell)\vec{a}=k\vec{a}+\ell\vec{a}$ である」ことを例によって知る。	
	⑭⑮の内容を図示することができる。	30. ⑮「$k(\vec{a}+\vec{b})=k\vec{a}+k\vec{b}$ である」ことの証明を聞く。	作図による証明
	位置ベクトルの定義⑯を知る。 位置ベクトルの表示ができる。	31. 位置ベクトルの定義 ⑯「定点Oが与えられたものとする。この平面内の任意の点Pに対して，有向線分 $\overrightarrow{OP}$ の表わすベクトル$\vec{p}$をOに対するPの位置ベクトルという」	
		32. 自由ベクトルと位置ベクトルの違いをのべる。	位置ベクトルの表現を用いるときの起点のとり方
		33. $\overrightarrow{AB}$ を，A，Bの位置ベクトル$\vec{a}$，$\vec{b}$で表わせるか。 $\overrightarrow{AB}=\vec{b}-\vec{a}$	P ($\vec{p}$)
	線分の分点の位置ベクトルを両端の位置ベクトルで表現することができる。	34. 分点の位置ベクトル 線分 ABを m：nに分ける点Pの位置 ベクトル ⑰ $\overrightarrow{OP}=\dfrac{n}{m+n}\overrightarrow{OA}+\dfrac{m}{m+n}\overrightarrow{OB}$	内分点，外分点
	線分上の任意の点を⑰から⑱の形に導けるようになる。⑲の内容を図示することができる。	35. 二点A($\vec{a}$)，B($\vec{b}$)を結ぶ線分の内分点C($\vec{c}$)の公式を ⑱ $\vec{c}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}$， $\alpha+\beta=1$， α，$\beta\geqq 0$ の形に変形しておく。	α，β：実数
		36. ⑱で $\alpha=1$，$\beta=0$ または $\alpha=0$，$\beta=1$ のとき，どうなるか考えさせる。	
	線分上の点を軌跡として考えて，線分のベクトル方程式⑳を知る。	37. 点Pの位置ベクトル$\vec{p}$が， ⑲ $\vec{p}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}$ α，$\beta\geqq 0$，	35の逆の37に対するたしかめ



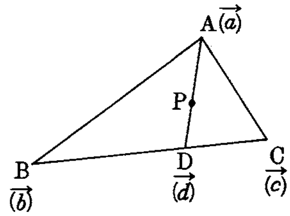


学習の流れ図	学習目標	学習内容	指導上の留意点
		$\alpha+\beta=1$ で表わされるとき，Pは$A(\vec{a})$，$B(\vec{b})$に対してどんな位置関係にあるか，発問し，これを証明する。	
	線分のベクトル方程式から条件をゆるくすることによって，半直線，直線のベクトル方程式が得られることを知る。	38. $\{P(\vec{p}) \mid \vec{p}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}\ \ \alpha,\beta \geqq 0,\ \alpha+\beta=1\}$ この集合はαが0から1まで連続的に変化したときの軌跡である。線分ABを表わすことをたしかめる。 ⑳ $\vec{p}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}\quad \alpha,\beta \geqq 0,$ $\alpha+\beta=1$ 線分のベクトル方程式	線分
		39. ⑳で$\alpha \geqq 0$，$\beta<0$または$\alpha<0$，$\beta \geqq 0$としたらどうなるか考える。	半直線
		40. ⑳で$\alpha+\beta=1$　α：実数　としたらどうなるかを考える。	直線
	三角形の内部（および周）を表わすベクトル方程式が㉑のように表現できる。 また，この方程式と三角形とが同値であることの証明の大筋を述べることができる。	41. 「三角形の周および内部の一点が与えられたときこの点の位置ベクトルは，頂点の位置ベクトルを用いてどのように表わされるか」との課題が与えられる。 ㉑ $\vec{p}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c}$ $\alpha+\beta+\gamma=1,\quad \alpha,\beta,\gamma \geqq 0$ ㉑を三角形を表わすベクトル方程式と結論してよいかを考える。（別紙詳記）	三角形のベクトル方程式 $\triangle ABC$ $=\{P(\vec{p}) \mid ㉑\}$

41. の学習内容の詳細

三角形の三頂点を$A(\vec{a})$，$B(\vec{b})$，$C(\vec{c})$とし，三角形ABC内及び周上の任意の一点を$P(\vec{p})$とするとき，$\vec{p}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c}$，$\alpha+\beta+\gamma=1$，$\alpha,\beta,\gamma \geqq 0$ ……… ㉑

㉑が導かれることをつぎの〔I〕の順序で聞く。



〔I〕 (i)　$P \neq A$のとき　APとBCの交点をDとすると

$\vec{d}=p\vec{b}+q\vec{c}\quad p+q=1\quad p,\ q \geqq 0$

$\vec{p}=\alpha\vec{a}+r\vec{d}\quad \alpha+r=1\quad \alpha,\ r \geqq 0$

$\vec{p}$の式の$\vec{d}$に上の式を代入して

$\vec{p}=\alpha\vec{a}+r(p\vec{b}+q\vec{c})$

$=\alpha\vec{a}+rp\vec{b}+rq\vec{c}$　　ただし$\beta=rp$，$\gamma=rq$とおくと

$=\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c}\qquad \alpha+\beta+\gamma=1,\quad \alpha,\beta,\gamma\geqq 0$

(ii) P＝Aのとき　$\alpha=1,\quad \beta=\gamma=0$　とおけばよく，この条件はみたされる。

これだけで，㉑は三角形を表わすベクトル方程式と結論してよいかを考える。㉑が三角形内の点を表わす十分条件ではないかも知れない。その証明をつぎの〔II〕でたしかめる。

〔II〕 (i)　$\alpha\fallingdotseq 1$ のとき　$\vec{p}=\alpha\vec{a}+(1-\alpha)\left(\frac{\beta}{1-\alpha}\vec{b}+\frac{\gamma}{1-\alpha}\vec{c}\right)$

ここで $\frac{\beta}{1-\alpha}+\frac{\gamma}{1-\alpha}=1$ であるから $\vec{d}=\frac{\beta}{1-\alpha}\vec{b}+\frac{\gamma}{1-\alpha}\vec{c}$,

$\frac{\beta}{1-\alpha},\ \frac{\gamma}{1-\alpha}\geqq 0$

D($\vec{d}$)はBCの内分点である。また $\vec{p}=\alpha\vec{a}+(1-\alpha)\vec{d}\qquad \alpha\geqq 0,\ 1-\alpha>0$

P($\vec{p}$)はADの内分点である。よって，Pは△ABC内及びAを除く周上にある。

(ii)　$\alpha=1$ のとき　$\beta=\gamma=0$　であるから　$\vec{p}=\vec{a}$　すなわち　P＝A　であり

Pは△ABCの周上にある。

以上，〔I〕,〔II〕によって㉑は三角形（周及び内部）のベクトル方程式であると結論してよい。

【学級によって指導法に差をつけた点】

(1) 学習内容の項目II　零ベクトル（15，16）

零ベクトルの定義

◇　1年B組，1年C組では，ほぼ上記指導案通りの行き方をした。

◇　1年A組では，16. の性質としてあげたものは定義になった。

ベクトル $\vec{x}$ が任意のベクトル $\vec{a}$ に対して，$\vec{a}+\vec{x}=\vec{a}$ となるような $\vec{x}$ を $\vec{0}$ と定義した。

これから，$\vec{a}=\overrightarrow{AB}\quad \vec{x}=\overrightarrow{BC}$ とすると，$\vec{a}+\vec{x}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$ から $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}$

$\therefore$ C＝B　$\vec{x}=\overrightarrow{BB}$　すなわち $\vec{0}$ は始点と終点が一致するベクトルでなければならないことから，$\vec{0}$ の大きさは 0，向きは任意と定めて特別にベクトルの仲間入りさせること。

◇　$\vec{0}$ の一意性については，A組では証明はしないが，ふれている。B，C組では言及しなかった。

(2) 学習内容のうちの項目III　ベクトルの実数倍，演算法則（25～30，34）

三学級とも指導の順序は上記の指導案に副って実施したのであるが，具体的な実施に際しては，

◇　1年B組では，はじめから一般的な定義・定理の型で与えのちに，問題練習などで，具体例を指摘するという立場，即ち，演繹的な方法を主として取った。

◇　1年C組では，具体的な数値を与えた例から指導し，いくつかの例を通して，一般的な定義の妥当性や定理の真なことを直観的に認識させる方法をとった。

◇　1年A組では，BとCの中間的な方法によった。即ち，時には具体例をあげて，一般的な命題を証明し，34. の内容などは一般的場合の証明を終ってから個々の数値の問題をするなどの折衷案をとった。

テスト問題　その1

1 平面上に相異なる点A($\vec{a}$), B($\vec{b}$), C($\vec{c}$)がある。△ABCの辺BCを3：2に内分する点をD, ADを1：2に内分する点をPとする。Pの位置ベクトル$\vec{p}$を$\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$を用いて表わせ。

2 平面上に相異なる3点A($\vec{a}$), B($\vec{b}$), C($\vec{c}$)がある。A, B, Cが平行四辺形の3つの頂点であるとき，残りの頂点Dの位置ベクトル$\vec{d}$を$\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$を用いて表わせ。

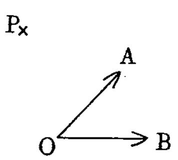
3 平面上に相異なる2点A($\vec{a}$), B($\vec{b}$)がある。直線AB上にPとBとがAに関して反対側にあるように点P($\vec{p}$)をとる。

(i) $\vec{p}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}$と表わされることを証明せよ。

(ii) (i)において$\alpha+\beta$の値を求めよ。

テスト問題　その2

1



図のように点O, A, B, Pがある。
$\overrightarrow{OP}=\alpha\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OB}$の形にしたとき，実数$\alpha$, βはどのように定義したらよいか。作図して説明せよ。

2 3点O($\vec{o}$), A($\vec{a}$), B($\vec{b}$)を頂点とする△OABにおいて，OA, ABをそれぞれ2：1に内分する点をP($\vec{p}$), Q($\vec{q}$)とし，2直線PQ, OBの交点R($\vec{r}$)とする。

(i) $\vec{p}$, $\vec{q}$, $\vec{r}$を$\vec{a}$, $\vec{b}$で表わせ。

(ii) RはOBをどんな比に分けるか。

3 一平面上に4定点O, A, B, Cがある。A, B, Cは一直線上にないものとする。

(i) 二条件$p\overrightarrow{OA}+q\overrightarrow{OB}+r\overrightarrow{OC}=\vec{O}$, $p+q+r=o$を満たす実数p, q, rは，$p=o$, $q=o$, $r=o$以外にないことを示せ。

(ii) Qがこの平面上の点であって$\overrightarrow{AQ}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$（$x$, yは実数）であるとき，$\overrightarrow{OQ}=\ell\overrightarrow{OA}+m\overrightarrow{OB}+n\overrightarrow{OC}$, $\ell+m+n=1$をみたす実数ℓ, m, nは必ず存在し，しかもおのおのの値は，ただ一つに定まることを証明せよ。

4 一直線上にない3点A($\vec{a}$), B($\vec{b}$), C($\vec{c}$)があるとき，△ABCの内部のベクトル方程式はどうなるか。

以上のテストは，何れも，予告なく，それぞれの授業の直後に実施した。すなわち，テストその1は，学習指導内容Vのうちの36.まで終った段階で，また，テストその2は41.まで終った日の放課後に実施して，授業に対する理解度を調査したものです。

テスト　　その１のクラス別得点分布　　　　$\overline{x}$：平均点　　σ：標準偏差

問題	1 10点満点							2 10点満点							3 10点満点							計30点
得点＼学級	10	9〜7	6〜4	3〜1	0	$\overline{x}$	σ	10	9〜7	6〜4	3〜1	0	$\overline{x}$	σ	10	9〜7	6〜4	3〜1	0	$\overline{x}$	σ	$\overline{x}$ σ
1 A	24人	12	3	2	4	7.7	3.6	1	6	32	5	1	5.2	2.0	3	13	11	15	3	4.8	3.2	17. 8 6. 9
1 B	13	24	4	1	3	7.8	2.8	4	9	25	2	5	5.6	2.8	2	16	8	6	13	4.4	3.7	17. 8 6. 4
1 C	18	19	2	0	6	7.8	3.4	1	5	27	4	8	4.4	2.6	7	18	4	4	12	4.7	4.1	16. 9 8. 3
全学年（人数）(%)	55 41	55 41	9 7	3 2	13 10	7.8	3.3	6 4	20 15	84 63	11 8	14 10	5.0	2.5	12 9	47 35	23 17	25 18	28 21	4.6	3.7	17. 5 7. 6

テスト　　その２のクラス別得点分布

問題	1 15点満点						2 15点満点						3の(i) 13点					3の(ii) 12点					4 15点					計70点
得点＼学級	15〜12	11〜8	7〜4	3〜0	$\overline{x}$	σ	15〜12	11〜8	7〜4	3〜0	$\overline{x}$	σ	13〜8	7〜3	2〜0	$\overline{x}$	σ	12〜10	9〜3	2〜0	$\overline{x}$	σ	15〜12	11〜4	3〜0	$\overline{x}$	σ	$\overline{x}$ σ
1 A	10	9	8	18	6.0	5.0	6	26	9	4	8.7	3.2	4	8	33	1.8	2.7	0	10	35	1.3	2.6	8	25	12	6.8	4.7	24. 7 11. 4
1 B	1	8	12	24	4.2	3.7	4	21	17	3	8.0	2.6	1	5	39	0.9	2.1	0	6	40	0.8	1.9	13	12	20	5.5	5.4	19. 4 8. 6
1 C	6	9	15	15	6.2	4.8	7	13	22	3	7.6	0.9	1	8	36	1.1	2.3	0	6	39	0.8	1.9	4	23	18	4.9	4.5	20. 5 9. 3
全学年（人数）(%)	17	26	35	57	5.5	4.7	17	60	48	10	8.1	2.4	6	21	108	1.3	2.5	0	22	114	1.0	2.1	25	60	50	5.7	5.0	21. 5 10. 2

テスト　　その１とその２の合計点（１００点満点）の分布

	100〜70	69〜60	59〜50	49〜40	39〜30	29〜20	19〜10	9〜0	$\overline{x}$	σ
1 A	1	6	9	11	9	5	3	1	42.47	15.34
1 B	0	1	8	14	7	12	3	0	38.86	12.65
1 C	1	6	9	10	10	5	3	1	37.55	15.12
学年 人	2	13	26	35	26	22	9	2	39.63	15.03
学年 %	1.5	19.6	19.3	25.9	19.3	16.3	6.7	1.5	135人（100%）	

【テストの結果による評価】

(1) どの問題も基本的であると言えるのであるが，（その１）の方が，比較的素直な問で類型の問題や，考え方は授業で指導してあるため，成績は全体として５８％程度出来ていた。それに比べて（その２）の方は，本質的な問題であるが故に，本当の意味で理解されていないと難かしい問題であったようで，３１％程度しか得点がない。

(2) 指導法に多少の差異をつけたことが，学級の成績に表われるかという点で見直し，得点に対する有意差の検定をしてみた。

(i) 先づ（その１）と（その２）の合計点について，総合的な成績の結果に学級別の差が見られるかどうか，を調べるために，つぎの仮説をたてた。

（仮説）指導法の差によって，テストの成績は変らない。

信頼限界９５％のｔ検定を適用してみた。$n_1+n_2-2=88>30$ より∞に対するｔの表より，有意水率５％での $t_0 \fallingdotseq 1.960$

◇Ａ組とＢ組の差があるか，　$(\overline{x}_A-\overline{x}_B)\times\dfrac{\sqrt{n_1+n_2-2}\sqrt{n_1\cdot n_2}}{\sqrt{n_1 S_A^2+n_2 S_B^2}\sqrt{n_1+n_2}}=t$ によってｔの値を計算すると，$t=1.20$ が得られるので，$P\{|t|>1.204\}>0.05$ となり，仮説は捨てられない。即ち成績の有意差はない。

◇Ａ組とＣ組の場合　　$t \fallingdotseq 1.51$　　　◇Ｂ組とＣ組の場合　　$t \fallingdotseq 0.10$

となり，何れも有意差はない。

(ii) （その１）の成績に学級差があるか。

データからＡ組とＢ組の差はないのでＢ組とＣ組について検定をしてみると，９５％の信頼限界で，$t=0.57$ が得られ，$t_0=1.960$ に比べてこれも有意差はない。

(iii) （その２）の成績に学級差があるか。

(i)同様に，「学級の指導法による成績の差はない」との仮説をｔ検定でみると，つぎのようになる。Ａ組とＢ組の間では，$t=2.46>1.96$ より $P\{|t|>2.46\}<0.05$ より，仮説は捨てなければならない。即ち９５％の信頼限界で，Ａ組とＢ組の（その２）の成績全体についての有意差はあるとしなければならない。

Ａ組とＣ組の場合では，$t=1.89<1.96$ より９５％の信頼限界では有意差はないが >1.64 ９０％の限界では有意差がありＡ組の方がよい。

Ｂ組とＣ組の場合では，$t=0.58<1.64$ となり同様に有意差はない。

(V) （その２）のうちの特に成績の良くなかった$\boxed{3}$について検討してみた。

$\boxed{3}$の(1)

A組，B組について　t≒1.9 2

A組とC組について　t≒1.3 1

B組とC組について　t≒0.4 3

$\boxed{3}$の(2)

AとB、AとC について，何れも　t＝1.0 3

BとCでは勿論差はない

以上によって，指導法の点で$\vec{0}$に対する定義などについて差をつけたA組がB，Cに比べて，９０％の信頼限界では，(1)については有意差があるが９５％の信頼限界では，実際には有意差は認められなかった。

(3) 概して成績は思った程良くなかったのは，授業を集中的に受けただけで，ドリルや質問の時間を取ることなく，直後にテストを実施したことにも起因しているようである。

【反省とまとめ】

◇ 初期の計画通り２週間の教育実習中に限って，この「ベクトル」をとりあげ１年生に指導したのであるが，全く新しい教材であり，新しい数学的な概念であるから，短かい期間で，集中的に指導したことは，生徒の側からすれば多少負担であり表面的な理解は出来たとしても，本当の意味の理解はなされていない点が多かったように思う。余分の要素（生徒各自の自習時間の差異）を除外して，純粋に授業を受けただけで，予告なしの直後の評価を得ようとして作為したことなので止むを得ないのではあるが，生徒の方の意見として，疑問点を残して受けさせられたテストを自分の数学の力と評価されたくないと答案に記したものもあった。実際，これは指導法に対する反省のデータであるので，学期末の成績とは無関係のものとして処理した。更にベクトルの応用の分は残されているのであるし，別の機会に再びまとめ，補充する予定である。

◇ 指導法を学級によって多少差をつけたとは言いながら，具体的にテスト問題を解答するし方の差異について，もっとしぼって再検討することがなされねばならなかった。とりあげた問題が比較的総合的視野に立つものが多かったこともあり，題意を摑むことが既に困難であった生徒も多かったようである。

◇ 実験的に指導法に差異をつけた点以外の条件に対してはなるべく等しいものにするために，O.H.P.を活用し，共通の材料で，説明する時間等も殆んど同一になるように配慮した。この機器の使用で，かなり能率的ではあったと思うが，時間的な速さで或は生徒はノートにとり切れなかった点などもあったようであり，一考を要する点でもある。

◇ 既習の学習内容が数式の計算と三角関数のみであり，座標平面での直線その他の解析的取扱いはこの後に学習するので，ベクトルの扱いは，矢線ベクトルで通し成分表示にふれていない。これは座標平面で図形の性質を取扱う場合に，ベクトルの応用として取り扱う予定で従来の多くの教科書で，重複していた分をまとめてこの後に指導する「平面図形と式」の単元でとりあげる予定である。

短い期間の実験で，結果の分析についてもまだ，今後の研究に残される分があるのですが，一応，現在までの分についての経過報告をここに記したものです。諸先生方の御指導を仰ぎたいと思います。