東ドイツの数学教科書紹介(1)

海外教育事情視察報告　その2

能　崎　克　己

前号において，東ドイツ上級中等学校の数学科指導計画の全文を掲載したが，本号以下において，その指導計画の具体化とみられる教科書の概略を紹介する。

本稿の目的は，指導計画に基づく，第11学年，および，第12学年の教科書の内容を，できるだけそのままに紹介することにあるが，その全内容を，完全にあげるためには，非常に多くの紙数を要し，本誌の性格上，実際には不可能なことであると思われる。そのため，おおむね，あとで述べる基準にしたがって，紹介することにする。

教科書は，第11学年用，第12学年用，各1冊となっており，それぞれ272ページ，223ページより成っている。各学年とも，数個の章より成り，それぞれA章，B章，……と名づけられ，末尾に，それらの各章に対する練習問題が　それぞれ，a章，b章，……としておかれている。各章は，2～5個の小項目に分けられ，さらに，各章13～34の節に分けられている。各章および小項目の内容，およびそのページ数は，次ページの通りである。

各節とも，内容は，普通の説明文のほか定義，定理およびその証明，例題およびその解，練習から成っており，定義，定理には ▷，例題には □，練習には ○ の記号をそれぞれの冒頭につけ，その中に，それぞれ番号が付されている。たとえば，$\boxed{15}$ は，例題15を示しており，他の箇所で引用する場合，C定理23といえば，C章の ▷23 の定理を意味する。また，各節のことを，学習単位といっており，学習単位B10といえば，B章の第10節を意味している。さらに，本書には，随所に，多数の図がのせられているが，本稿では，図は一切省略した。

本稿における紹介の基準は，次の通りである。

説明文 ── 前後の連絡上，その他の理由により必要なものは，その要約をあげる外は，すべて省略する。

定　義 ── 全文を，そのまま紹介する。なお，▷の記号がつけられていない説明文中の定義についても，できるだけ全文をあげる。

定　理 ── 全文を，そのままあげる。また，その証明については，次のように取扱う。
普通わが国の教科書で用いられている方法は省略し，（証明略）と表示する。
わが国の教科書ではとりあげられていない定理，または，とりあげられている定理でも証明がなされていないもの，または，異なる証明法がとられているものは，その全文または概要をあげる。
証明されていないものは，（証明なし）と表示する。

例　題 ── 全文をあげ，説明（証明，解法）は原則として省略し，（解略）などと表示する。場合によっては，答のみあげる。特別に異なった方法は，全文または概略をあげる。また，解が全くあげられていないものは，（説明なし）などと表示する。

練　習 ── 全文をあげるのみとする。

訳には十分注意したつもりであるが，誤訳があれば，お許しを願いたい。

各章および小項目（指導計画にあげられているものとほぼ同じ），ページ数一覧表

数　学　第11学年教科書

発行　ベルリン Volk und Wissen Volkseigener 出版 1975年
著者　Günter Lorenz, Günter Pietzsch — A, a章
Horst Lemke — B, C, D章
Günter Fanghänel — b, c章
Otto Kegel — d章
Brigitte Frank — E, e章
Werner Stoye — 補遺
ドイツ民主主義共和国国民教育省により，教科書として承認

A章　数学的帰納法，かんたんな数列

数集合の構造　上（下）界，上（下）限

1．数集合の構造の復習

集合が定義され，$x \in M$，$x \notin M$ の記号が説明されている。また，集合の書き方として，たとえば，10より大きくない素数全体の集合 P_{10} を $P_{10}=\{2, 3, 5, 7\}$ をとっている。次いで，単集合，定集合が定義され，また，部分集合が定義され $M_1 \subseteqq M_2$ なる記号も出ている。部分集合については，真部分集合 $M_1 \subset M_2$ と，非真部分集合 $M_1 = M_2$ の区別がはっきりとなされている。

自然数の集合N，整数の集合G，負でない分数の集合 R^*，有理数の集合R，実数の集合Pについて，たとえば，Nから R^* へ，Rへ，さらにPへの拡張のそれぞれの場合についてそのようすと，数体系が次第に完全になっていくのを示す概要が，図示によって示されている。特に，拡張された数集合に対して，次のような不完全性を除去されるとしている。

実際の問題の不十分な理解と解決
演算の実行が無制限ではないこと
数直線の不備，すなわち，大量の数のない線分の存在

実数の集合でも，すべてのn次方程式がPにおいて解をもつとはいえない欠陥があることを示し，複素数の集合への発展を暗示している。

① $N \subset G \subset R \subset P$ について，可能な演算，幾何学的な図解によって，拡張の概要をまとめてみよ。

2．数集合拡張の原理

Nから R^* へ，R^* からRへ，RからPへの3つの拡張は本質的に同一原理によることを述べ，$R^* \to R$ を例として，その拡張の考え方を次のように述べている。

一般に	例
目的：もとの数集合は最終的には新しい数集合として証明されるべきものである。（5.参照） 新しい数集合では，もとの数集合の確かな欠陥は除かれなければならない。	$R^* \subset R$が成りたたなければならない。Rにおいては，減法が無制限に実行できなければならない。
1. いままでの数集合の数から，新しい対象を構成する。	$a \in R^*$かつ　$b \in R^*$なるa，bによって，すべての順序対［a，b］を構成する。
2. これらの対象の集合において，それぞれの場合に応じて，適当な方法で類への分類を行なう。すなわち，この分類により，個々の対象がただ1つの類に属するようにする。対象それ自体が，その類の代表としてみられる。	2つの順序対［a，b］と［c，d］は $$a+d=b+c$$ のとき，かつそのときに限り，等しい類に属する。従って．たとえば，［3，5］と［$\frac{9}{2}$，$\frac{13}{2}$］は等しい類に属し，［$\frac{3}{4}$，0］は別の類の代表である。
3. これらの類は，新しい数として定義される。このような数の表示には，類の代表が利用される。 場合によっては，新しい数に対し、記録された代表から導びかれたさらに新しい記号が導入される。	この種の類は，有理数と呼ばれ対［a，b］は，有理数r［a，b］を表わす。 個々の類には，0が現われるような対がただ1つ存在する。$a \neq 0$のとき，対［a，0］は有理数　$+a$　を表わすものとし，［0，a］は$-a$を表わすものとする。 また，［0，0］を，有理数に関する± 0と名付ける。従って，たとえば，［3，5］と［$\frac{9}{2}$，$\frac{13}{2}$］は，有理数-2の代表であり，［10，$\frac{37}{4}$］，［$\frac{3}{4}$，0］　は　$+\frac{3}{4}$　を表わす。
4. 新しい数に対する順序と演算を，その代表を用い，また，前の数集合の順序と演算を利用して説明する。演算記号および順序関係の記号は，もとの数集合においてそれぞれに用いられた記号と異ならなければならない。（6.参照） 説明は，次のことが十分に考慮されなければならない。すなわち，演算の結果や大小の比較が，演算のために用いられたり，または，比較されたりするためにその都度選ばれる代表の数に左右されるものではない。	定義　$a+d<b+c$　のとき，かつそのときに限り $$r[a,b] \circledless r[c,d]$$ 定義　$r[a,b] \oplus r[c,d]$ $$=r[a+c,\ b+d]$$ 減法については，加法の逆演算として得られる。 $$r[a,b] \ominus r[c,d]$$ $$=r[a+d,\ b+c]$$ たとえば，$r_1=-2$，$r_2=+\frac{3}{4}$　とすると，$r_1=r[3,5]$，$r_2=r[10,\frac{37}{4}]$より，$3+\frac{37}{4}<5+10$ であるから $$-2 \circledless +\frac{3}{4}$$ が成り立つ。 さらに $$(-2)\oplus(+\tfrac{3}{4})=r[3+10,\ 5+\tfrac{37}{4}]$$

$=r[13, \frac{57}{4}] = -\frac{5}{4}$

$(-2) \ominus (+\frac{3}{4}) = r[3+\frac{37}{4}, 5+10]$

$=r[\frac{49}{4}, 15] = -\frac{11}{4}$

r_1，r_2 として他の代表，たとえば $[\frac{9}{2}, \frac{13}{2}]$ と $[\frac{3}{4}, 0]$ をとっても，いつも同じ結果を得る。

乗法や除法についても同様に成り立つ。

5. 新しい数集合には，ある真部分集合が存在し，その要素は，はじめの数集合の数に，順序と演算をそのまま保ちながら1対1に対応づけられる。

すべての有理数 $+a$ すなわち対$[a, 0]$で表わされるすべての有理数は，± 0 とあわせて，Rの真部分集合をつくる。Rのこの部分集合の要素は

$+a \leftrightarrow a$，ならびに $\pm 0 \leftrightarrow 0$

によって，R^*の要素に1対1の対応がつけられる。

$a < b$のとき，かつそのときに限り $+a \otimes +b$，また，$a+b=c$ のとき，かつそのときに限り $(+a) \oplus (+b) = +c$であり，その他の演算についても同様である。

6. そのような部分集合が存在すれば，新しい数集合における順序と演算が，前の数集合のそれの継続として定められ，また，新しいものの部分集合を前の数集合と交換することができるのである。

そして，このとき，数集合の拡張により，最後の数集合が新しいものの真部分集合であることがいえるのである。

有理数$+a$は分数aにより，また，有理数± 0は分数0によって代用される。記号 ⊗, ⊕, ⊖,…… は，<，+，−，…… によって代用され，従って，同じ名称を使用することが正当化される。

$R^* \subset R$ が成り立つ。

Rにおいて無制限に実行可能な加法により，減法も，それゆえに，Rにおいて無制限に実行可能である。

② 有理数の乗法も，また，負でない分数の数集合における乗法の「継続」であるように定義を試みよ。そのあとで，乗法の逆演算としての除法を研究せよ。

3. 上（下）界と上（下）限

Pの部分集合の例として，以下の集合をとりあげる。

P_r ： すべての素数の集合

G ： すべての整数の集合

R^- ： すべての負の有理数の集合

M_1 ： $0 \leqq r \leqq 1$ なるすべての有理数の集合

M_2 ： $0 < r < 1$ なるすべての有理数の集合

M_3 ： $\frac{n}{n+1}$ なるすべての有理数の集合 （$n \in N$，$n \neq 0$）

M_4 ： $\frac{n+1}{n}$ なるすべての有理数の集合 （$n \in N$，$n \neq 0$）

（自然数の集合には，0が含まれているようである。—訳者註）

▷1 定義　集合Mのすべての要素 x に対して $S \leqq x$ が成り立つとき，S を M の下界という。集合が下界をもつならば，その集合は下に有界であるといい，その他の場合には，下に有界ではないという。

[1] 集合 M_4 は下に有界であり，下界は，たとえば，0や1である。Pr にくらべて異っていることは，M_4 の要素そのものは，どれも下界にはならないということである。

③ さきにあげたその他の集合に対しても，それらの下への有界性を研究せよ。それぞれが下界であるような2つの数をえらんで，下に有界であることを理由づけよ。また，それに応じて，その数自体がその集合に属するような下界をみつけてみよ。そのような下界は，その集合の中に，最大限存在するか。

▷2 定義　集合Mのすべての要素 x に対して，$x \leqq S$ が成り立つとき，SをMの上界という。集合に上界があるとき，その集合は上に有界であるという。

集合が，上と下に有界である（または有界でない）ならば，かんたんに，集合は両側に有界である（または有界でない）ともいう。

[2] Pr は上に有界ではない。どんな大きな素数も存在するからである。これに対して，R^- については，すべての正の数が上界である。ゆえに，R^- は上に有界であるが，下には有界ではない。

④ さきにあげた集合から，上に有界なものをあげよ。それぞれについて，その集合の上界となるような2つの異なる数をあげて理由づけよ。また，両側に有界である集合をあげよ。

⑤ 上界，下界に関して，集合 M_1 と M_2，および M_3 と M_4 を比較せよ。

4.

▷3 定義　集合Mの $\left\{\begin{array}{l}\text{すべての上界のうちで最小のもの}\\\text{すべての下界のうちで最大のもの}\end{array}\right\}$ をGとするとき，この数Gを，Mの $\left\{\begin{array}{l}\text{上限}\\\text{下限}\end{array}\right\}$ という。

[3] 集合 M_1 も集合 M_2 も，下限として0，および，上限として1をもつ。M_1 はその上下限それ自体を要素として含むが，M_2 についてはそうではない。

M_3 では，下限は $\frac{1}{2}$，上限は1，M_4 では，下限は1，上限は2である。

ある数Gが集合Mの上限であることを示すには，第1に，Gが上界の1つであること，第2に，Gより下に多くの数がいかに稠密に存在しようと，Gより小さいどんな数G′も上界に

なり得ないこと，すなわち，Mの要素の少なくとも1つがG'をこえることを証明しなければならない。しかし，M_1 から M_4 に対するこのような証明は，ここでは行なわない。

⑥ Gが下界であることを証明するには，どんな手順が必要か。

5. 上（下）限に関する定理

4 平方が2より小さいすべての有理数の集合Qを考察する。$\sqrt{2}$はQの上限である。

証明　すべての$x \in Q$　に対して　$(\sqrt{2})^2 = 2 > x^2$　が成り立つ。関数$f(x) = x^2$　は，正数 x に対して単調増加であるから，すべての　$x \in Q$　に対して$x < \sqrt{2}$が成り立ち，よって $\sqrt{2}$ はQの上界である。

つぎに，任意の数$G' < \sqrt{2}$が，上界になりえないことを示す。$G' < \sqrt{2}$　だから，G' および$\sqrt{2}$を小数で表わすと，小数第何位かで，はじめて互いに異なってきて，その桁では，G'を表わす小数は，$\sqrt{2}$を表わす小数よりも小さい数である。そこで，$\sqrt{2}$を表わす小数を上記の次の桁からあとの数字を零でおきかえると

$$G' < r < \sqrt{2} \qquad \text{ゆえに} \quad r^2 < 2 \qquad \therefore \quad r \in Q$$

なる有理数rが得られる。

（例えば，$\sqrt{2} = 1.414213562\cdots\cdots$　に対して　$G' = 1.41421355976$　とすれば，説明した方法によって　$r = 1.41421356$　を得る。）

したがって，Qの1つの要素がG' を上まわり，G'はQの上界ではありえない。したがって$\sqrt{2}$は Q の上界である。

⑦ よく知られているように，いかなる2つの有理数の間にも，つねに（少なくとも）1つの別の有理数が存在する。さらに一般化して，実数 s と無理数 z との間に，つねに（少なくとも）1つの有理数があることが導かれる。2つの実数の間に，つねに無理数が存在することについての証明を十分検討してみよ。

⑧ Qの下限を調べよ。

4 定理　上に（下に）有界である有理数の集合は，有理数の集合の中に上（下）限をもたない。（証明なし）

6.

5 定理　上に（下に）有界な，空でない実数の集合は，上（下）限をもつ。（証明なし，例示のみ）

⑨ 空集合を，はっきりと除外しなければならないのはなぜか。

この節の最後に，集合P，R，R^*，G，N についての上下界，上下限についての要約がなされている。

数学的帰納法の証明方法

7.

⑥ 基本定理　空でない自然数の集合は，すべて最小の要素をもつ。（証明なし）

⑩ なぜ，空集合が除外されなければならないのか考えてみよ。

⑦ 定理　Mを次の性質をもつ自然数の集合とする。

(1)　$0 \in M$

(2)　$k \in M$　ならば　$k+1 \in M$

このとき，Mはすべての自然数を含み，$M=N$　が成り立つ。

証明　Mに属しない自然数が存在すると仮定すれば，これらは（空でない）集合 $\overline{M}$ をつくる。基礎定理A6によって $\overline{M}$ には最小の要素が存在する。これを $\overline{m}$ とする。定理A7の仮定によって，0は M の中にあるから，確かに $\overline{m} \neq 0$ である。したがって $\overline{m}$ には，ただ1つの直接の前者 $\overline{m}-1$ がある。$\overline{m}$ は $\overline{M}$ の最小の要素であるから $\overline{m}-1$ は $\overline{M}$ の中には存在しない。なぜなら，定理A7の仮定によって，$\overline{m}-1$ が M の中にあれば，その後者 $\overline{m}$ も M の中に存在しなければならないからである。

ゆえに，$\overline{m}$ の前者も自然数であって，それは M にも $\overline{M}$ にも属しない。これは矛盾である。よって，Mに属しない自然数は存在しない。　∴　$M=N$

⑪ 次の命題を考察しよう。

$H_1(n)$ ：　$n < n^2$　　　　$H_2(n)$ ：　$2n = 3n$

$H_3(n)$ ：　4は2nの約数である。　$H_4(n)$ ：　$2^n < 2^{n+1}$

M_i $(i=1,2,3,4)$ を，$H_i(k)$ が真である自然数の集合，$\overline{M_i}$ を $H_i(k)$ が偽である自然数の集合とする。

8つの集合 M_i および $\overline{M_i}$ を決定せよ。また，それぞれにおいて，最小の数をみつけよ。

⑧ 数学的帰納法の原理

命題「すべての自然数nに対してH(n)が成り立つ」は，次のことが成立するとき真である。

1.　$n=0$ に対して，H(n)は正しい。

2.　$n=k$ に対するH(n)の成立から，つねに　$n=k+1$　に対する成立が導びかれる。ここにkは任意の自然数である。

5　すべての自然数に対して　$0+1+2+\cdots\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$　が成り立つことを証明せよ。（証明略）

8.

⑫　a）数学的帰納法による証明の中にあげられている方法は，さらにどの程度まで拡張できるかを説明せよ。

b）数学的帰納法の証明方法について，次の異議に対してはどんな立場をとるか。「証明には結論が用いられている」

数学的帰納法の方法は，「任意のkに対して，H(k) から H(k+1) を導くことが成り立つ」ことにある。これを，次のようにいってはいけない。

「任意のkに対して H(k) が成り立つ」から H(k+1)を導く。

なぜなら，「任意の」kで成り立つことは，当然 $k+1$ についても成り立つことになるからである。

$\boxed{6}$ すべての自然数に対して $2^n > n$ が成り立つ。（解略）

⑬ 次の証明法はなぜいけないのか説明せよ。

$2^{k+1} > k+1$ $(k \geqq 1)$ から $2.2^k > k+1$ が導びかれ，よって $2^k + 2^k > k+1$ 帰納法の前提によって $2^k > k$，そして $2^k > 1$ だから，これで証明された。

⑭ すべての奇数nについて，$n^2 - 1$ は8でわりきれる。この命題について，2つの証明──そのうち1つは数学的帰納法を用いて──を導びけ。

9.

$\boxed{7}$ $1+3+5+\cdots\cdots+(2n-1)$ の公式を求めよう。（解略）

$\boxed{8}$ 2のべきの和 $S_n = 2^0 + 2^1 + \cdots\cdots + 2^n$ の公式を求めよう。

$S_0 = 1$，$S_1 = 3$ だから $S_n = 2n+1$ と推測して証明を進めてみると一般には成立しないことがわかる。したがって，$S_n = 2n+1$ ではない。

⑮ もっと多くの場合（$n=2$，$n=3$）をしらべて S_n に対する正しい式をみつけ，それを数学的帰納法によって証明せよ。

10. 帰納法と演繹法

KEPLER, NEWTON, CAVENDISH, LEVERRIER の業績を例にあげて，帰納法と演繹法についての説明がなされている。

⑯ 初学年で，つぎのことがらが，どのようにして得られ，また，その結論は，帰納的か演繹的かについて考察せよ。

a）すべての自然数a，bに対して $a+b=b+a$ が成り立つ。

b）2つの三角形の3辺がそれぞれ等しいならば，それらは合同である。

c）正三角形の各内角は60°である。

d）すべての実数a，bに対して $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ が成り立つ。

e）すべての自然数 $n > 1$ は，それが素数であるか，または，素数の積（順序は別として）として一意的に表わされる。

10 例題A 7において，　$n=0, 1, 2, 3$ に対して求める和は　1，4，9，16　であり，結果として，個々の場合から ―― 帰納的に―すべての場合について

$$1+3+5+\cdots\cdots+(2n+1)=(n+1)^2$$

が得られた。

定理A 7の証明において，（空でない）いかなる自然数の集合も最小のものを含むという事実から，特別な集合 $\overline{M}$ も最小のものをもつことを結論した。―― これは演繹的方法である。

9▷ 正しいことがらから，演繹的な推論によって，つねに正しいことがらが導びかれる。

10▷ 正しいことがらから，帰納的な推論によって，つねに正しいことがらが導びかれるとは限らない。

11▷ 数学的帰納法の方法は，演繹的な方法である。

（以上 9▷，10▷，11▷ ともに説明略）

11．帰納的定義

12▷ $f(n)=n!$ （$n\in N$） の定義

すべての順序対 ［n，$n!$］ から成る関数は，

(1) $f(0)=1$

(2) すべての自然数kに対して $f(k+1)=(k+1)f(k)$

が成り立つような関数である。

11 $5!=5\cdot4!=5\cdot4\cdot3!=5\cdot4\cdot3\cdot2!=5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1!=5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1\cdot0!=120$

⑰ 数学的帰納法により，すべての自然数 $n>0$ について

$$S_n=1\cdot1!+2\cdot2!+3\cdot3!+\cdots\cdots+n\cdot n!=(n+1)!-1$$

が成り立つことを証明せよ。

12.

13▷ $f(n)=a^n$ （$a\in P$，$n\in N$）の定義

すべての実数 $a\fallingdotseq 0$ に対して，すべての対 ［n，a^n］ より成る関数は

$f(0)=a^0=1$　　　　すべての $n>0$ に対して $0^n=0$

$f(n+1)=a^{n+1}=a\cdot a^n$

が成り立つ関数である。

⑱ 0^0 の場合を一般の定義から除外しなければならないのはなぜか。

⑲ nについての数学的帰納法により，すべての実数a，b，$a\fallingdotseq 0$，$b\fallingdotseq 0$ に対して

$$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n \quad , \qquad \frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

が成り立つことを示せ。

12 すべての実数 $a \neq 0$ およびすべての自然数 n, m に対して $(a^m)^n = a^{mn}$ が成立する。(証明略)

⑳ a) 例題 A 12 に必要な指数法則を証明せよ。そして，それを用いて A 12 の証明を完全なものにせよ。

b) mに関する数学的帰納法によって，$(a^m)^n = a^{mn}$ の証明を試みてみよ。

13. 和の記号

$$2^0 + 2^1 + 2^2 + \cdots\cdots + 2^n = \sum_{k=0}^{n} 2^k \ , \qquad \sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

㉑ 次のうち，どれが，それぞれ等しい数を表わすか。

a) $\sum_{k=1}^{8} k$, $\sum_{k=1}^{7} (k+8)$, $1 + \sum_{k=2}^{8} k$, $\sum_{k=1}^{5} k + \sum_{k=5}^{8} k$

b) $\sum_{n=1}^{10} \frac{1}{n}$, $\sum_{n=2}^{11} \frac{1}{n}$, $\sum_{n=2}^{11} \frac{1}{n-1}$, $\sum_{m=0}^{9} \frac{1}{m+1}$

c) $\sum_{k=2}^{5} 2^{k-1}$, $\sum_{i=1}^{4} 2^i$, $\sum_{n=0}^{3} 2^n$, $2 \sum_{k=0}^{3} 2^k$

13 すべての自然数 $n > 0$ およびすべての実数 a, b $(a \neq b)$ に対して

$$(a^n - b^n) : (a - b) = a^{n-1} + a^{n-2}\, b + \cdots\cdots + a\, b^{n-2} + b^{n-1} \qquad \text{(証明略)}$$

㉒ すべての奇数nに対して $a^n + b^n$ は余りなしで，$a + b$ でわりきれる。特別な場合，$n = 1, 3, 5$ をしらべることによってその商を確かめ，そして，数学的帰納法によって，一般的な事実を証明せよ。

14. 二項係数

㉓ $(a+b)^n$ を $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ についてつぎつぎと乗法を行なうことによって和の形に変形せよ。nによって，その項の数をしらべ，また，その展開法則が指数によってどう定まるかを読みとれ。

上で得られた和から，$(a-b)^n$ に対して，対応する項をつくり出せ。

㉔ 練習 A 23 を例として，係数を Pascal の三角形の形で表わせ。その基礎になる形成法則を説明し，さらに，この三角形に 3 行追加せよ。

㉕ a) Pascal の三角形は，つぎつぎに乗法を行うのにくらべて，どんな利点があるか。

b) さきにあげられた 2 つの方法によって，$(a+b)^{27}$ の変形のしかたを説明せよ。

c) 学習単位 A 10 で得られた知識を基礎として，Pascal の三角形のつくり方について論ぜよ。

㉖ a) 記号 $\binom{n}{p}$ を用いて，Pascal の三角形の行（すなわち等しい n について）の中において「対称性」を表現せよ。

b) 係数決定の方法（上の行の相隣る 2 つの係数の加法）を，3 つの二項係数の間の等式によって表現せよ。

[14] 特に，$(a+b)^6$ を考察すると $\binom{6}{0}=\binom{6}{6}=1$，$\binom{6}{1}=\binom{6}{5}=6$，$\binom{6}{2}=\binom{6}{4}=15$，$\binom{6}{3}=20$ を得る。

▷14 定義 $\binom{n}{p}=\dfrac{n!}{p!(n-p)!}$ $n\in N$, $p\in N$, $p\leqq n$

㉗ $n=2, 3, 4, 5$ について，定義 A 14 の係数が，Pascal の三角形から得られたものに等しいかどうかをしらべよ。

練習 A 26 より，次の重要な関係が得られる。（証明略）

(1) $\binom{n}{p}=\binom{n}{n-p}$ (2) $\binom{n}{p}+\binom{n}{p+1}=\binom{n+1}{p+1}$ ただし，$n>p$

㉘ $p\leqq n$ なるすべての $n, p\in N$ に対して，関係(1)の成立することを，定義 A 14 から直接導き出せ。

15．二項定理

▷15 二項定理 すべての実数 a，b および，すべての自然数 n に対して

$$(a+b)^n=\binom{n}{0}a^n+\binom{n}{1}a^{n-1}b+\binom{n}{2}a^{n-2}b^2+\cdots\cdots+\binom{n}{n-1}ab^{n-1}+\binom{n}{n}b^n$$

または，和の記号を用いて，$(a+b)^n=\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}a^{n-p}b^p$ が成り立つ。（証明略）

㉙ 和の記号をずっと用いて，この証明を定式化せよ。

㉚ $(a+b)^9$，$(a+b)^{10}$，$(a+b)^{11}$ に対する二項係数をそれぞれ表示せよ。そのグラフ表示において，それぞれの点を結べ。

[15] 3.97^7 を小数点以下 3 位まで正しく計算しよう。
$3.97^7=(4-0.03)^7$ を二項定理を用いて計算し，1.55×10^5 を得る。

かんたんな数列

16．数列の概念

関数とは，集合 X のすべての要素 x が，集合 Y のただ 1 つの要素 y に対応するときに得ら

れる順序対 [x, y] の集合である。集合Xを関数fの定義域という。順序対 [x, y] にあらわれるYのすべての要素が，fの値域を生成する。

㉛ つぎの順序対の集合のうち，どれが関数に関するものであるか。また，その定義域と値域を決定せよ。

a) $x\in N$, $y\in N$ かつ $x+y=6$ なるすべての [x, y] の集合

b) $x\in N$ かつ $y=7x+3$ なるすべての [x, y] の集合

c) $x\in N$, $0\leqq x\leqq 10$, $y\in N$ かつ $y>x$ なるすべての [x, y] の集合

d) $x\in G$ かつ $y=x^2$ なるすべての [x, y] の集合

e) $x\in G$ かつ $x=y^2$ なるすべての [x, y] の集合

f) $x\in R$ かつ $y=\frac{1}{x}$ なるすべての [x, y] の集合

g) $x\in P$ かつ $y=\sqrt[3]{5-x^2}$ なるすべての [x, y] の集合

h) $x\in P$, $y\in G$ かつ $x-1<y\leqq x$ なるすべての [x, y] の集合

⊳15 定義　数列とは，定義域が自然数の集合であるような関数 [k, f(k)] である。値域の要素 f(k) を数列の項といい，f(k) のかわりに a_k とかく。数列全体を (a_k) で記号化する。

16 a) 練習 A 31 の関数 a) は有限数列である。　$(a_k)=(6-k)$, $k=0, 1, 2, \cdots, 6$

b) 練習 A 31 の関数 b) は無限数列である。　$(a_k)=(7k+3)$, $k\in N$

㉜ 練習 A 31 の c) から h) までの関数について，その定義域を自然数に制限したときにできる数列を，それぞれかけ。

$a_k=f(k)$ のように等式で与えられたものを，数列についての明示された生成規則といい，このとき項 a_k を一般項という。

17 a) 数列　0, 1, 4, 9, 16, ……, k^2, … は $(a_k)=(k^2)$, k は自然数 とかかれる。

b) 数列　2, −10, 17, ……, $(-1)^k(7k+3)$, … は $(a_k)=((-1)^k(7k+3))$, $k\in N$とかける。

㉝ a) 数列 $(a_k)=(k^3-6k^2+12k-6)=((k-2)^3+2)$ の項a_1, a_2, a_3 が，1, 2, 3であることを確かめよ。また，項 a_4, a_5 を求めよ。

b) さきにあげた有限数列のそれぞれに対して，生成規則として多項式が存在する事実から，このような生成規則には，無限に多くの異なったものがあることが導びかれる。この理由を説明せよ。

㉞ 次の数列に対して，その明示された生成規則を求めよ。また，それに応じて，これにつづく 5 つの項を計算せよ。

a) 0, −2, −4, −6, ……　　b) −7, −3, 1, 5, ……

c) 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, ……　　d) 0, $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$, ……

e) 1, 2, 4, 8, 16, ……　　f) 1, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{25}$, ……

g) $-\frac{1}{8}$, $-\frac{4}{27}$, $-\frac{9}{64}$, $-\frac{16}{125}$, ……

h) $-3, 6, -9, 12, -15, 18$, ……

i) $1, \frac{19}{21}, \frac{18}{22}$, ……

j) $1.1, 0.9, 1.01, 0.99, 1.001$, ……

k) $\sqrt{2}, 2, 2\sqrt{2}$, ……

l) $5, \frac{9}{2}, \frac{37}{9}, \frac{19}{5}, \frac{39}{11}$, ……

m) $0, \frac{1}{2}, \frac{4}{6}, \frac{9}{24}, \frac{16}{120}, \frac{25}{720}$, ……

17.

18 a) 帰納的生成規則 $a_1=3$, $a_{k+1}=a_k+k$ は 数列 $3, 4, 6, 9, 13, 18$, …… をつくる。

b) 数列 $a_k=1, 2, 3$, …… につづけて, $a_1=1$, $a_2=2$, $a_{k+2}=a_{k+1}+a_k$ なる帰納的生成規則を用いれば, $a_k=1, 2, 3, 5, 8, 13$, …… を得る。

19 帰納的生成規則 $a_1=2$, $a_{k+1}=a_k+(2k+1)$ および, 明示された生成規則 $(b_n)=(n^2+1)$ は, $2, 5, 10, 17$, …… ではじまる等しい数列を表わす。(証明略)

35 練習 A 34 の数列 e) について, 帰納的生成規則を定めよ。数学的帰納法を用いて, この帰納的生成規則が, 練習 A 34 で与えた, 明示された生成規則と同値であることを証明せよ。

18. 数列の単調性, 上(下)界, 上(下)限

36 練習 A 31 の関数の単調性をしらべよ。また, 必要に応じて, 単調な区間を定めよ。

17 定義　すべての k に対して $\left\{\begin{matrix} a_k < a_{k+1} \\ a_k > a_{k+1} \end{matrix}\right\}$ が成り立つとき, 数列 (a_n) は単調 $\left\{\begin{matrix} \text{増加} \\ \text{減少} \end{matrix}\right\}$ であるという。

上の定義の <, > を, それぞれ ≦, ≧ にかえて, 「広義の単調性」についても述べられている。また, すべての k に対して $a_k=a_{k+1}$ なるものを定数数列といい, これは広義の単調増加であり, また, 単調減少であると述べられている。

20 a) $a_1=3$, かつ $a_{k+1}=\frac{1}{2}a_k$ なる数列 (a_k) は単調減少である。(説明略)

b) 数列 (k^3-3k^2+2k) は広義の単調増加である。(説明略)

c) 数列 $\left((-1)^k\frac{1}{k}\right)$ は, 広義の単調ではなく, また(厳密な)単調でもない。(説明略)

37 練習 A 34 の数列の単調性を研究せよ。

21 a) 数列 (k^3-3k^2+2k) (例題 A 20) は, $k=2$ 以後, 単調に増加する。(説明なし)

b) 数列 $(9k-k^2)$ は, $k \geqq 5$ に対して単調に減少する。(説明略)

19.

⑱ 定義　すべての k に対して $\left\{\begin{matrix} S \leqq a_k \\ S \geqq a_k \end{matrix}\right\}$ が成り立つとき，S を数列 (a_k) の $\left\{\begin{matrix} \text{下界} \\ \text{上界} \end{matrix}\right\}$ という。数列が，下（上）界をもつとき，それは，下（上）に有界であるといい，両側に有界であるとき，有界であるといい，それ以外のとき，有界でないという。

⑲ 定義　G が (a_k) の $\left\{\begin{matrix} \text{最大の下界} \\ \text{最小の上界} \end{matrix}\right\}$ であるとき，G を数列 (a_k) の $\left\{\begin{matrix} \text{下限} \\ \text{上限} \end{matrix}\right\}$ という。

22 数列 $(\frac{1}{k})$ の単調性，有界性，上下限について研究しよう。これは単調減少であり，したがって上に有界である。$a_1 = 1$ は上限である。また，下にも有界で，下限は 0 である。（くわしい説明略）

23 数列 $(a_n) = (\frac{n}{n+1})$（学習単位 A 3 の集合 M_3）の下限は $\frac{1}{2}$，上限は 1 である。（くわしい説明は略するが，上限が 1 であることの理由として，任意の有理数 $G' < 1$ に対して (a_n) の中に $a_m > G'$ なる項 a_m の存在の証明だけをあげておく）

$G' = \frac{p}{q}$，p は整数，$0 < q \in N$，$p < q$ とおくと

$$G' = \frac{p}{q} \leqq \frac{q-1}{q} < \frac{q}{q+1} = a_q \in (a_n)$$

㊳ a) $(\frac{n+1}{n})$ は，下限が 1，上限が 2 であることを同様にして証明せよ。

b) 例 A 22 および練習 38 a) の結果を用いて，数列 $((-1)^{n+1}\frac{n}{n+1})$ および $(\frac{n+1}{2n})$ について，上，下限をしらべよ。

㊴ 練習 A 34 の数列を，適当に選んだ単位をつけ，座標を用いてグラフに表現せよ。（その際，必要に応じて，いくつかの数列を同じ座標を用いてもよい。）数列の一方または両方の有界性は，グラフ表示においては，どのように表わされているか。

20．等差数列と等比数列

⑳ 定義　すべての k に対して $a_{k+1} = a_k + d$ が成り立つような一定の数 d が存在するとき，かつそのときに限り，数列 (a_k) を等差数列という。

㊵ a) 練習 A 34 の数列のどれが等差数列であるかを確かめよ。

b)「算術数列（等差数列）」なる名称を「算術的方法」の概念を用いて基礎づけよ。

㉑ 等差数列は，$a_k = a_1 + (k-1)d$ なる数列 (a_k) である。

㊶ a) この定義は，定義 A 20 のように定められたものと同じ数列であることを証明せよ。

b) 関係式 $a_k = a_1 + (k-1)d$ は，初項が a_0 で表わされるとき，どのように変るか。

22▷ 定義　すべてのkに対して $a_{k+1}=a_k q$ （$a_1 \neq 0$）が成り立つような一定の数 $q \neq 0$ が存在するとき，かつそのときに限り，数列（a_k）を等比数列という。

㊷ a）練習 A 34 から，等比数列をえらべ。

b）「幾何数列（等比数列）」なる名称を，「幾何的方法」の概念を用いて基礎づけよ。

23▷ 等比数列は，$a_k = a_1 q^{k-1}$（$a_1 \neq 0$, $q \neq 0$）なる数列（a_k）である。

㊸ a）この定義は，定義 A 22 と同じであることを証明せよ。

b）関係式 $a_k = a_1 q^{k-1}$ は，数列の初項が a_0 で表わされるとき，どのように変るか。

24 数列（2^{k-1}）$=\{1, 2, 4, 8, 16, 32, \cdots\cdots\}$（練習 A 34 の e））では，$a_1=1$，$q=2$ である。これは単調に増加し，上には有界ではない。

24▷ 定理　$a_1>0$ かつ $q>1$ のとき，等比数列（a_k）は単調に増加し，上には有界ではない。

証明　$q>1$ より $a_k < a_k q = a_{k+1}$

数列が上界Sをもつとすれば　$a_k = a_1 q^{k-1} \leqq S$

$$\log a_1 + (k-1)\log q \leqq \log S \qquad \therefore \quad k \leqq \frac{\log S - \log a_1 + \log q}{\log q}$$

これは，数列（k）が上に有界であることを意味し，矛盾である。

25▷ 定理　$a_1>0$，かつ $0<q<1$ のとき，等比数列（a_k）は単調に減少し，下限は 0 である。（証明略）

㊹ 他の 6 つの場合，$a_1>0$，$a_1<0$，$q<-1$，$-1<q<0$，$0<q<1$，$q>1$ の可能な組み合せに対して，等比数列の状態を十分考察せよ。

21．部分和

26▷ 定義　$S_n = a_1 + a_2 + \cdots\cdots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ を，数列（a_k）の第n部分和という。この加数（項）はn個である。

25 数列（2^{k-1}）の部分和 S_{11} を計算しよう。練習 A 17 により　$S_{11}=2047$ である。

22．

27▷ 定理　すべての等差数列（a_k）$=(a_1+(k-1)d)$ に対して

(1) $S_n = na_1 + \dfrac{(n-1)n}{2} d$　　　(1 a) $S_n = \dfrac{n}{2}(a_1 + a_n)$

が成り立つ。（証明略）

㊺ a）(1)から（1 a）への変形を行なえ。

b）9才の Gauss は，1から 100 までの自然数の和を，積 50×101 によって計算した。2つの公式のうち，どちらが彼の計算と一致するか。

c）数列の初項が a_0 で表わされ，したがって，$n+1$ 個の加数がある場合には，２つの表示式はどのように変るか。

28 定理　すべての等比数列 $(a_k)=(a_1 q^{k-1})$ ただし，$q \neq 1$ に対して

$$(2) \quad S_n=\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 \frac{q^n-1}{q-1} = a_1 \frac{1-q^n}{1-q}$$ が成り立つ。

$q=1$ のときは $S_n = n a_1$ である。（証明略）

㊻ a）この事実を数学的帰納法によって証明せよ。

b）計算に利用するのに，第一の形，または，第二の形のどちらの条件が便利であるかを説明せよ。

㊼ a）定理 A 28 の関係式(2)から　(2 a)　$S_n=\dfrac{a_n q - a_1}{q-1}$ を導びけ。

b）数列の初項が a_0 で表わされるとき，S_n の２つの表示式はどのように変るか。

26 平方数の数列 $(a_k)=(k^2)$，$(k \geqq 0)$ に対する部分和の公式を考える。$S_n=\sum_{k=0}^{n} k^2$ を n についての３次式 $S_n = an^3+bn^2+cn+d$ とし，$S_0=0$，$S_1=1$，$S_2=5$，$S_3=14$ から，連立方程式を解くことによって，a，b，c，d を決定している。

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$$

㊽ a）与えられた連立方程式の解によって，$\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ が導びかれることを示せ。

b）この式が，実際に，数列 (k^2) の部分和 S_n を表わすこと，したがって，この関係式が一般に成立することを，数学的帰納法によって証明せよ。

㊾ 同様な方法で，立方数の数列についての部分和の公式

$$\sum_{k=0}^{n} k^3 = \sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

を獲得せよ。また，この和を $\sum_{k=1}^{n} k$ と比較せよ。

23．応用例

27 220 m の紙（厚さ 0.2 mm）を，半径 7.5 cm の円柱に巻きつける。

a）いくつの層ができるか。

b）円柱の直径は，最後にはどれだけになるか。

答　326 巻きで，円柱は最終的に直径 28 cm となる。

㊿ この問題の解決にあたって，どのような仮定をしたらよいかをよく考えてみよ。

28 回転式カプセルポンプがある。吸入管に，体積3000cm³の排気鐘を結びつける。シリンダーによって，1回転ごとに200cm³の空気が排出されるとする。

a) はじめの圧力が1000ミリバールであるとき，排気鐘の中の空気の，5秒後および10秒後の圧力はどれだけか。

b) ポンプが毎分50回転するときに，圧力を10^{-6}ミリバールにするには，何分かかるか。

答　5回転後には，圧力は724ミリバールになり，10秒後には525ミリバールになる。そして，排気鐘の中の圧力が10^{-6}ミリバールにおさえられるには，ポンプは6.4分動かねばならない。

さらに，同種の問題 29 および，練習 51 がおかれているが，省略する。

B章　極限値

数列の極限値

1．導入例

1　$a_n = \frac{n-1}{n}$（$n>0$）なる数列(a_n)は，$\frac{n-1}{n} < \frac{n}{n+1}$だから，単調に増加する。また，$\frac{n-1}{n} < 1$だから，上に有界である。1は上界である。（くわしい説明略）

この数列は上に有界で，かつ，単調に増加するので，nが「次第に」増加するにつれて，その項は1に「近づく」。この，あまり精密でない言い方に対して，どのように考えたらよいか。これに対して，次のように述べられている。

εが，いかに小さい正数であっても（したがって，$1-\varepsilon$が，1よりわずかだけ小さい数としても），なお，$1-\varepsilon$より大きな数列の項がつねに存在する。この数列は単調に増加するので，それ以後のすべての項はすべて$1-\varepsilon$より大きい。よって，これらの項は，すべて，区間$(1-\varepsilon, 1]$の内部にある。

この事実を，$\varepsilon = \frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{500}$を例にとり，それぞれ11項，101項，501項以後の項は，すべて，$(1-\varepsilon, 1]$の内部に存在することを述べている。そして，この数列について，一般に，次のことを明示している。

任意の正の数εに対して，ある自然数n_1が定まり，すべての自然数$n > n_1$に対して，数列$(\frac{n-1}{n})$の項a_nは，区間$(1-\varepsilon, 1]$の中にある。すなわち，任意の正の数εに対して，$n > \frac{1}{\varepsilon}$なるすべてのnに対して$\frac{n-1}{n} > 1-\varepsilon$なることを証明している。

そして，以上のまとめの形で，次のように述べている。

任意の正の数εをえらぶことによって，ほとんどすべての自然数に対して$a_n \in (1-\varepsilon, 1]$が成り立つ。

① どんなnに対して，数列$(\frac{n-1}{n})$の項a_nが，区間 a) $(1-\frac{1}{10^3}, 1]$，b) $(1-\frac{1}{10^9}, 1]$

の中に存在するかを決定せよ。

例題B1の考察によって，1は，数列 $(\frac{n-1}{n})$ の上限であることが得られる。
また，この考察から，数列の上限についての定義 A 19が，次のように定式化できる。

Gが (a_n) の上限であるとは，次の2つが成り立つことである。

1. すべてのnに対して　$a_n \leqq G$　が成り立つ。
2. 任意の正の数 ε に対して，$a_n > G - \varepsilon$　なる自然数nが存在する。

2.

② 数列　$1, \frac{3}{4}, \frac{4}{6}, \frac{5}{8}, \frac{6}{10}, \frac{7}{12}, \cdots\cdots, \frac{n+1}{2n}, \cdots\cdots$　は，単調に減少することを示せ。

2 $a_n = \frac{n+1}{2n}$　なる数列 (a_n) の上限は1，下限は $\frac{1}{2}$ である。
略解，$\frac{1}{2} < \frac{n+1}{2n} \leqq 1$　だから，すべての a_n は，区間 $(\frac{1}{2}, 1]$ の中にある。また，任意の正の数 ε に対して，$n > \frac{1}{2\varepsilon}$　なるn以後の数列の項 a_n は，すべて，区間 $[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}+\varepsilon)$ の中にある。

3 数列　$-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \cdots\cdots, (-1)^n\frac{1}{n}, \cdots\cdots$　の下限は -1，上限は $\frac{1}{2}$ である。
また，この数列の項は，nが増加するにつれて，両側から0に近づく。
後半の略解　ε を任意の正の数とすると，$n > \frac{1}{\varepsilon}$ のとき，$\left|(-1)^n\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon$　である。よって，$n > \frac{1}{\varepsilon}$　なるすべての項 a_n は，区間 $(-\varepsilon, \varepsilon)$ の中にある。

1 定義　ε を正の実数とするとき，区間 $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ を，数 x_0 の ε 一近傍，または，かんたんに近傍といい，$U_\varepsilon(x_0)$ と書く。

この例として，前にあげられた数列をとり，任意の正の数 ε に対し，ほとんどすべてのnについて，

$(a_n) = (\frac{n-1}{n})$　では　$a_n \in U_\varepsilon(1)$

$(a_n) = (\frac{n+1}{2n})$　では　$a_n \in U_\varepsilon(\frac{1}{2})$

$(a_n) = ((-1)^n\frac{1}{n})$　では　$a_n \in U_\varepsilon(0)$

なる記法があげられている。また，左側近傍，右側近傍なる用語も定義されている。

3. 収束数列

2 定義　任意の正の数 ε に関し，ほとんどすべてのnに対して $a_n \in U_\varepsilon(g)$ が成り立つ（すなわち，ほとんどすべてのnに対して　$g-\varepsilon < a_n < g+\varepsilon$　あるいは，$|a_n - g| < \varepsilon$ である）とき，数gを，数列 (a_n) の極限値という。

3 定義　gが数列 (a_n) の極限値となるような数gが存在するとき，数列 (a_n) は収束するという。

定義B 2に関連して，1つの数列は2つの異なる極限値をもつことができないことが，次のようにして述べられている。

(a_n) が，2つの異なる極限値 g_1 および g_2 をもつとする。定義B 2は，任意の正の数 ε に関し，有限個の n に対してのみ，$a_n \notin U_\varepsilon(g)$ が成り立つとき，g は数列 (a_n) の極限値であるともいえる。いま，$\varepsilon = \frac{1}{2}\left|g_1 - g_2\right|$ とえらべば，$a_n \notin U_\varepsilon(g_1)$ なる自然数 n は有限個しかなく，$a_n \notin U_\varepsilon(g_2)$ なる自然数も有限個しか存在しない。よって，g_1 が (a_n) の極限値ならば，g_2 は極限値にはなり得ない。これより，1つの収束する極限値は一意的に決定される。

ついで，$\lim_{n\to\infty} a_n = g$ なる表わし方が述べられ，$\lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{n} = 1$，$\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2}$，$\lim_{n\to\infty} (-1)^n \frac{1}{n} = 0$ の例があげられている。

4▷ 極限値が0である数列を零数列という。

定数数列 (a_n) の収束について，次のように述べられている。

$a_n = c$ のとき，c のいかなる ε 近傍をとっても，その外には有限個の項しかない（実は全くない）から，この数列は収束することは，定義B 2によっていえる。すなわち，$\lim_{n\to\infty} a_n = c$ である。

$\boxed{4}$ 数列 $\left(\frac{4n}{2n+3}\right)$ の極限値は2である。

略解 $\left|\frac{4n}{2n+3} - 2\right| = \frac{6}{2n+3}$ である。$\frac{6}{2n+3} < \varepsilon$ より $n > \frac{1}{2}\left(\frac{6}{\varepsilon} - 3\right)$ を得る。

これより，$n > \frac{1}{2}\left(\frac{6}{\varepsilon} - 3\right)$ なるすべての n について $\left|\frac{4n}{2n+3} - 2\right| < \varepsilon$ である。

③ a) 数列 $\left(\frac{n+1}{n}\right)$ の極限値が，1であることを示せ。

b) 数列 $\left(\frac{1}{n}\right)$，$\left(-\frac{1}{n}\right)$ および $\left(\frac{10^5}{n}\right)$ は，零数列であることを示せ。

数列 (a_n) が極限値 g をもつならば，ほとんどすべての n に対して $g - \varepsilon < a_n < g + \varepsilon$ が成り立つから，$-\varepsilon < a_n - g < \varepsilon$ でもある。すなわち $a_n - g \in U_\varepsilon(0)$ が成り立つ。このことから，$(a_n - g)$ が零数列であるとき，かつそのときに限り $\lim_{n\to\infty} a_n = g$ であることがわかる。

4. 発散数列

5▷ 定義　収束しない数列は発散するという。

$\boxed{5}$ 数列 $f(n) = (-1)^{n+1}\frac{n}{n+1}$ は発散する。この数列の上限は1で，下限は -1 である。(練習A 38 参照)

略解 ε が任意の正の数ならば，

(1) $n > \frac{1}{\varepsilon} - 1$ なるすべての奇数 n に対して $a_n \in U_\varepsilon(1)$

(2) $n > \frac{1}{\varepsilon} - 1$ なるすべての偶数 n に対して $a_n \in U_\varepsilon(-1)$

であるから，1も -1 も極限値ではない。さらに，1と -1 との間には極限値は存在せず，

また，$|g|>1$ なるいかなる数も，極限値になり得ない。

④ 上の(1)，(2)を証明せよ。

[6] $a_n=2^n$ なる単調増加数列 (a_n) も発散する。

略解　Kをいかに大きい正の数としても $2^n>K$ なるn，すなわち $n>\dfrac{\log K}{\log 2}$ なるnは無数に存在する。したがって，任意の $\varepsilon>0$ に対して，有限個のnについてのみ $a_n \in U_\varepsilon(g)$ となるような数gは存在しない。

⑥ 定義　いかなる正の数Kであっても，ほとんどすべてnに対して $\left\{\begin{array}{l} a_n>K \\ a_n<-K \end{array}\right\}$ が成り立つとき，数列 (a_n) は無限に $\left\{\begin{array}{l} \text{増加} \\ \text{減少} \end{array}\right\}$ するといい $\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{n\to\infty} a_n=+\infty \\ \lim\limits_{n\to\infty} a_n=-\infty \end{array}\right\}$ とかく。

⑤ $a_n=(-1)^n$ なる数列 (a_n) は発散することを示せ。

5．収束数列に関する定理

⑦ 定理　正の項のみより成る収束数列 (a_n) の極限値gは負でない。負の項のみより成る収束数列 (a_n) の極限値は正でない。

略証　数列 (a_n) を正の項のみより成る収束数列とする。$g<0$ とし，$\varepsilon>0$ を $g+\varepsilon<0$ なるように（たとえば $\varepsilon=\frac{1}{2}|g|$）えらべば，どんなnに対しても $a_n \in U_\varepsilon(g)$ なるようなgの ε 近傍はありえない。

⑧ 定理　収束数列 (a_n) の極限値gが $\left\{\begin{array}{l} \text{正} \\ \text{負} \end{array}\right\}$ ならば，ほとんどすべてのnに対して $\left\{\begin{array}{l} a_n>0 \\ a_n<0 \end{array}\right\}$ が成り立つ。

略証　(a_n) の極限値 $g>0$ をもつとする。$\varepsilon>0$ を $g-\varepsilon>0$ なるようにえらべば，$a_n \notin U_\varepsilon(g)$ なるnは有限個しか存在しない。したがって $a_n\leqq 0$ なるnも有限個しか存在しない。

6．収束数列の部分数列

⑨ 定義　(a_n) を任意の数列とし，(m_n) を自然数の単調増加数列とするとき，数列 $(a_{m_n})=(a'_n)$ を数列 (a_n) の部分数列という。

⑩ 定理　収束数列 (a_n) の任意の部分数列は収束し，かつ，(a_n) と等しい極限値をもつ。

略証　(a_n) の極限値をgとする。任意の $\varepsilon>0$ に対して $a_n \notin U_\varepsilon(g)$ なる自然数nは有限個しかない。すなわち，任意の $\varepsilon>0$ に対して $a'_n \notin U_\varepsilon(g)$ なる自然数nは有限個しかない。

定理 B 10 により，零数列 $(\frac{1}{n})$ の部分数列 $(\frac{1}{5n})$，$(\frac{1}{n^3})$，$(\frac{1}{n^k})$（kは自然数），$(\frac{1}{2^n})$，$(\frac{1}{10^n})$，$(\frac{1}{n!})$ も零数列である。

数列 $(\frac{1}{n^2})$ は数列 $(\frac{1}{n})$ よりも「速かに」収束する。これを，次のように説明している。
たとえば，$\varepsilon=\frac{1}{10^4}$ とすると $U_\varepsilon(0)$ の外には，

数列 $(\frac{1}{n})$ については $n\leqq 10^4$ なるすべての項 a_n が

数列 $(\frac{1}{n^2})$ については $n\leqq 10^2$ なるすべての項 a_n が存在する。

その項数は $(\frac{1}{n})$ の方が $(\frac{1}{n^2})$ よりも多い。

7．単調な数列の収束の状態，等比数列

11▷ 定理　上に有界な単調増加数列 (a_n) は，その上限に収束する。この上限は，数列の項ではない。

略証　定理A 5により，数列の上限 g が存在する。g は上限であるから，次の(1)，(2)が成り立つ。

(1) すべての n に対して　$a_n\leqq g$

(2) ε が任意の正の数であるとき，$a_N>g-\varepsilon$ なる自然数 N が少くとも1つ存在する。

(a_n) は単調増加であるから，$g-\varepsilon<a_N<a_{N+1}<a_{N+2}<\cdots\cdots<g$　したがって (a_n) のほとんどすべてが，区間 $(g-\varepsilon,\ g]$ の中に存在する。すなわち，ほとんどすべての n に対して $a_n\in U_\varepsilon(g)$　したがって $\lim_{n\to\infty} a_n=g$

また，$a_m=g$ なる m が存在するとすれば，(a_n) は単調増加であるから，すべての $n>m$ に対して $a_n>g$ となり，(1)に矛盾する。

12▷ 定理　下に有界な単調減少数列 (a_n) は，その下限に収束する。（証明 B 11 と同じ）

⑥ 上に，または，下に有界でない任意の単調増加，または，単調減少数列は，$+\infty$，または $-\infty$ に発散する。この理由をあげよ。

7 $0<q<1$ なる等比数列 (q^n) はすべて単調に減少し，下限は0である。（定理 A 25 ）定理 B 12 により，これらはすべて零数列となる。$q>1$ のときは，(q^n) はすべて単調に増加し，かつ，上に有界でないから，この数列はすべて限りなく増加する。(練習B 6参照)

例えば，(0.9^n)，(0.99^n)，(0.999^n)，…… は，すべて零数列であり，(1.1^n)，(1.01^n)，(1.001^n)，…… はすべて n の増加につれて ∞ に発散する。

与えられた $\varepsilon>0$ について，0の ε 近傍の外にある項の数をみることにより，$0<q<1$ なる数列 (q^n) は，q と1との差が少なければ少ない程，遅く収束することがわかる。

⑦ a) 数列 (0.9^n) および (0.99^n) の項は，$\varepsilon=10^{-3}$ のとき，どんな n に対して $U_\varepsilon(0)$ の外に存在するかをしらべよ。

b) $n=10$，$n=10^2$，$n=10^3$，および $n=10^4$ に対して，数列 (0.999^n) の項を近似的に計算せよ。

c) どんな n に対して　$1.01^n>10^5$ が成り立つか。

$q=0$，$q=1$，$-1<q<0$ および $q\leqq -1$ のときの (q^n) の収束発散をしらべて，次の定理にまとめられている。

定理　等比数列 (q^n) は，$-1<q\leqq 1$ に対して収束し，$q>1$ および $q\leqq -1$ に対し

て発散する。

⑧　(a_n) が正（負）の項のみより成る零数列ならば，数列 $\left(\frac{1}{a_n}\right)$ は，限りなく増加（減少）することを証明せよ。

8.

⑬ 定理　$\lim_{n\to\infty} a_n = a$ かつ $\lim_{n\to\infty} b_n = b$ のとき $(a_n + b_n)$ も収束し，かつ $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = a + b$ である。

$(a_n) = \left(\frac{n-1}{n}\right)$ および $(b_n) = \left(\frac{n+1}{2n}\right)$ を例として用いて，この定理を導入した上で，さらに，証明がつけられている。

略証　ε を任意の正の数とすれば，$\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon'$ もまた正の数である。ほとんどすべての n に対して，$a_n \in U_{\varepsilon'}(a)$，$b_n \in U_{\varepsilon'}(b)$ すなわち，

すべての $n > n_1$ に対して $a - \varepsilon' < a_n < a + \varepsilon'$

すべての $n > n_2$ に対して $b - \varepsilon' < b_n < b + \varepsilon'$ なるような自然数 n_1，n_2 が存在する。

n_1，n_2 のうち大きい方を n^* とすると，すべての $n > n^*$ に対して

$$a + b - \varepsilon < a_n + b_n < a + b + \varepsilon$$

が成り立つ。すなわち，ほとんどすべての n に対して $a_n + b_n \in U_\varepsilon(a + b)$

⑭ 定理　$\lim_{n\to\infty} a_n = a$ かつ $\lim_{n\to\infty} b_n = b$ のとき

(1)　$(a_n - b_n)$ も収束し，$\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = a - b$ である。

(2)　$(a_n\, b_n)$ も収束し，$\lim_{n\to\infty}(a_n\, b_n) = a\, b$ である。

(3)　$\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ も収束し，$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$ である。（ただし，すべての n に対して，$b_n \neq 0$ で，(b_n) は零数列ではない。）　（証明なし）

9.

$\boxed{8}$　a）$\lim_{n\to\infty} \frac{5}{n^2} = 0$　　b）$\lim_{n\to\infty}\left(3 - \frac{5}{n^2}\right) = 3$

c）$\lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{n} = 1$　　d）$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2 + 2n - 5}{5n^2 - 7n + 1} = \frac{3}{5}$　　（説明略）

⑨　$\lim_{n\to\infty} a_n = a$ のとき (a_n^m)（m は自然数）も収束し，$\lim_{n\to\infty} a_n^m = a^m$ であることを，数学的帰納法によって証明してみよ。

10. 級数

$\boxed{9}$　数列 (1) $\frac{1}{1\cdot 2}, \frac{1}{2\cdot 3}, \frac{1}{3\cdot 4}, \frac{1}{4\cdot 5}, \cdots\cdots, \frac{1}{n(n+1)}, \cdots\cdots$ が与えられたとする。これから，部分和によって，次のように，級数をつくる。

$S_1 = \frac{1}{2}$，　$S_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$，　$S_3 = \frac{2}{3} + \frac{1}{12} = \frac{3}{4}$，　$S_4 = \frac{3}{4} + \frac{1}{20} = \frac{4}{5}$，

……，　$S_n = \frac{n}{n+1}$

この例題 B 9 を用いて，新しい数列 (S_n) をつくり，これを $\left(\frac{1}{n(n+1)}\right)$ の部分和の数列と名づける。$n > 1$ なるすべての自然数 n に対して，$S_n = S_{n-1} + \frac{1}{n(n+1)}$ であり，

$\lim_{n\to\infty} S_n = 1$ を示して，数列 (S_n) の収束を述べ，(S_n) の極限値を，数列(1)の項の和と定めている。

さらに，この和は，無限個の数を加えるという実際には不可能なことであり，算術で定義された実数の和とは，全く異なった概念であることを明示している。

⑩ 数学的帰納法によって，次の等式がすべての n について成り立つことを証明せよ。

$$S_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots\cdots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$$

▷15 定義　(a_n) が数列であるとき，部分和の数列 $(S_n) = (\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu)$ を級数

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots\cdots + a_n + \cdots\cdots$$

という。

級数 $\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu$ は，数列 (S_n) が収束するとき，かつ，そのときに限り，収束するという。

$\lim_{n\to\infty} S_n = S$ ならば，S を級数 $\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu$ の和といい $S = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu = a_1 + a_2 + \cdots\cdots + a_n + \cdots\cdots$ とかく。

ここで，$\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu$ なる記号を，2つの意味に用いることについて説明されている。すなわち，1つは級数を，したがって，数列 (a_n) に属する部分和の数列 $(\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu)$ を表わし，いま1つは，その級数の和を，したがって，数列 $(\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu)$ の極限値を表わす。

⑪ 級数 $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{2^{\nu-1}} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots\cdots + \frac{1}{2^{\nu-1}} + \cdots\cdots$ は，収束することを示せ。

[10] 級数 $\sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^{\nu+1} = 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots\cdots$ は，収束しない。それは，部分和の数列 1，0，1，0，1，…… が極限値をもたないからである。

11．等比級数

▷16 定理　等比級数 $\sum_{\nu=1}^{\infty} aq^{\nu-1}$ は，$|q| < 1$ のとき，かつそのときに限り，収束する。収束する等比級数 $\sum_{\nu=1}^{\infty} aq^{\nu-1}$ の和は，$S = \frac{a}{1-q}$ である。（証明略）

[11] 等比級数 $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{3^{\nu-1}} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \cdots\cdots + \frac{1}{3^{\nu-1}} + \cdots\cdots$ は，$q = \frac{1}{3} < 1$ であるから収束する。その和は，$S = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}$ である。

12．級数としての循環小数

等比級数 $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{3}{10^\nu} = \frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} + \cdots\cdots + \frac{3}{10^n} + \cdots\cdots = \frac{1}{3}$ を例としてとり，$\frac{1}{3}$ は，数列 0.3，0.33，0.333，…… の極限値であることを述べ，さらに $0.\dot{3}$ を小数第 n 位で打ち切るときの誤差を r_n と表わせば，

$$r_n = \frac{1}{3} - \left\{ \frac{3}{10}\left(1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \cdots\cdots + \frac{1}{10^{n-1}}\right) \right\} = \frac{1}{3} - \frac{3}{10}\cdot\frac{1-\frac{1}{10^n}}{1-\frac{1}{10}} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{10^n}$$

であって，数列 (r_n) は，零に収束する。これから，無限小数 $0.\dot{3}$ の桁を多くとれば，それだけ，近似値の誤差は小さくなると説明している。

[12] 循環小数 $0.35\dot{2}\dot{7}$ を一般の分数に変えると $\frac{97}{275}$ となる。（説明略）

関数の極限値と連続性

13. 関数の極限値

関数fが与えられたとき，fの定義域から，極限値 x_0 をもつ数列 (x_n) を考察し，この数列のどの数 x_n に対しても，fの値域から $[x_n, y_n] \in f$ なるただ1つの数 y_n が対応し，数列 $(y_n) = (f(x_n))$ の状態を考えることによって，x_0 の近傍における関数fの状態を知ることができる。この立場から，関数の極限値を考えることを説明してある。

13 関数 $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ および $g(x)=2^{\frac{1}{x-1}}$ が与えられたとする。これはともに点1では定義されていない。$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$ で，かつ，すべてのnについて $x_n \neq 1$ なる数列 (x_n)，例えば $(x_n) = (1-\dfrac{1}{n})$ を考える。このとき，

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = 2 \qquad \lim_{n\to\infty} g(x_n) = 0$$

また，$(x'_n) = (1+\dfrac{1}{n})$ を考えると，

$$\lim_{n\to\infty} f(x'_n) = 2 \qquad \lim_{n\to\infty} g(x'_n) = \infty$$ となる。

この例題 B 13 について，さらにくわしく検討し，点1の右から，または左からの近づき方に応じて，次のように説明されている。

(x_n) を，その項がすべて1より大きく，かつ，1に収束する任意の数列とする。(x_n-1) は，正の項のみより成る零数列であるから，$(\dfrac{1}{x_n-1})$ は，限りなく増加する数列である。すなわち，Kを任意の正の数とするとき，ほとんどすべてのnに対して $\dfrac{1}{x_n-1} > K$ が成り立つ。したがって，$2^{\frac{1}{x_n-1}} > \dfrac{1}{x_n-1} > K$ であり，数列 $(2^{\frac{1}{x_n-1}})$ は，限りなく増加する。

よって，すべてのnに対して $x_n > 1$ で，1に収束する任意の数列 (x_n) に対して，それに対応する関数値の数列 $(g(x_n))$ は限りなく増加する。同様に，すべてのnに対して$x_n < 1$ で，かつ，1に収束する任意の数列 (x_n) に対して，それに対応する関数値の数列 $(g(x_n))$ は0に収束する。

また，その項がfの定義域に属し，かつ，1に収束する任意の数列 (x_n) に対して，それに対応する関数値の数列 $(f(x_n))$ は，2に収束する。

14 関数 $f(x)=\dfrac{|x|}{x}$ は，点0では定義されていない。$\left\{ \begin{matrix} x>0 \\ x<0 \end{matrix} \right\}$ なるすべてのxに対して $\left\{ \begin{matrix} f(x)=1 \\ f(x)=-1 \end{matrix} \right\}$ である。

例題 B 14 に関連して，次のことがはっきりと示されている。

点$P_1(0, 1)$，$P_2(0, -1)$ は，この関数のグラフには含まれないが，正の，または，負の項のみより成る任意の零数列 (x_n) に対して，それに対する関数値の数列 $(f(x_n))$ は，1に，または -1 に収束する。しかし，$x_n = (-1)^n \dfrac{1}{n}$ なる数列 (x_n) をえらぶならば，それに対応する関数値の数列は，発散数列 $((-1)^n)$ となる。

⑫ 点0に近づくときの関数 $f(x) = x^0$ の状態を研究せよ。

14.

17 定義

(1) f が, x_0 の近傍で（場合によっては点 x_0 を除いて）定義されている。

(2) その項がこの近傍に属し，かつ，x_0 に収束する任意の数列（x_n）（すべての n に対して $x_n \neq x_0$）に対して，それに対応する関数値の数列（$f(x_n)$）が g に収束する。

が，ともに成立するとき，関数 f は，点 x_0 において極限値 g をもつと定め，$\lim_{x \to x_0} f(x) = g$ とかく。

15 a）関数 $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ は，点 1 において，極限値 2 をもつ。（例題 B 13 参照），すなわち $\lim_{x \to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = 2$

b）関数 $g(x) = 2^{\frac{1}{x-1}}$ は，点 1 において，極限値をもたない。（例題 B 13 参照），関数 $f(x) = \frac{|x|}{x}$ も，$x = 0$ において極限値をもたない。

c）関数 $f(x) = x^2$ は，点 2 において，極限値 4 をもつ。$\lim_{x \to 2} x^2 = 4$

関数値 $f(x_0)$ が存在しても，$\lim_{x \to x_0} f(x)$ が存在して，それが $f(x_0)$ と一致するとは限らない。例えば，関数

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & (x \neq 2) \\ 5 & (x = 2) \end{cases}$$

では，$\lim_{x \to 2} f(x) = 4$ であるが，$f(2) = 5$ である。

d）すべての x に対して定義された任意の定数関数 $f(x) = C$ は，任意の点 x_0 において，極限値 $\lim_{x \to x_0} f(x) = C$ をもつ。

e）関数 $f(x) = \frac{1}{x}$ （$x \neq 0$）は，点 0 において極限値をもたない。

f）関数 $f(x) = x^0$ は，点 0 において，極限値 1 をもつ。（練習 B 12 参照）したがって，$\lim_{x \to 0} x^0 = 1$ である。

⑬ 関数 a）$f(x) = x$，b）$f(x) = 5x$ の任意の点 x_0 における極限値をしらべよ。

16 関数 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x + 1 & (x < 3) \\ \frac{1}{2}x + 2 & (x \geqq 3) \end{cases}$ は，点 3 において極限値をもたない。（説明略）

例題 B 16 に関連して，左側極限値，ならびに，右側極限値が定義されている。この例題については，左側極限値 $\lim_{\substack{x \to 3 \\ x<3}} f(x) = \frac{5}{2}$，右側極限値 $\lim_{\substack{x \to 3 \\ x>3}} f(x) = \frac{7}{2}$ とかかれている。また，関数 $f(x) = \frac{|x|}{x}$ （$x \neq 0$）に対して，$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} f(x) = -1$，$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} f(x) = 1$ である。

（例題 B 14 参照）

15. 関数についての極限値の定理

18 定理　$\lim_{x \to x_0} u(x) = g_1$ かつ $\lim_{x \to x_0} v(x) = g_2$ ならば，点 x_0 における次の関数の極限値も次のように存在する。

(1) $s(x)=u(x)+v(x)$ $\qquad \lim_{x\to x_0}\{u(x)+v(x)\}=g_1+g_2$

(2) $d(x)=u(x)-v(x)$ $\qquad \lim_{x\to x_0}\{u(x)-v(x)\}=g_1-g_2$

(3) $p(x)=u(x)\cdot v(x)$ $\qquad \lim_{x\to x_0}\{u(x)\cdot v(x)\}=g_1\ g_2$

(4) $g(x)=\dfrac{u(x)}{v(x)}$ $[\,v(x)\neq 0\,]$ $\qquad \lim_{x\to x_0}\dfrac{u(x)}{v(x)}=\dfrac{g_1}{g_2}$ ただし，$g_2\neq 0$の場合

（証明は，定理B 13 およびB 14 から直接に導びかれる。証明略）

17 a) $\lim_{x\to 2}(x^3-3x^2+2x-7)=-7$

b) $\lim_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}=2$ $\qquad$ すべての$x\neq 1$に対して $\dfrac{x^2-1}{x-1}=x+1$ である。

c) $\lim_{x\to 0}\dfrac{x^2-5x}{x^2+8x}=-\dfrac{5}{8}$ $\qquad$ $x\neq 0$に対して $\dfrac{x^2-5x}{x^2+8x}=\dfrac{x-5}{x+8}$ である。

d) $\lim_{h\to 0}\dfrac{(x_0+h)^2-x_0^2}{h}=2x_0$ $\qquad$ （説明略）

16．連続関数

19 定義　関数fについて

(1) fが点 x_0 において定義されている

(2) $\lim_{x\to x_0}f(x)$ が存在する

(3) $\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$

なるとき，fは，点 x_0 において連続であると定義する。この定義の3つの条件の1つでも満足されないならば，fは，点 x_0 において不連続であるという。

18 a) 関数 $f(x)=x^2$ は，$\lim_{x\to 2}x^2=4=f(2)$ が成り立つから，点2において連続である。

b) 1次関数 $f(x)=x$ は，すべてのxに対して連続である。（練習B 13 a 参照）

c) 関数 $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ は，点1においては定義されないから，その点では連続ではない。しかし，極限値 $\lim_{x\to 1}f(x)=2$は存在する。（例題B 15 a 参照）　新しい関数gを，

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x\neq 1) \\ 2 & (x=1) \end{cases}$$

のようにつくるならば，これは点1において連続である。この場合，関数fの補い得る不連続性という。

d) 関数 $f(x)=\begin{cases} \frac{1}{2}x+1 & (x<3) \\ \frac{1}{2}x+2 & (x\geqq 3) \end{cases}$ は，点3における極限値が存在しないから，この点においては連続ではない。（例題B 16 参照）

e) 関数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ は，点0では定義されないから，その点では連続ではない。

f) 関数 $f(x)=\begin{cases} 0 & (x\text{が整数のとき}) \\ 1 & (x\text{が整数でないとき}) \end{cases}$ は，無限に多くの不連続点をもつ。すべての整数 x_0 に対して，$\lim_{x\to x_0}f(x)=1\neq 0=f(x_0)$ である。

⑭ 次のことを示せ。

a) 関数 $y=|x|$ は，点0において連続である。

b) 関数 $y=\begin{cases} \frac{1}{2}x+1 & (x<3) \\ \frac{1}{2} & (x \geqq 3) \end{cases}$ は，点3において連続ではない。

17．区間における連続性

f が，点 x_0 において定義され，かつ，$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x<x_0}} f(x)=f(x_0)$ または，$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x>x_0}} f(x)=f(x_0)$

が成り立つとき，点 x_0 において，左側，または，右側連続性という。

20 定義　関数 f が，区間Iのすべての x に対して連続であるとき，f は区間Iにおいて連続であるという。

21 定義　関数 f が，その定義域全体で連続であるとき，f は連続であるという。

連続関数の例として，$f(x)=c$，$f(x)=x$，$f(x)=\frac{1}{x}$ $(x \neq 0)$ があげられている。また，連続性は，グラフでは，つながっていることを意味するが，これを，連続性の定義に替えることはできないと述べている。

18．連続関数に関する定理

22 定理　関数 u および v が x_0 で連続であるならば，関数

$s(x)=u(x)+v(x)$　　$d(x)=u(x)-v(x)$

$p(x)=u(x)\,v(x)$　　$q(x)=\dfrac{u(x)}{v(x)}$　ただし　$v(x_0) \neq 0$

も，x_0 において連続である。（この定理は定理B 18 から直接導びかれる）　（証明略）

19 関数 $f_1(x)=x$ は，すべての x に対して連続である。同じく，すべての定数関数は，すべての x に対して連続である。したがって，関数 $f_2(x)=cx$，$f_3(x)=x^2$，$f_4(x)=x^3$ もまた，すべての x に対して連続，$f_5(x)=x^3-5x+1$ もすべての x に対して連続である。

19.

23 定理　f が，$[a, b]$ で連続な関数で，$f(a)$ と $f(b)$ が異なる符号をもつならば，f は，(a, b) において（少くとも）1つの零点をもつ。すなわち，$a<x_0<b$ かつ，$f(x_0)=0$ なる数 x_0 が存在する。

証明　はじめに，定理B 8から，関数に対して，次の定理（＊）を得，また（＊）から連続関数について，次の定理（＊＊）が導びかれる。

（＊）　$\lim_{x \to x_0} f(x)=g$ が存在し，かつ $\left\{ \begin{matrix} g>0 \\ g<0 \end{matrix} \right\}$ ならば，x_0 のある近傍が存在し，その近傍のすべての $x \neq x_0$ に対して $\left\{ \begin{matrix} f(x_0)>0 \\ f(x_0)<0 \end{matrix} \right\}$ が成り立つ。

（＊＊）　f が x_0 において連続であり，かつ $\left\{ \begin{matrix} f(x_0)>0 \\ f(x_0)<0 \end{matrix} \right\}$ が成り立つならば，x_0 のあ

る近傍が存在し，その近傍のすべてのxに対して $\left\{\begin{array}{l} f(x)>0 \\ f(x)<0 \end{array}\right\}$ が成り立つ。

$f(a)>0$ かつ $f(b)<0$ ($a<b$) とし，Mを [a，b] において $f(x)>0$ なる数xの集合とする。$f(a)>0$ が成り立つから，Mは空ではない。f の [a，b] における連続性から，(**) によって，aの近くの数 $x>a$ で $f(x)>0$ なる数が他に存在する。
$f(b)<0$ であるから，bはMの上界である。定理A 5により，空でない上に有界な集合Mには，上限 g ($a<g<b$) が存在する。したがって，
(1) すべての $x\in M$ に対して $x\leqq g$ である。
(2) gの任意の近傍は，Mの数を少くとも1つ含む。
$f(g)>0$ と仮定すれば，定理 (**) によって，gのある近傍が存在し，その近傍のすべてのxに対して $f(x)>0$ が成り立つ。しかるに，このときには，集合Mは $x>g$ なる数xを含む。これは(1)に矛盾する。
もし，$f(g)<0$ とすれば，定理 (**) によって，gのある近傍が存在し，その近傍のすべてのxに対して $f(x)<0$ が成り立つ。Mは $f(x)>0$ なる数xのみを含むから，gの近傍をとるとき，Mの数を全く含まない。これは(2)に矛盾する。したがって，$f(g)=0$ で，f は区間 (a，b) において零点をもつ。

[20] 関数 $f(x)=x^3-5x+1$ は連続である。$f(0.2)=0.008$ かつ $f(0.3)=-0.473$ である。したがって，f は，区間 (0.2，0.3) において零点をもつ。

[24] 中間値の定理　f が [a，b] において連続な関数であり，かつ $f(a)\neq f(b)$ ならば，$f(a)<y<f(b)$ または $f(a)>y>f(b)$ なる任意のyに対して，$f(x)=y$ なるxが，(a，b) に存在する。(定理 B 23 の一般化，証明なし)

[21] a) 関数 $f(x)=x^2$ を，区間 [0，b] で考える。(bは任意の正の実数)
$f(0)=0\neq b^2=f(b)$ だから，中間値の定理によって，$0<y<b^2$ なる任意の実数yに対して，(0，b) の中に $x^2=y$ なる数xが存在する。それは $x=\sqrt{y}$ である。
b) 関数 $f(x)=\left\{\begin{array}{ll} \frac{1}{2}x+1 & (x<3) \\ \frac{1}{2}x+2 & (x\geqq 3) \end{array}\right.$ においては $\frac{5}{2}\leqq y<\frac{7}{2}$ なるすべての数yは，この関数の関数値になり得ない。この関数は，確かに，点3において連続ではない。

20.

まず，関数 f の，区間Iにおける有界性が定義され，この区間における関数値の集合には上限も下限も存在することが説明されている。この上限，下限は，必ずしも，Iにおける f の関数値であることを要しないが，$f(x_0)$ がIにおける f の上 (下) 限であるような $x_0\in I$ が存在するならば，$f(x_0)$ を，Iにおける f の最大値 (最小値) と定義されている。例えば，$f(x)=x$ は (1，2) において有界で，上限，下限は2および1であるが，これは (1，2) における関数値ではないから，$f(x)=x$ は，(1，2) において，最大値も最少値も存在しない。
また，$f(x)=\left\{\begin{array}{ll} \frac{1}{2}x+1 & (x<3) \\ \frac{1}{2} & (x\geqq 3) \end{array}\right.$ は，[0，5] で有界で，下限は $\frac{1}{2}$，上限は $\frac{5}{2}$

であるが，$\frac{5}{2}$は，［０，５］における関数値ではないから，fは［０，５］において最小値をもつが，最大値をもたない。

㉕ 定理　［a，b］において連続な関数fの値域は有界である。値域の上限，下限は，つねに［a，b］におけるfの関数値である。（証明なし）

これは，次のようにいいかえられる。

［a，b］において連続な関数fは，つねに，［a，b］において，最大値および最小値をもつ。

⑮ 関数　$y=x^2-4x+1$ の区間［０，５］における最大値，および最小値を求めよ。

C章　微分法の初歩

関数の導関数

1．直線の傾き

① 等式 $y=mx+n$ における係数 m にはどんな意味があるか。 $m \gtreqless 0$ に対して，この関数のグラフはどのようになるか。

ここで，直線の傾き m はこの直線の傾角αによって $m=\tan\alpha$ となることを示し，ついで，２点 $P_0(x_0, y_0)$，$P_1(x_1, y_1)$，$(x_0 \neq x_1)$ で定まる直線の傾きは，
$m=\dfrac{y_1-y_0}{x_1-x_0}=\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ であることが述べられている。

② 関数 $f(x)=x^2$ のグラフが与えられたとする。$\Delta x=\pm 1$，± 0.1，± 0.01，± 0.001 とするとき，点 $P_0(1, f(1))$，および $P(1+\Delta x, f(1+\Delta x))$ で与えられる直線の傾きを計算せよ。

2．曲線の１点における傾き

曲線上の２点 $P_0(x_0, y_0)$，$P_1(x_1, y_1)$に対して，$\dfrac{y_1-y_0}{x_1-x_0}$ は，区間$[x_0, x_1]$における曲線の平均の傾きといわれ，区間によって変わるものである。練習Ｃ２における直線の傾きを m_s と表わせば，$\Delta x \neq 0$ に対して，一意的に定められた m_s が存在する。順序対$[\Delta x, m_s]$の集合Ｄは，１つの関数であるが，この関数Ｄは $\Delta x=0$ に対しては定義されない。しかし，点 $\Delta x=0$ における極限値は存在する。すなわち，$\Delta x \neq 0$ に対しては，$m_s=2+\Delta x$ であって，$\lim_{\Delta x \to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=2$ となる。このことが，次の練習Ｃ３への準備となっている。

③ 放物線 $y=x^2$ と点 $P_0(1, 1)$ を通り傾き$m=2$なる直線をかけ。計算によって，この直線は，点 $P_0(1, 1)$ において，放物線に接することを確かめよ。

上の $m_s = \tan \alpha_s = \dfrac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$ を，区間 $[x_0, x_0+h]$ $(h>0)$ または，区間 $[x_0+h, x_0]$ $(h<0)$ における曲線の平均の傾きという言葉で述べている。

1 定義　$h \neq 0$ に対して，$\dfrac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$ なる数を，点 x_0 における関数 f の h に属する微分商という。

定まった x_0 について，すべての順序対 $[h, m_s]$ を含み，かつ，それのみより成る集合 D は1つの関数で，この D に対して，極限値 $\lim_{h\to 0} D(h) = \lim_{h\to 0} \dfrac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = m_t$ が存在するならば，m_t を，曲線の点 x_0 における傾きといい，P_0 を通り傾き m_t の直線を，P_0 における接線と定めている。

④ 初等幾何においては，円の接線はどのように定義されるか。この定義が，任意の曲線に適用されないのはなぜか。

3．2つの物理の問題

$\boxed{1}$ 物体の落下運動 $s = f(t) = \dfrac{g}{2}t^2$ $(t \geqq 0)$ の，時刻 t_1 における瞬間の速度 $v(t_1)$ は

$v(t_1) = \lim_{\Delta t\to 0} \dfrac{\frac{g}{2}\{(t_1+\Delta t)^2 - t_1^2\}}{\Delta t}$ $(\Delta t \neq 0)$ より，$v(t_1) = g t_1$ である。

$\boxed{2}$ コイルにおいては，コイルの中の磁気流が変化するとき，誘導張力が生ずる。磁気流が，時間 $\Delta t = t_2 - t_1$ において $\Delta\Phi = \Phi_2 - \Phi_1$ だけ変化するとする。この時間的変化は，関数 $\Phi = f(t)$ で表わされる。コイルが，1巻きだけならば，時間 Δt の間の平均張力は

$-\dfrac{\Delta\Phi}{\Delta t} = -\dfrac{f(t_1+\Delta t) - f(t_1)}{\Delta t}$ $(\Delta t \neq 0)$ であり，時刻 t_1 における瞬間の張力は，極限値 $-\lim_{\Delta t\to 0} \dfrac{\Delta\Phi}{\Delta t}$ が存在すると仮定して，この極限値で定義される。

4．関数の微分可能性

さきに考察した極限値によって得られた微分商によって，関数の局所的な状態を知ることができるほか，曲線の傾き，瞬間の速度，または，ある時刻における生物の生長速度，化学反応速度などの概念も，これによって定義されることを強調している。

2 定義　関数 f が，点 x_0 において微分可能であるとは，

(1) f が，x_0 の近傍において，定義されていること，かつ

(2) 極限値 $\lim_{h\to 0} \dfrac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$ が存在すること

である。この極限値を $f'(x_0)$ で表わし，関数 f の，点 x_0 における第1次導関数という。

すなわち　$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \dfrac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$

ここで，あらためて，曲線の，点 P_0 における接線を定義している。また，関数 f の点 x_0 における第1次導関数を，その関数の点 x_0 における微分商ともいい，記号として $f'(x_0)$，

$y'\Big|_{x=x_0}$　$\dfrac{dy}{dx}\Big|_{x=x_0}$，$\dfrac{df(x)}{dx}\Big|_{x=x_0}$ などをあげている。また，$f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ もあげられている。

$\boxed{3}$ 関数 $f(x)=x^2$ の点 $x_0=1$ における第１次導関数は，$f'(1)=2$ である。(説明なし)

⑤ 任意の x_0 に対して，次のことが成り立つことを示せ。
a) 関数 $f(x)=x$ の点 x_0 における第１次導関数は，$f'(x_0)=1$ である。
b) 関数 $f(x)=x^2$の点 x_0 における第１次導関数は，$f'(x_0)=2x_0$ である。

5．第１次導関数の調査

$\boxed{4}$ 関数 $f(x)=x^2-5x+7$ の，点 $x_0=-1.5$ における第１次導関数についてしらべる。
（解には，微分商をつくり，それを式変形して極限値を求める手順を，細かくていねいに記されているが略する。）　答　$f'(-1.5)=-8$

$\boxed{5}$ 関数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ $(x\neq 0)$ の，点 $x_0=\sqrt{2}$ における第１次導関数についてしらべる。
（解略）　答　$f'(\sqrt{2})=-\dfrac{1}{2}$

$\boxed{6}$ 関数 $f(x)=|x|$ は，点０において，微分可能ではない。（解略）

例題Ｃ６を用いて，x_0 において右側または左側微分可能，および，x_0 における右側または左側導関数が定義されている。この際，f は，x_0 において，また，x_0 の右側または左側の近傍において定義されていることのみを仮定すればよいと明示している。

$f(x)=|x|$ は，点０においては，右側にも左側にも微分可能である。

▷3 定義　関数fが，区間（a，b）において微分可能であるとは，（a，b）の中のすべてのｘに対して微分可能であることである。

定義Ｃ３に関連して，次の説明がなされ，それを，定義Ｃ４で明確に示している。

f が区間（a，b）で微分可能ならば，$x\in(a,b)$ なるｘについてのすべての順序対 $[x, f'(x)]$ の集合 f' は関数である。この f' を，（a，b）における f の第１次導関数といい，$f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$　$[x\in(a,b),\ x+h\in(a,b),\ h\neq 0]$ とも書く。

▷4 定義　関数fの第１次導関数とは，次のことが成立するような関数 f' である。
(1) f'の定義域は，fが微分可能であるようなすべてのｘの集合である。
(2) f'の定義域内のすべてのｘに対して，$f'(x)$ は点ｘにおける f の第１次導関数である。

関数fの導関数を求めることを，関数fを微分するという。

⑥ 放物線 $y = x^2 - 5x + 7$ は，点 $\frac{5}{2}$ においてどんな傾きをもつか。また，その結果を幾何学的に説明せよ。

6．連続性と微分可能性との関係

▷5 定理　関数 f が x_0 において微分可能ならば，f は x_0 において連続である。(証明略)

定理C 5の逆は成立しない。関数 $f(x) = |x|$ は，点0において連続である（練習B 14参照）が，微分可能ではない。（例C 6参照）

7．和の導関数

▷6 定理　区間（a，b）において一定であるすべての関数 $f(x) = c$ は，（a，b）において微分可能であり，（a，b）のすべての x に対して $f'(x) = 0$ が成り立つ。(証明なし)

⑦ 定理C 6を証明し，それを幾何学的に説明せよ。

▷7 定理　関数 u および v が x_0 において微分可能ならば，$s(x) = u(x) + v(x)$ なる関数 s も x_0 において微分可能であり，かつ，$s'(x_0) = u'(x_0) + v'(x_0)$ が成り立つ。（証明略）

$\boxed{7}$ 関数 $u(x) = x^2$，および $v(x) = x$ は，すべての x において微分可能で，$u'(x) = 2x$ および $v'(x) = 1$ である。（練習C 5参照）このとき，関数 $s(x) = x^2 + x$ も，すべての x において微分可能であり，かつ，$s'(x) = 2x + 1$ が成り立つ。

u が区間（a，b）において微分可能な関数ならば，定理C 6およびC 7によって，すべての関数 $f(x) = u(x) + c$（c は任意の実数）もまた（a，b）において微分可能であり，かつ，（a，b）のすべての x に対して $f'(x) = u'(x)$ が成り立つことを説明し，この幾何学的な意味（y 軸に沿った平行移動によって得られる曲線の，x_0 における接線は平行であること）などについて説明を加えている。

▷8 定理　関数 f_1，f_2 ……，f_n が x_0 において微分可能ならば，関数 $f(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x)$ も x_0 において微分可能であり，かつ，$f'(x_0) = \sum_{i=1}^{n} f_i'(x_0)$ が成り立つ。（証明は，定理C 7から数学的帰納法によるとのみ示している。）

8．積の導関数

▷9 定理　関数 u および v が，x_0 において微分可能ならば，$p(x) = u(x)v(x)$ なる関数 p も x_0 において微分可能であり，かつ，$p'(x_0) = u'(x_0)\,v(x_0) + u(x_0)\,v'(x_0)$ が成り立つ。（証明略，関数 v は，x_0 において微分可能だから，そこで連続 $\therefore \lim_{h\to 0} v(x_0+h) = v(x_0)$ を明示している。）

8 関数 $f(x)=x^3=x^2\cdot x$ の第1次導関数は $f'(x)=2x\cdot x+x^2\cdot 1=3x^2$ である。

⑧ 関数 $y=x^4$ および $y=x^5$ の第1次導関数を求めよ。

10 定理 v が x_0 において微分可能な関数であるならば，$p(x)=cv(x)$ （c は任意の定数）なる関数 p もまた x_0 において微分可能で，かつ，$p'(x_0)=cv'(x_0)$ である。（証明は示されていないが，定理C 9から定理C 6の応用としてあげている。）

9 関数 $f(x)=x^3-5x+7$ の第1次導関数を求めよう。（解略） 答 $f'(x)=2x-5$

9．商の導関数

11 定理 関数 u および v が，x_0 において微分可能であり，かつ，$v(x_0)\neq 0$ ならば，$q(x)=\dfrac{u(x)}{v(x)}$ なる関数 q もまた x_0 において微分可能で，かつ

$$q'(x_0)=\frac{u'(x_0)\,v(x_0)-u(x_0)\,v'(x_0)}{v^2(x_0)}$$ が成り立つ。

略証 $$\frac{q(x_0+h)-q(x_0)}{h}=\frac{\dfrac{u(x_0+h)}{v(x_0+h)}-\dfrac{u(x_0)}{v(x_0)}}{h} \qquad (1)$$

v は x_0 において微分可能だから，x_0 において連続である。$v(x_0)\neq 0$ であるから，x_0 の近傍で，その近傍のすべての x に対して $v(x)\neq 0$ が成立するものが存在する。よって，(1)は，$h=0$ の近傍においては，その点自身を除いて定義される。（以下，証明略）

定理 C 11 から，その特別な場合として，関数 $q(x)=\dfrac{1}{v(x)}$ の導関数について述べられている。

10 a）関数 $f(x)=\dfrac{3x-5}{x^2+1}$ の第1次導関数をつくると $f'(x)=\dfrac{-3x^2+10x+3}{(x^2+1)^2}$ である。

b）関数 $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$ （$x\neq 0$）の第1次導関数をつくると $f'(x)=-\dfrac{2}{x^3}$ （$x\neq 0$）である。

（いずれも説明略）

10．べき関数 $y=x^n$ （n; 整数）の導関数

12 定理 整数を指数にもつ，べき関数 $y=x^n$ は，その定義域のすべての x に対して微分可能で，かつ，次の式が成り立つ。

$(x^0)'=0$

$(x^n)'=nx^{n-1}$ （$n\neq 0$；$n<0$ の場合は $x\neq 0$） （証明略）

11．高次の導関数

定義が，次のように示されている。

関数fの第1次導関数f'が点x_0で微分可能とする。このとき，

(1) f'が点x_0においてのみでなく，x_0の近傍においても存在する

(2) 極限値 $\lim_{h\to 0}\dfrac{f'(x_0+h)-f'(x_0)}{h}$ が存在する

ならば，この極限値を，関数fの点x_0における第2次導関数といい，$f''(x_0)$ または，$\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=x_0}$ で表わす。

関数fの第1次導関数f'が微分可能ならば，f'の第1次導関数を，関数fの第2次導関数といい，$y''=f''(x)=\dfrac{d^2y}{dx^2}$ とかく。

一般に，自然数$n\geqq 2$に対して，関数fの第n次導関数を

$$y^{(n)}=f^{(n)}(x)=\frac{d^ny}{dx^n}=(f^{(n-1)}(x))'$$

によって定義する。ただし，関数fとその導関数は（$n-1$）次まで微分可能であると仮定する。

$\boxed{11}$ 関数 $f(x)=4x^5-7x^4+8x^3-\sqrt{2}\,x^2+x-\frac{1}{2}$ は，その導関数 $f^{(n)}(x)$ が，すべてのxに対して $f^{(n)}(x)=0$ が成り立つようになるまで，くりかえし微分できる。（解略）

有理関数

12．有理関数の定義

⑬ 定義　自然数nおよび実数$a_0, a_1, \cdots\cdots, a_n$（ただし$a_n\neq 0$）が存在し，関数$f$の定義域内のすべてのxに対して，$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots\cdots+a_2x^2+a_1x+a_0=\sum_{\nu=0}^{n}a_\nu x^\nu$ が成り立つとき，関数fを有理整関数という。

2つの有理整関数 $f(x)=\sum_{\nu=1}^{n}a_\nu x^\nu$ および $g(x)=\sum_{\nu=1}^{m}b_\nu x^\nu$ は，$n=m$ かつ $a_\nu=b_\nu$（$\nu=0, 1, 2, \cdots\cdots, n$）のとき，かつ，そのときに限り，相等しいことをあげ，ついで，係数，および，次数を定めている。そして，いかなる有理整関数も，定数関数および恒等関数から有限回の加法，減法，乗法の演算を用いて得られることを説明している。

⑭ 定義　2つの有理整関数

$$u(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots\cdots+a_1x+a_0 \quad \text{および}$$
$$v(x)=b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots\cdots+b_1x+b_0$$

が与えられ，関数fの定義域内で，$v(x)\neq 0$ なるすべてのxに対して，

$$f(x)=\frac{u(x)}{v(x)}=\frac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots\cdots+a_1x+a_0}{b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots\cdots+b_1x+b_0}$$

が成り立つような関数fを，有理関数という。

有理整関数でない有理関数を，有理分数関数といい，その中で，さらに，分子の次数が分母の次数よりも小さいものを，真分数関数と名づけている。

13．有理関数の微分法

⑨ 次の関数の，最初の２つの導関数（第１次と第２次の意味 ― 訳註）を求めよ。
a） $y = 3x^5 - 4x^3 + \sqrt{2}\,x^2 - 1$　　b） $y = (4x^2 - 5)^3$　　c） $y = \dfrac{x^2 - 3x - 5}{x^2 + 1}$

有理整関数は，すべてのｘに対して微分可能であり，したがって，すべての高次導関数は，すべてのｘに対して存在する。また，すべての点ｘにおいて連続である。

15 定理　関数ｇが x_0 において微分可能ならば，$f(x) = [g(x)]^n$ （ｎは自然数，$n \geqq 1$）なる関数 f も x_0 において微分可能で，かつ，$f'(x_0) = n[g(x_0)]^{n-1}\,g'(x_0)$ が成り立つ。（証明略）

12 関数 $y = (4x^2 - 5)^3$ の第１次導関数は，$y' = 3(4x^2 - 5)^2 \cdot 8x = 24x(4x^2 - 5)^2$ である。

有理整関数はすべてのｘに対して微分可能であるから，定理Ｃ 11 により，すべての有理関数は，分母を０にしないすべてのｘに対して微分可能であり，したがって，定義域のすべてのｘに対して連続である。また，有理関数の導関数は，つねにまた，有理関数である。

13 関数 $f(x) = \dfrac{x^2 + x + 1}{(x+3)^2}$ （$x \fallingdotseq -3$）の最初の２つの導関数を求めよう。（解略）
答　$f'(x) = \dfrac{5x + 1}{(x+3)^3}$，　$f''(x) = \dfrac{-10x + 12}{(x + 3)^4}$　（$x \fallingdotseq -3$）

14．有理関数の零点

⑩ 関数 $y = 3x^2 - \frac{1}{2}x - 1$ の零点を計算し，かつ，$3x^2 - \frac{1}{2}x - 1$ を１次因数に分解せよ。

16 定義　有理関数 $f(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)}$ において，$u(x_0) = 0$ かつ $v(x_0) \fallingdotseq 0$ なる x_0 を，f の零点という。

14 関数 $y = x^3 + \frac{2}{5}x^2 - \frac{3}{5}x$ の零点を計算しよう。（解略）　答 $x_1 = 0$，$x_2 = \frac{3}{5}$，$x_3 = -1$

15 関数 $y = x^4 - 11x^2 + 18$ の零点を計算しよう。（解略）
答　$x_1 = 3$，$x_2 = -3$，$x_3 = \sqrt{2}$，$x_4 = -\sqrt{2}$

例題Ｃ 14，Ｃ 15 の関数は，上よりそれぞれ $y = x(x - \frac{3}{5})(x + 1)$，$y = (x+3)(x-3)(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})$ とかくことができる。

15. 有理整関数の1次因数への分解

17 定理　有理整関数fがあって，すべての x に対して $f(x)=(x-x_1)f_1(x)$ が成り立つような有理整関数 f_1 が存在するとき，かつ，そのときに限り，x_1 はfの零点である。（証明略）

18 定理　互いに異なる数 $x_1, x_2, \cdots\cdots, x_m$ が有理整関数fの零点であるならば，すべての x に対して，$f(x)=(x-x_1)(x-x_2)\cdots\cdots(x-x_m)f_m(x)$ が成り立つような有理整関数 f_m が存在する。（証明は定理 C 17 のくりかえし使用と述べてある。）

19 定理　n 次の有理整関数は，すべて，高高 n 個の互いに異なる零点をもつ。（証明なし）

20 定理　次数 n の有理整関数fが，ちょうど n 個の零点をもつならば，fは n 個の1次因数の積として表わされる。（証明なし）

有理整関数fの k 重の零点 x_1 を，$f(x)=(x-x_1)^k f_1(x)$，$f(x_1)\fallingdotseq 0$ で定義してある。

16. 有理整関数の零点の計算

次数が4以下の場合についてのみ，一般的な解法は存在するが，より高次の場合は，特別な場合を除いて，近似解法によることが説明されている。大抵の場合は，定理 B 23 によって与えられた有理整関数の零点が存在するような区間を計算する（例 B 20 参照）が，必要な個数の関数値を計算することによって，零点のよりよい近似値を，つねに求めることができる。

16 関数 $f(x)=x^3+\frac{1}{2}x^2-\frac{5}{2}x+1$ は，3個の零点をもつ。この零点をしらべよう。
（解略）　答　$x_1=1$，$x_2=\frac{1}{2}$，$x_3=-2$

⑪ 方程式 $3x^4+4x^3-12x^2+5=0$ を解け。

17. 無限に増加（減少）する変数による関数の極限値

関数 $f(x)=\frac{x^2-1}{x^2+1}$ を例にとり，まず，$\frac{x^2-1}{x^2+1}<1$ であることを述べ，また $x_n=10^n$ および $x_n^*=-10^n$ $(n\geqq 0)$ について，数列 (x_n)，(x_n^*) に付随する数列 $(f(x_n))$，$(f(x_n^*))$ を考察し，$\lim_{n\to\infty} f(x_n)=1$ および $\lim_{n\to\infty} f(x_n^*)=1$ を導き，これによって，直線 $y=1$ が，曲線の漸近線であると定義している。

⑫ (a_n) が限りなく増加（減少）する数列ならば，$\left(\frac{1}{a_n}\right)$ は零数列であることを証明せよ。

21 定義　関数fが，限りなく増加する x について，極限値 $\lim_{x\to+\infty} f(x)=g$ をもつとは，次のことが成立することである。

(1)　$x \geqq x_0$ なるすべての x に対して f が定義されるような変数 x_0 が存在する。

(2)　限りなく増加するすべての数列 (x_n) （すべての n に対して $x_n \geqq x_0$ ）に対して，数列 $(f(x_n))$ が g に収束する。

限りなく減少する x についても，同様に $\lim_{x \to -\infty} f(x) = g$ が定義されており，例えば，関数 $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1}$ について，$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 1$ とかかれている。

18.

17　$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$　かつ　$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$　　（解略）

18　すべての関数 $f(x) = \frac{a}{x^m}$ （$x \neq 0$，a；実数，m；自然数で $m \geqq 1$） に対して，$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$ が成り立つ。（解略）

19　関数 $f(x) = x^3$ は，限りなく増加（減少）する x について，極限値をもたない。すなわち，$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$，$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$　または，まとめて $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$
（説明略）

⑬　すべての関数 $f(x) = x^m$（$m \geqq 1$，m；自然数）に対して，$\lim_{x \to +\infty} x^m = +\infty$　かつ，
$\lim_{x \to -\infty} x^m = \begin{cases} +\infty & (m\ ;\text{偶数}) \\ -\infty & (m\ ;\text{奇数}) \end{cases}$　が成り立つ理由を述べよ。

20　関数 $f(x) = \frac{3x^2 - 5x + 7}{5x^2 + x - 8}$ の $x \to \pm\infty$ に対する状態を研究しよう。（解略）
答　$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \frac{3}{5}$

19．有理関数の無限遠における状態

有理整関数 $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots\cdots + a_1 x + a_0$ （$a_n \neq 0$）について，説明を述べた後，次の表で要約されている。

n	偶	数	奇	数
a_n	$a_n > 0$	$a_n < 0$	$a_n > 0$	$a_n < 0$
$\lim_{x \to \infty} f(x)$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim_{x \to -\infty} f(x)$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$
例	$y = x^2$	$y = -x^4$	$y = x^3$	$y = -x^3$

また，有理分数関数 $f(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots\cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots\cdots + b_1 x + b_0}$ （$a_n \neq 0$，$b_m \neq 0$）についても，説明を述べた後，次のように要約されている。

$n = m$ のとき　　$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \frac{a_n}{b_m}$　直線 $y = \frac{a_n}{b_m}$ は漸近線

$n < m$ のとき　　$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$　　x 軸は漸近線

$n > m$ のとき　　下表

$\frac{a_n}{b_m}$	$n-m$	$\lim_{x\to+\infty} f(x)$	$\lim_{x\to-\infty} f(x)$
$\frac{a_n}{b_m}>0$	偶　数 奇　数	$+\infty$ $+\infty$	$+\infty$ $-\infty$
$\frac{a_n}{b_m}<0$	偶　数 奇　数	$-\infty$ $-\infty$	$-\infty$ $+\infty$

21 関数 $f(x)=\frac{x^2+2x-5}{x+4}$ （$x\neq-4$）の無限遠における状態を研究しよう。

略解　$x\neq0$ かつ $x\neq-4$ なるすべての x に対して

$$\frac{x^2+2x-5}{x+4}=x\cdot\frac{1+\frac{2}{x}-\frac{5}{x^2}}{1+\frac{4}{x}}\qquad \text{よって}\quad \lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\pm\infty$$

さらにくわしく考えるために，$x\neq-4$ なるすべての x に対して，

$$\frac{x^2+2x-5}{x+4}=x-2+\frac{3}{x+4}$$

である。$g(x)=x-2$ とおけば，$\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-g(x))=0$　となる。これより，極めて大きい $|x|$ に対して，$f(x)\fallingdotseq x-2$ であり，直線 $g(x)=x-2$ は，関数 f のグラフの漸近線である。

20. 有理関数の極点

⑭ 関数 $y=\frac{1}{x}$ および $y=\frac{1}{x^2}$ の，点 0 の近傍における状態を記述せよ。

22 定義　有理関数 $f(x)=\frac{u(x)}{v(x)}$ において，$v(x_0)=0$ かつ $u(x_0)\neq0$ のとき，x_0 を f の極点という。

22 関数 $f(x)=\frac{1}{x-1}$ は，点 1 において極点をもつ。この点に近づくときに，f の関数値の状態はどのようになるか。（解略）

答　点 1 に右（左）から近づくときに，関数値は限りなく増加（減少）する。

⑮ 次の各場合に，数列 $(f(x_n))=(\frac{1}{x_n-1})$ の状態を研究せよ。

a）$x_n=1+\frac{1}{10^n}$　　　b）$x_n=1-\frac{1}{10^n}$

例題 C 22 に関連して，次の記号などが示されている。

$$\lim_{\substack{x\to1\\x>1}}\frac{1}{x-1}=\infty\qquad \lim_{\substack{x\to1\\x<1}}\frac{1}{x-1}=-\infty$$

これより，直線 $x=1$ は，$f(x)=\frac{1}{x-1}$ のグラフの漸近線である。

23 点 1 において極点をもつような関数 $f(x)=\frac{1}{(x-1)^2}$ の，その点の近傍における状態を研究すれば $\lim_{\substack{x\to1\\x>1}}\frac{1}{(x-1)^2}=\lim_{\substack{x\to1\\x<1}}\frac{1}{(x-1)^2}=+\infty$ を得る。（説明なし）

⑯ 次のことを，それぞれ示せ。

1) すべての関数 $f(x)=\dfrac{1}{x-x_0}$ $(x \neq x_0)$ に対して $\displaystyle\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x)=+\infty$ かつ $\displaystyle\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x)=-\infty$ が成り立つ。

2) すべての関数 $f(x)=\dfrac{1}{(x-x_0)^2}$ $(x \neq x_0)$ に対して $\displaystyle\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x)=\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x)=+\infty$ が成り立つ。

一般に，$f(x)=\dfrac{u(x)}{v(x)}=\dfrac{u(x)}{(x-x_0)^k v_1(x)}=\dfrac{1}{(x-x_0)^k}\cdot\dfrac{u(x)}{v_1(x)}$ $(x \neq x_0,\ k=1, 2)$

の場合については，練習 C 16 を用いて，x_0 の近傍における状態をしらべることができる。

x_0 が，関数 v の 2 重の零点で，かつ，$u(x_0) \neq 0$ ならば，f は，点 x_0 において，2 次の極点をもつという。

— 以下，次号 —