方程式・不等式による論理指導

上　田　外志夫

は　じ　め　に

現在、小中高における数学教育は、現代化運動の反省期に入っているといわれている。特に小平・広中発言があってから，新教材に対する教育的評価は地に落ちたかのようである。授業についていけない大量の生徒がいることは問題になって当然であり，原因の1つとして多くの記号を必要とする集合の考えや，論理等が槍玉に上げられることも首肯出来る面がある。反面現行の指導要領が検討されていた頃の現代化一辺倒の雰囲気から，現代の新教材総ざんげのムードへの極端は移行に対して，何か割切れない思いをしているのは私だけであろうか。たしかに現行指導要領の意図を現場が消化しきっていないことも事実であろうし，その為指導目標がつかめないことから，思わしくない状況を現場で作っているかもしれないことは想像できる。数学の基礎としての集合・論理は中途半端な勉強では理解出来ないし，さらに生徒の心理や直観を検討して，その分野から適当な指導内容をぬき出すことは難事業であろう。集合論や論理学の最初の部分を抽出して指導するのは最も安易な方法であり，現状もそれに近いと批判されているのではないか。もともと構造化するということは，既に存在する数学的内容を整備することであり，論理はその道具であって，数学的論理学はまたその道具を構造化して出来上ったものであろう。この出来上った構造を公理から出発して学ぶことは，それなりに意味があろうが，その時には学ぶ者の中に，構造化の欲求，即ち整備されていない数学的内容への不信感のようなものが必要なのではないか。そのような欲求のない人にとって整備された内容を学ぶことは，問題意識のない問題の解答を聞いているようなものである。たとえ不十分な体系化しか出来なくても，このような欲求を高めることをも意識して，構造化して行く過程を学ぶことの方が，生きた能力を身につけると思う。この為には，1つの数学的内容を深く検討することが必要であろう。

この研究は現在続行中であり，私の個人研究ではない。既に作成されたものと作成予定のものは　(1)生徒用教科書（プリント）　(2)指導案　(3)実験授業報告（授業反省，テスト問題と結果）　であるが，ここで公表するのは，生徒用教科書（プリント）の第Ⅰ章と第Ⅱ章である。この教科書は原案を昨年から作りはじめ，今年2つの学校における実験授業によって作りかえられたものである。　第Ⅰ章「方程式と不等式の変形」は本校一年生を対象に，十年近く指導して来た内容であり，第Ⅱ章「数学で用いられる言葉と数式の文法」第Ⅲ章「主張の真偽と証明」については，私と本校の石田三郎先生によって，今年で4回指導して来たものである。その間，本校の数学科教官の研究会によって検討され，現在，金沢大学教育学部数学科同窓会研究部主催の研究会で，大学の先生方の指導のもとに，さらに検討中である。第Ⅲ章については現在問題になっている点が多く，今回は発表を見送ることにした。なお，この指導内容は高校生の中位以上の学力のある生徒を対象にしている。第Ⅰ章は8時限，第Ⅱ章は6時限使う予定である。痛烈な御批判をお願いします。

§1　方程式の変形

次の方程式を解いて，下記の問題点について考えてみよう。

(1) $\frac{1}{2}x+1=2x-5$　　　(2) $(x-2)(x+4)=3(x-2)\ (x>0)$

(3) $\begin{cases} 3x+2y=-1 \\ 2x+3y=-4 \end{cases}$　　　(4) $x-5=\sqrt{x+1}$

(5) $\begin{cases} x+y=7 \\ x^2+y^2=25 \end{cases}$

（問題点１）(4)を解いていくと　$x=3$ と $x=8$ が出て来るが，$x=3$ を与えられた方程式に代入すると，左辺は -2，右辺は 2　となって等号が成立しない。どうしてこのようなものが出て来るのか。

（問題点２）(2)を次のように２通りに解いてみる。

$$(x-2)(x+4)=3(x-2)$$
$$\therefore\ x+4=3$$
$$\therefore\ x=-1$$
$x>0$ より解なし

$$(x-2)(x+4)=3(x-2)$$
$$(x-2)(x+4)-3(x-2)=0$$
$$(x-2)(x+1)=0$$
$$\therefore\ x=2\qquad x=-1$$
$x>0$ より　$x=2$

この２つの答案はどちらが正しいのだろうか。答がちがっているのは何故か。

（問題点３）(5)を解くとき，$x+y=7$　を　$y=7-x$ に変形して $x^2+y^2=25$ に代入して解くと　$x=3$　と $x=4$　が出て来る。$x=3$ を　$y=7-x$ に代入すると $y=4$ となるが，$x^2+y^2=25$ に代入すると　$y=\pm 4$　となり　$(x,\ y)=(3,\ -4)$ なる解が余分に出て来るが，どうしてだろうか，

中学校で初めて方程式を学んだとき，方程式を色々変形していくと，答が変ることがないかということを心配した人もあったのではないか。このような疑問は忘れずに考え続けたいものである。

このように考えて来ると，方程式の変形には次のような場合がありそうに思える。

① 方程式の解が不変であるような変形
② 方程式の解が増えるような変形
③ 方程式の解が減るような変形
④ 方程式の解が全く変ってしまうような変形

これらのうちで，方程式を解くとき，絶対にしてはならない変形は ③ と ④ であろう。また ② についても，出来るだけ避けて ① のみで解くことがのぞましい。② の形の変形をせざるを得ないときは，出て来た値を与えられた式に代入して，真の解であるかどうかを調べることが義務ずけられることは当然のことである。この為にも，どのような変形が上記 ①～④ のどれに属する変形であるかをはっきり知る必要がある。それでは

等式の変形には，どのような変形があるだろうか

この問題についての手懸は，今迄どのような方程式をどのように解いて来たかを検討するところにあるであろう。

§2　方程式の種類とその変形

中学校で学んだ方程式は1元1次方程式，連立2元1次方程式，1元2次方程式であった。高等学校ではさらに1元高次方程式，連立2元2次方程式の特別な場合について学んだ，これらの他に，もっと一般にm元n次方程式や，分数方程式や無理方程式が考えられる。

問1　連立，m元，n次　とはそれぞれどういう意味か

問2　§1で与えられた方程式　(1) (2) (3) (5) は　それぞれ何元何次方程式か

問3　§1で与えられた方程式　(4) は何方程式と言えばよいか

a，1元1次方程式の変形

方程式 (1) を解いてみよう。

$$\frac{1}{2}x+1=2x-5 \quad \cdots\cdots (1) \qquad -3x=-12 \quad \cdots\cdots (3)$$

$$x+2=4x-10 \quad (2) \qquad x=4 \quad \cdots\cdots (4)$$

(1)から (2)，(2) から (3)，(3) から (4) は，それぞれどんな変形をしたといえるであろうか。(1) から (2) は両辺に2をかける，(2) から (3) は移項する，(3) から (4) は両辺を-3で割る，という変形であるが，(2) から (3) は「両辺に同じものを加える」，(1) から (2)，(3) から (4) は共に「両辺に同じ数をかける」，とまとめることが出来るが，この内容を記号を使って，次のように表現することにする。

Ⅰ，A＝B　から　A＋C＝B＋C　を作る。
Ⅱ，mを定数とするとき，A＝B　から　mA＝mB　を作る。

問4　(2) から (3) へ移ったとき Ⅰ の変形をしたが，A，B，C　にあたる式は何か

(1) から (2)，(3) から (4) を作ったとき，m，A，B　にあたる式はどんな式か。

b，1元2次方程式

方程式 (2) の解答を検討して見よう。

$$(x-2)(x+4)=3(x-2) \quad \cdots\cdots (1) \qquad x-2=0 \text{ または } x+1=0 \quad \cdots\cdots (4)$$

$$(x-2)(x+4)-3(x-2)=0 \quad \cdots (2) \qquad x=2 \text{ または } x=-1 \quad \cdots\cdots (5)$$

$$(x-2)(x+1)=0 \quad \cdots\cdots (3) \qquad x>0 \text{ より } x=2 \quad \cdots\cdots (6)$$

(1) から (2) の変形は Ⅰ の変形であるが，(2) から (3) は左辺を因数分解しているだけで，方程式の変形ではないと見ることにしよう。(3) から (4) の変形は，どんな変形と見ればよいであろうか。$x-2$をA，$x+1$をBと考えると，次のように表現出来るであろう。

Ⅲ　AB＝0　から　A＝0またはB＝0　を作る

(4) から (5) は Ⅰ の変形であるが，(5) の x に1以外の係数がついている時には，Ⅱ の変形も必要となる。

C，無理方程式

方程式 (4) を解くと次のようになる。

$$x-5=\sqrt{x+1} \quad \cdots\cdots (1) \qquad x=8 \text{ を (1) に代入すると}$$

$$x^2-10x+25=x+1 \quad \cdots\cdots (2) \qquad \text{左辺は}-2\text{，右辺は }2$$

$x^2-11x+24=0$	……(3)	よって不成立	……(7)
$(x-3)(x-8)=0$	……(4)	$x=8$を(1)に代入すると	
$\therefore$ $x-3=0$ または$x-8=0$	…(5)	左辺は3，右辺も3	
$\therefore$ $x=3$ または $x=8$	……(6)	よって成立	……(8)

以上から　$x=8$

(1)から(2)は，(1)の両辺を平方して(2)が得られたのであるから，次のようにかける。

> Ⅳ，$A=B$　から　$A^2=B^2$　を作る

問5　(2)から(6)までは，どのような変形がなされたか

問6　次の方程式を解き，各々どのような変形をしたかを調べなさい。

(1) $\frac{1}{3}(2x-1)+x=1$　　　　(2) $x^3=7x+6$

§3　方程式の同値関係

方程式(1)(2)(4)の解答を検討することによって，前節で述べた4種の変形を抽出した。その他の1元整方程式を考えても，これらの変形以外の変形を用いなければ解けそうにない方程式はないように思える。そこで，これらの変形は§1で述べた①から④の，どの変形にあたるかを検討してみることにする。A，B，C，Dをx，y等の文字を含んだ式とする。

> $A=B$の解が$C=D$の解であるとき，$A=B\Rightarrow C=D$　とかき，
> $A=B\Rightarrow C=D$，$C=D\Rightarrow A=B$のとき，$A=B\Leftrightarrow C=D$　とかく

記号「$\Rightarrow$」を「ならば」と読み，記号「$\Leftrightarrow$」を「同値」と読む，この定義から分るように，$A=B\Rightarrow C=D$は，$A=B$の解集合が$C=D$の解集合の部分集合であること，$A=B\Leftrightarrow C=D$は　$A=B$と$C=D$の解集合が等しいことを示している。

次に，前節で抽出した変形によって，解集合がどう変るかを調べよう。$A=B$の解の1つをA，B，Cに代入してα，β，γになったとすると，方程式がたとえ有理数の範囲で考えられたものであっても，実数や複素数の範囲で考えられたものであっても，それらには等しいものに同じものを加えても等しい。という性質があることから，「$\alpha=\beta$ならば$\alpha+\gamma=\beta+\gamma$」なることが言える。このことは「$A=B\Rightarrow A+C=B+C$」なることを意味している。ここでAを$A'+C'$，Bを$B'+C'$，Cを$-C'$におきかえると，上の主張は，$A'+C'=B'+C'\Rightarrow A'=B'$に変わるから，次の定理が言える。

> 定理Ⅰ　$A=B\Leftrightarrow A+C=B+C$

次にmを定数とするとき，「$\alpha=\beta$ならば$m\alpha=m\beta$」が成立することから，「$A=B\Rightarrow mA=mB$」なることは明らかであろう。

問1.　$2x=-3$　の解集合は何か。また，この両辺に0をかけると　$0=0$　となるが，これを　$0\times 2x=0\times(-3)$と見て，この方程式の解集合は何であるかを考えなさい。

問1の結果から　$m=0$のときは，$A=B\Rightarrow mA=mB$　は成立するが，$mA=mB\Rightarrow A=B$　は成立しないことが分る。もし$m'\neq 0$とすると，$\frac{1}{m'}$という数が考えられるから，$A=B\Rightarrow mA=mB$　のAを$m'A'$に，Bを$m'B'$に，mを$\frac{1}{m'}$におきかえると，$m'A\fallingdotseq m'A'$

$\Rightarrow A'=B'$ が成立することから，次の定理が成立する。

定理Ⅱ　mが0でない定数のとき，$A=B \Leftrightarrow mAmB$

α，βが有理数であっても，実数や複素数であっても，「$\alpha=0$ならば$\alpha\beta=0$」や，「$\alpha\beta=0$ならば，$\alpha=0$または$\beta=0$」が成立することから

定理Ⅲ　$AB=0 \Leftrightarrow (A=0$または$B=0)$

が言える。今後「または」という言葉を，記号「$\vee$」で表わして，「$A=0$または$B=0$」等を「$A=0\vee B=0$」で表わすことにする。以上の定理を用いると，次の系が証明できる。

系1　$AC=BC \Leftrightarrow (A=B\vee C=0)$
系2　$A^2=B^2 \Leftrightarrow (A=B\vee A=-B)$

（系1の証明）　$AC=BC \Leftrightarrow AC-BC=0$　（定理Ⅰ）

$AC-BC=0$　と　$C(A-B)=0$は同じ主張である。

$C(A-B)=0 \Leftrightarrow (C=0\vee A-B=0)$　（定理Ⅲ）

$(C=0\vee A-B=0) \Leftrightarrow (C=0\ \vee A=B)$（定理Ⅰ）

$\therefore\ AC=BC \Leftrightarrow (A=B\vee C=0)$

問2. 系2を証明しなさい。また，定理Ⅱは定理Ⅰ，Ⅲを用いて証明出来ることを示せ。

問3. 系2において，Aを$x-5$，Bを$\sqrt{x+1}$と考える。$x=3$が$A=-B$の解になっていることをたしかめなさい。

問4. $(x-2)(x+4)=3(x-2)$　から　$x+4=3$　を導く変形が不適当であることを，系1を参考にして説明しなさい。

問5. §2で与えられた，方程式 (1) (2) の解答には，出て来た解が検討されず，方程式 (4) の解答ではそれがなされたが，その理由はどこにあるか。

（研究）

§3における定理や系は，方程式が複素数やその部分集合で考えている時には成功したが，どのような範囲で考えても成立するとは言えないことを見よう。

集合Mを6による剰余系{0，1，2，3，4，5}とする。以下に書かれた数や文字はMの要素であるとする。$(x+1)(x+2)=0$　の解集合は，Mのすべての要素を代入してみると{1，2，4，5}であり，$x+1=0\vee x+2=0$　の解集合は{4，5}である。このことから，定理Ⅲは成立しない。次に，mを3，Aを$x+2$，Bを$2x$　と考えると$A=B$は$x+2=2x$であり，$mA=mB$は，$3(x+2)=3\times 2x$で，整理すると$3(x+2)=0$となるが，$x+2=2x$　の解集合は{2}で，$3(x+2)=0$　の解集合は{0，2，4}であるから，定理Ⅱも成立しない。

この様な例を見て，方程式を解く時に許される変形は，文字を含んだ等式（方程式）の性質によって一般的に決定されるのではなく，その方程式に現われる数や文字が，どんな性質を持った集合の要素なのかによって決定することが分る。複素数を学んだとき，$0\times(a+bi)=0$なること，$(a+bi)(c+di)=0$ならば$a+bi=0$または$c+di=0$なることを証

明したりしたのは，複素数の範囲で方程式を解くとき，定理Ⅲ等を用いてもよいことを証明する為でもあったのである。

問 6.　6による剰余系や，8による剰余系で，系 1.　系 2 が成立しない方程式の例を作れ。

（研究）

定理や系のA，B，Cがどのような形をした式であるか，ということに関係して，その式中に現われる文字の動き得る範囲が限定されることがある。このような場合，考える範囲を明確にしておかないと，一見　定理が成立しないかのように見えることがある。たとえば

Aを $2x$，Bを $x+1$，Cを $\dfrac{1}{x-1}$ とすると

$A=B$　すなわち　$2x=x+1$　の解集合は $\{1\}$

$A+C=B+C$　すなわち　$2x+\dfrac{1}{x-1}=x+1+\dfrac{1}{x-1}$ の解集合は ϕ

$AC=BC$　すなわち　$\dfrac{2x}{x-1}=\dfrac{x+1}{x-1}$ の解集合は ϕ

となって，定理Ⅰ，系Ⅰが成立しないように思えるが，$\dfrac{1}{x-1}$ を考えるときは当然 $x\fallingdotseq 1$ なる範囲で考えねばならないから，$A=B$ の解集合も ϕ となる。このように，A，B，Cが共に定義されている範囲で考えれば，定理は成立するのである。

§4　定理をふまえた１元方程式の解法

§1で与えられた方程式 (1) (2) (4) についての答案を次のように作ってみた。

(1)　$\frac{1}{2}x+1=2x-5$

$\overset{\mathrm{II}}{\Leftrightarrow}$ $x+2=4x-10$

$\overset{\mathrm{I}}{\Leftrightarrow}$ $-3x=-12$

$\overset{\mathrm{II}}{\Leftrightarrow}$ $x=4$

(2)　$(x-2)(x+4)=3(x-2)$

$\overset{\mathrm{I}}{\Leftrightarrow}$ $(x-2)(x+1)=0$

$\overset{\mathrm{III}}{\Leftrightarrow}$ $x-2=0\vee x+1=0$

$\overset{\mathrm{I}}{\Leftrightarrow}$ $x=2$　（$x+1\fallingdotseq 0$ より）

(4)　$x-5=\sqrt{x+1}$

$\overset{系2}{\Rightarrow}$ $x^2-10x+25=x+1$

$\overset{\mathrm{I}}{\Leftrightarrow}$ $(x-8)(x-3)=0$

$\overset{\mathrm{III}}{\Leftrightarrow}$ $x-8=0\vee x-3=0$

$\overset{\mathrm{I}}{\Leftrightarrow}$ $x=8\vee x=3$

$x=3$ を与式に打入すると不成立

$x=8$ を与式に代入すると成立

$\therefore$　$x-5=\sqrt{x+1}\Leftrightarrow x=8$

(1) (2) の解答の矢印を見れば，各答案にかかれたすべての方程式は，それぞれ同じ解集合を持っていることが分る。ところが，(4) における矢印の１つが，一方だけに向いているため $\Rightarrow$ の前にある方程式が後にあるすべての方程式の部分集合であることしか分らない為，出て来た解が，$\Rightarrow$ の前にある方程式の解になっているかどうかを調べる必要があること，すなわち (1) (2)　については解の検討が不要で，(4) の解の検討は論理的に不可欠なのである。

問 1.　次の方程式を定理をふまえて解きなさい。

(1)　$\dfrac{x}{3}+1=2x+\dfrac{1}{2}$　　(2)　$x^2+3x=4$　　(3)　$\dfrac{x}{2}+1=\sqrt{2x+1}$

§5　2元方程式の解とそのグラフ

方程式 (3) (5) の解答は次の通りである。

(3)

$$\begin{cases} 3x+2y=-1 & \cdots (3, 1) \\ 2x+3y=-4 & \cdots (3, 2) \end{cases}$$

(3 , 1)×2－(3 , 2)×3より

$$6x+4y=-2 \quad \cdots (3, 3)$$

$$-)\ 6x+9y=-12 \quad \cdots (3, 4)$$

$$-5y=10 \quad \cdots (3, 5)$$

$$y=-2 \quad \cdots (3, 6)$$

(3 , 6)を(3 , 1)に代入して

$$3x-4=-1 \quad \cdots (3, 7)$$

$$3x=3 \quad \cdots (3, 8)$$

$$x=1 \quad \cdots (3, 9)$$

以上から $\begin{cases} x=1 \\ y=-2 \end{cases}$

(5)

$$\begin{cases} x+y=7 & (5, 1) \\ x^2+y^2=25 & (5, 2) \end{cases}$$

(5 , 1)より $y=7-x$　(5 , 3)

これを(5 , 2)に代入して

$$x^2+(7-x)^2=25 \quad (5, 4)$$

$$2x^2-14x+24=0 \quad (5, 5)$$

$$x^2-7x+12=0 \quad (5, 6)$$

$$x-3=0 \vee x-4=0 \quad (5, 7)$$

$$x=3 \vee x=4 \quad (5, 8)$$

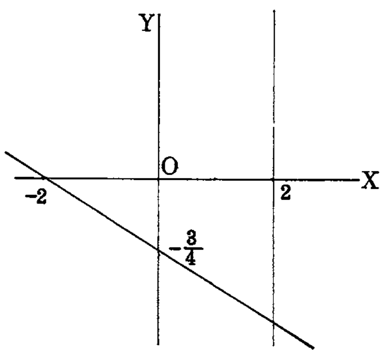
$x=3$を(5 , 3)に代入して

$$y=4 \quad (5, 9)$$

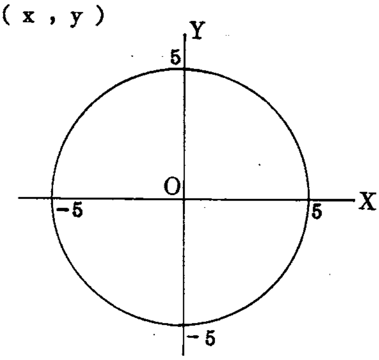
$x=4$を(5 , 3)に代入して

$$y=3 \quad (5, 10)$$

以上から $\begin{cases} x=3 \\ y=4 \end{cases} \vee \begin{cases} x=4 \\ y=3 \end{cases}$



2元方程式の同値関係を見抜くための準備として，方程式を実数の範囲で解くとして，解集合を座標平面上にかいてみよう。左図は，$x=2$と$2x+3y=-4$の解集合である。特に注意を要するのは，$x=2$で，この解集合の要素の個数は1個ではなく無限個あるということである。次に$x^2+y^2=25$の解集合を図示してみよう。x^2+y^2は原点から(x , y)までの距離の平方であり，これが25と等しいということは，点(x , y)と原点との距離が5であるということと同じことであるから，解集合は原点中心，半径5の円周であることがわかる。



$X^2+Y^2=25$ の解集合

§6　方程式の同値関係（その2）

$2x+3y=-4$の解集合を図示したが，このとき

$$2x+3y=-4 \qquad (1)$$

$$3y=-2x-4 \qquad (2)$$

$$y=-\frac{2}{3}x-\frac{4}{3} \qquad (3)$$

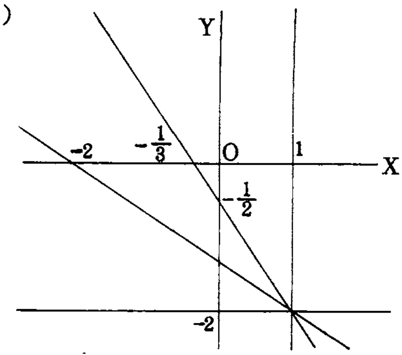
と変形して描いたであろう。ところが，(1) を (2) (3) と変形すると解集合が変ってしまわないかという心配も当然しなければならないはずである。しかし，この心配は定理Ⅰと定理Ⅱを頭におけば，不要であることが分るであろう。この見方で方程式 (3) の解答に現われる方程式を分類してみよう。

(3 , 1) ⇔ (3 , 3)　(定理Ⅱ)

(3 , 2) ⇔ (3 , 4)　(定理Ⅱ)

(3 , 5) ⇔ (3 , 6)　(定理Ⅱ)

(3 , 7) ⇔ (3 , 8) ⇔ (3 , 9)(定理Ⅰ, Ⅱ)であることから，残っている問題は，(3 , 3)(3 , 4)，(3 , 6)，(3 , 8) の間の関係がどうなっているであろうかということである。そこでこの4個の方程式のグラフをえがくと右図のようになるが，(3 , 6)や(3 , 9)の解集合と一致する方程式は，どこにもないのである。ということは (3) の解き方は正しくないのであろうか。結論を出す前に(5)の解答も検討してみよう。



(5 , 1) ⇔ (5 , 3)　(定理Ⅰ)

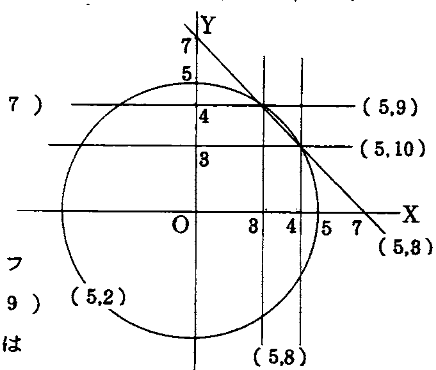
(5 , 2)

(5 , 4) ⇔ (5 , 5) ⇔ (5 , 6) ⇔ (5 , 7)

⇔ (5 , 8)　(定理Ⅰ, Ⅱ, Ⅲ, Ⅰ)

(5 , 9)

(5 , 10)



によって，5種類の方程式に分類され，その各々のグラフを描くと右図のようになるが，やはり(5 , 8)(5 , 9)(5 , 10)の解集合と(5 , 3)(5 , 2)の解集合とは一致しないのである。このことをどう考えたらよいのであろうか。

連立方程式の解は「2個以上の方程式を同時に満たすもの」であることを考えに入れると，(3) の解集合は(3 , 1)と(3 , 2)を同時に満たすもの，則ち(3 , 1)と(3 , 2)の解集合の共通部分なのである。これが(3 , 6)の解集合と一致するはずはなく，(3 , 6)と(3 , 1)または(3 , 6)と(3 , 2)を同時に満たすものが (3) の解集合なのである。解答では(3 , 6)を(3 , 1)に代入していることから

$$\begin{cases}(3,1)\\(3,2)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(3,1)\\(3,6)\end{cases} \qquad (\mathrm{A})$$

を主張していると見ることが出来る。さらにその後(3 , 9)と(3 , 6)を組にしていることから

$$\begin{cases}(3,1)\\(3,6)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(3,9)\\(3,6)\end{cases} \qquad (\mathrm{B})$$

と考えていると思われる。この主張を一般的に式でかくとどうなるであろうか，今かりに (A) を定理Ⅳ，(B)を定理Ⅴとしておこう。(3) の解答を同値関係をふまえて正確に書いてみると次のようになるであろう。

(3) の同値関係をふまえた解答

$$\begin{cases}3x+2y=-1\\2x+3y=-4\end{cases}$$

$$\overset{\mathrm{II}}{\Leftrightarrow}\begin{cases}6x+4y=-2\\2x+3y=-4\end{cases}$$

$$\overset{\mathrm{II}}{\Leftrightarrow}\begin{cases}6x+4y=-2\\6x+9y=-12\end{cases}$$

$$\overset{\mathrm{IV}}{\Leftrightarrow}\begin{cases}6x+4y=-2\\\quad\ \ -5y=\ \ 10\end{cases}$$

(5) の同値関係をふまえた解答

$$\begin{cases}x+y=7\\x^2+y^2=25\end{cases}$$

$$\overset{\mathrm{I}}{\Leftrightarrow}\begin{cases}y=7-x\\x^2+y^2=25\end{cases}$$

$$\overset{\mathrm{V}}{\Leftrightarrow}\begin{cases}y=7-x\\x^2+(7-x)^2=25\end{cases}$$

$$\overset{\mathrm{I}}{\Leftrightarrow}\begin{cases}y=7-x\\2x^2-14x+24=0\end{cases}$$

$$\overset{\text{II}}{\Leftrightarrow}\begin{cases}6x+4y=-2\\ y=-2\end{cases}$$

$$\overset{\text{V}}{\Leftrightarrow}\begin{cases}6x+4\times(-2)=-2\\ y=-2\end{cases}$$

$$\overset{\text{I}}{\Leftrightarrow}\begin{cases}6x=6\\ y=-2\end{cases}$$

$$\overset{\text{II}}{\Leftrightarrow}\begin{cases}x=1\\ y=-2\end{cases}$$

$$\overset{\text{II}}{\Leftrightarrow}\begin{cases}y=7-x\\ (x-3)(x-4)=0\end{cases}$$

$$\overset{\text{III}}{\Leftrightarrow}\begin{cases}y=7-x\\ x-3=0\end{cases}\vee\begin{cases}y=7-x\\ x-4=0\end{cases}$$

$$\overset{\text{I}}{\Leftrightarrow}\begin{cases}y=7-x\\ x=3\end{cases}\vee\begin{cases}y=7-x\\ x=4\end{cases}$$

$$\overset{\text{V}}{\Leftrightarrow}\begin{cases}y=4\\ x=3\end{cases}\vee\begin{cases}y=3\\ x=4\end{cases}$$

ここで用いた定理Ⅳ　定理Ⅴを一般的にかくと次のようになる。

> 定理Ⅳ　$\begin{cases}A=B\\ C=D\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}A=B\\ A+C=B+D\end{cases}\left(\Leftrightarrow\begin{cases}C=D\\ A+C=B+D\end{cases}\right)$
>
> 定理Ⅴ　$\begin{cases}y=A(x)\\ B(x,y)=C(x,y)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=A(x)\\ B(x,A(x))=C(x,A(x))\end{cases}$

定理Ⅴにおける$B(x,y)$，$C(x,y)$，$A(x)$　等の記号は，これらがx，y等の文字を含んだ式であること，$B(x,A(x))$，$C(x,A(x))$は$B(x,y)$，$C(x,y)$ のyに$A(x)$ を代入してできる式であることを意味している。定理Ⅳが成立することは明らかであり，

$$\begin{cases}y=A(x)\\ B(x,y)=C(x,y)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=A(x)\\ B(x,A(x))=C(x,A(x))\end{cases}$$

なることも，$y=A(x)$ならば，$B(x,y)=C(x,y)\Leftrightarrow B(x,A(x)=C(x,A(x))$ が成立することから分るであろう。定理Ⅴで特に注意したいことは

$$\begin{cases}y=A(x)\\ B(x,y)=C(x,y)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}B(x,A(x))=C(x,A(x))\\ B(x,y)=C(x,y)\end{cases}$$

は成立するが，その逆は成立しないとこうことである。$A(x)$を$7-x$，$B(x,y)$をx^2+y^2　$C(x,y)$を25と考えると，

$$\begin{cases}B(x,A(x))=C(x,A(x))\\ B(x,y)=C(x,y)\end{cases}\text{は}\begin{cases}x^2+(7-x)^2=25\\ x^2+y^2=25\end{cases}$$

$$\begin{cases}y=A(x)\\ B(x,y)=C(x,y)\end{cases}\text{は}\begin{cases}y=7-x\\ x^2+y^2=25\end{cases}$$

となる，$x=3$　$y=-4$　をこれらの方程式に代入すると，前者は成立するが，後の方程式は成立しないことが分る。従って，(5) の解答で$(5,8)$を$(5,2)$に代入してyを求めると，与えられた方程式の解以外のものが出てくる可能性が生ずるのである。

問 1.　次のページに同値関係をふまえた 1 つの方程式の解答が書いてある。どの定理を使って変形しているかを各行について指摘しなさい。

問 2.　次のページに 1 つの方程式の普通の書き方での解答がかかれている。これをどの定理を用いたかを明示しながら同値関係をふまえた解答になおしなさい。

問 3.　次の方程式を，どの定理を用いたかを明示しながら，同値関係をふまえて解きなさい。

(1) $\begin{cases}x+3y=7\\ 2x-y=3\end{cases}$　(2) $\begin{cases}2x-y=4\\ x^2+4y^2=169\end{cases}$　(3) $\begin{cases}x+y=3\\ 2y-z=5\\ x^2+y^2+z^2=6\end{cases}$

問 1 のための答案

$$\begin{cases} (x-3y)(x+y)=0 \\ x^2+xy+y^2=13 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-3y=0 \\ x^2+xy+y^2=13 \end{cases} \lor \begin{cases} x+y=0 \\ x^2+xy+y^2=13 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=3y \\ x^2+xy+y^2=13 \end{cases} \lor \begin{cases} x=-9 \\ x^2+xy+y^2=13 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=3y \\ 13y^2=13 \end{cases} \lor \begin{cases} x=-y \\ y^2=13 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=3y \\ y^2=1 \end{cases} \lor \begin{cases} x=-y \\ y^2=13 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=3y \\ (y-1)(y+1)=0 \end{cases} \lor \begin{cases} x=-y \\ (y-\sqrt{13})(y+\sqrt{13})=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=3y \\ y-1=0 \end{cases} \lor \begin{cases} x=3y \\ y+1=0 \end{cases} \lor \begin{cases} x=-y \\ y-\sqrt{13}=0 \end{cases} \lor \begin{cases} x=-y \\ y+\sqrt{13}=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=3y \\ y=1 \end{cases} \lor \begin{cases} x=3y \\ y=-1 \end{cases} \lor \begin{cases} x=-y \\ y=\sqrt{13} \end{cases} \lor \begin{cases} x=-y \\ y=-\sqrt{13} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=1 \end{cases} \lor \begin{cases} x=-3 \\ y=-1 \end{cases} \lor \begin{cases} x=-\sqrt{13} \\ y=\sqrt{13} \end{cases} \lor \begin{cases} x=\sqrt{13} \\ y=-\sqrt{13} \end{cases}$$

問 2 のための答案

$3x+2y=2 \quad \cdots\cdots \quad (1)$

$x^2+y^2=1 \quad \cdots\cdots \quad (2)$

(1) より $2y=-3x+2$

$\therefore y=-\frac{3}{2}x+1 \quad \cdots\cdots\cdots \quad (3)$

これを (2) に代入して

$x^2+(-\frac{3}{2}x+1)^2=1 \cdots \quad (4)$

(4) を整理して　$x(x-\frac{12}{13})=0$

$\therefore \quad x=0 \qquad x=\frac{12}{13}=0$

$\therefore \quad x=0 \qquad x=\frac{12}{13}$

これらを (3) に代入して

$y=1 \qquad y=-\frac{5}{13}$

よって $\begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases} \quad \begin{cases} x=\frac{12}{13} \\ y=-\frac{5}{13} \end{cases}$

§7　今迄作って来た答案の価値について

同値関係をふまえた解答は方程式の解法の原理がはっきり表現されていて理論的にはよく分るが，同じ方程式を何度もかかねばならず，かなり大変である。今迄作って来た答案では同値関係がはっきりしないのであろうか。それを見る為に，2つの解答を対比してみよう。

同値関係をふまえた解答

$$\begin{cases} x+y=7 \\ x^2+y^2=25 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=7-x \\ \boxed{x^2+y^2=25} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \boxed{y=7-x} \\ x^2+(7-x)^2=25 \end{cases}$$

今迄作って来た解答

$$\begin{cases} x+y=7 & \cdots\cdots \ (1) \\ x^2+y^2=25 & \cdots\cdots \ (2) \end{cases}$$

(1)　より　$y=7-x \quad \cdots\cdots \quad (3)$

(3) を (2) に代入して

$x^2+(7-x)^2=25$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \boxed{y=7-x} \\ 2x^2-14x+24=0 \end{cases}$$

$\therefore 2x^2-14x+24=0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \boxed{y=7-x} \\ (x-3)(x-4)=0 \end{cases}$$

$\therefore (x-3)(x-4)=0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \boxed{y=7-x} \\ x-3=0 \end{cases} \vee \begin{cases} \boxed{y=7-x} \\ x-4=0 \end{cases}$$

$\therefore \quad x-3=0 \quad x-4=0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \boxed{y=7-x} \\ x=3 \end{cases} \vee \begin{cases} \boxed{y=7-x} \\ x=4 \end{cases}$$

$\therefore \quad x=3 \qquad x=4$

これらを (3) に代入して

$y=4 \qquad y=3$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=4 \\ x=3 \end{cases} \vee \begin{cases} y=3 \\ x=4 \end{cases}$$

よって $\begin{cases} x=3 \\ y=4 \end{cases} \quad \begin{cases} x=4 \\ y=3 \end{cases}$

左側の答案にかかれた方程式のうち，右側にかかれなかったものを $\boxed{}$ で囲ってある。右側の答案だけから左側にかかれた $\boxed{}$ で囲まれた方程式を見破ることはできないであろうか。すばらしいことに，右側の答案にどんな方程式が略されているかが，はっきり表現されているのである。「 (3) を (2) に代入して」という言葉で (3) は (2) と組にして考えていること，「これらを (3) に代入して」という言葉で $x^2+(7-x)^2=25$ という式から，$x=3$ または $x=4$ という式まではすべて (3) と組にして考えていることを表わしているのである。これらの言葉は単にどう計算したのかを説明しているばかりではなく，以上に述べたように，理論的にもどうしても必要な記述なのである。今迄，この2種類の答案を「同値関係をふまえた解答」「今迄作って来た普通の解答」と呼んだりして，今迄作って来た解答が，同値関係をふまえていないかのような印象を与えて来たかも知れないが，以上の説明でそうでないことがはっきりしたであろう。今後は「記号のみでかかれた答案」「言葉の入った答案」と呼ぼう。

§8　等式の証明への応用

$x^2=b+c$ ………(1)　　$y^2=c+a$ ………(2)　　$z^2=a+b$ ………(3)

$x=y+z$ ………(4)　　のとき　$bc+ca+ab=0$　を証明せよ。

（証明） (1) (2) (3) の両辺を加え合せて

$x^2+y^2+z^2=2(a+b+c)$ ………… (5)

$\therefore \frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)=a+b+c$ ………… (6)

(6) − (1) より　$a=\frac{1}{2}(-x^2+y^2+z^2)$ ‥ (7)

(6) − (2) より　$b=\frac{1}{2}(x^2-y^2+z^2)$ …… (8)

(6) − (3) より　$c=\frac{1}{2}(x^2+y^2-z^2)$ ……(9)

(4) を (7) に代入して　$a=-yz$ ………… (10)

(4) より　$y=x-z$ ………… (11)

(11) を (8) に代入して　$b=xz$ ………… (12)

(4) より　$z=x-y$ ………… (13)

(13) を (9) に代入して　$c=xy$ ………… (14)

$\therefore$ $bc+ca+ab=xyz(x-y-z)$ ……… (15)

(4) より $x-y-z=0$ ………… (16)

$$\therefore\ bc+ca+ab=0 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (17)$$

この答案で，どのような等式変形がなされ，同値に関する定理がどう使われているかを検討して見よう。(9) 迄の段階では (4) を用いていないので，ここまでは (4) を省いて考えよう。(5) は定理をどのように用いて作られたものであろうか。定理Ⅳを用いていることは誰でも察することが出来よう。

$$\begin{cases}(1)\\(2)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+y^2=a+b+2c\\(2)\end{cases}\qquad\begin{cases}x^2+y^2=a+b+2c\\(3)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(5)\\(3)\end{cases}$$

なることから

$$\begin{cases}(1)\\(2)\\(3)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+y^2=a+b+2c\\(2)\\(3)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(5)\\(2)\\(3)\end{cases}$$

となるが，その後 (1) (2) (3) すべてを使っていることを考えると (1) (2) (3) を組にしたものから，(1) (2) (3) (5) を組にしたものを作っていると見なければならないであろう。このように (1) (2) (3) から (5) を出せるときは (1) (2) (3) を組にしたものと，それに (5) を追加したものとは同値になり得るのである。定理Ⅱより (5) $\Leftrightarrow$ (6) だから

$$\begin{cases}(1)\\(2)\\(3)\end{cases}\underset{\text{Ⅳ}}{\Leftrightarrow}\begin{cases}(1)\\(2)\\(3)\\(5)\end{cases}\underset{\text{Ⅱ}}{\Leftrightarrow}\begin{cases}(1)\\(2)\\(3)\\(6)\end{cases}\underset{\text{ⅡとⅣ}}{\Leftrightarrow}\begin{cases}(7)\\(2)\\(3)\\(6)\end{cases}\underset{\text{ⅡとⅣ}}{\Leftrightarrow}\begin{cases}(7)\\(8)\\(3)\\(6)\end{cases}\underset{\text{ⅡとⅣ}}{\Leftrightarrow}\begin{cases}(7)\\(8)\\(9)\\(6)\end{cases}$$

となる。さらに (7) (8) (9) の両辺を加えると，(6) が出るから，(7) (8) (9) (6) を組にしたものと，(7) (8) (9) を組にしたものは同値であり，従って (1) (2) (3) を組にしたものと (7) (8) (9) を組にしたものとは同値になる。次に

$$\begin{cases}(1)\\(2)\\(3)\\(4)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(7)\\(8)\\(9)\\(4)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(10)\\(8)\\(9)\\(4)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(10)\\(8)\\(9)\\(11)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(10)\\(12)\\(9)\\(11)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(10)\\(12)\\(9)\\(13)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(10)\\(12)\\(14)\\(13)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(10)\\(12)\\(14)\\(16)\end{cases}$$

となることが主張され，最後の式を $bc+ca+ab$ に代入して結果が得られているのである。

問 1. 上の同値関係は，どの定理を用いて得られるかを考えなさい。

§9 不等式の同値関係

次に連立 1 元 1 次不等式が解かれている。この答案を検討することによって，不等式に関する同値変形を抽出しよう。

$$\begin{cases}3x+1<x+3\\[4pt] 2x>\dfrac{5x+2}{3}+\dfrac{3x+1}{2}\end{cases}\quad \text{を解け}$$

（解）$3x+1<x+3 \quad \cdots\cdots\cdots \ (1)$

$2x<2 \quad \cdots\cdots\cdots \ (2)$

$x<1 \quad \cdots\cdots\cdots \ (3)$

$2x>\dfrac{5x+2}{3}+\dfrac{3x+1}{2} \quad \cdots\cdots\cdots \ (4)$

$12x>10x+4+9x+3 \quad \cdots\cdots\cdots \ (5)$

$-7x>7 \quad \cdots\cdots\cdots \ (6)$

$$x<1 \qquad (7)$$

(3) (7) より　$x<-1$　……… (8)

(1) から (2) は両辺に $-x-1$ を加えて出来たと見ることが出来る。すなわち

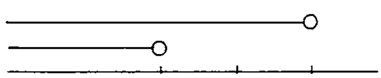
定理Ⅰ　$A>B \Leftrightarrow A+C>B+C$

(2) から (3) は両辺に $\frac{1}{2}$ をかけたと考えられる。これと同じ変形が (4) から (5)，(6) から (7) に現われているが，(4) から (5) では両辺に 6 を，(6) から (7) は両辺に $-\frac{1}{7}$ をかけている。負の数をかけたとき不等号の向きを変えていることから，次の定理が成立するといえよう。

定理Ⅱ　$m>0 \Rightarrow (A>B \Leftrightarrow mA>mB)$

定理Ⅱ′　$m<0 \Rightarrow (A>B \Leftrightarrow mA<mB)$

(5) から (6) は定理Ⅰを用いているが，(3) と (7) から (8) を出したのは，左図のように数直線で考えて求めたとすると分りやすいが，次の定理を用いているとも言える



定理Ⅲ　$m>n \Rightarrow \{(x<m \wedge x<n) \Leftrightarrow x<n\}$

記号「∧」は「かつ」と読み，「$x<m \wedge x<n$」は，$x<m$ も $x<n$ も共に成立する，という意味である。

次に，2次不等式の解法を検討してみよう。

$x^2>3x+4$　を解け

(解)　$x^2>3x+4$　………… (1)

$(x-4)(x+1)>0$ ………… (2)

∴　$x-4>0 \wedge x+1>0$　……… (3)

または　$x-4<0 \wedge x+1<0$ … (4)

∴　$x>4 \wedge x>-1$　………… (5)

または　$x<4 \wedge x<-1$ ……… (6)

よって　$x>4$　…… (7)

または　$x<-1$　…… (8)

(1) から (2) は定理Ⅰを使い (2) から (3) または (4) を出したのは，次の定理を用いている。

定理Ⅳ　$AB>0 \Leftrightarrow \{(A>0 \wedge B>0) \vee (A<0 \wedge B<0)\}$

(3) から (5)，(4) から (6) は定理Ⅰを用い，(5) から (7) は定理Ⅲとよく似た次の定理を，(6) から (8) は定理Ⅲを用いている。

定理Ⅲ′　$m>n \Rightarrow \{(x>m \wedge x>n) \Leftrightarrow x>m\}$

もし，今検討した不等式の不等号が逆であったとすると，解答は次のようになる。

$x^2<3x+4$　を解け	
(解)　$x^2<3x+4$ ……… (1)	∴　$x<4\wedge x>-1$ ……… (5)
$(x-4)(x+1)<0$ …… (2)	または　$x>4\wedge x<-1$ …… (6)
$x-4<0\wedge x+1>0$ …… (3)	よって　$-1<x<4$ …… (7)
または　$x-4>0\wedge x+1<0$ … (4)	

ここで，(1) から (2) は定理Ⅰを，(2) から (3) または (4) は，次の定理Ⅳ′ を，(3) から (5)，(4) から (6) は定理Ⅰを，(5) から (7) は，(7) が (5) の省略した書き方であることから，(6) は次の定理Ⅲ′ によって成立しないことが言える，ということによって説明される。

定理Ⅳ′　$AB<0 \Leftrightarrow \{(A>0\wedge B<0)\vee(A<0\wedge B>0)\}$
定理Ⅲ′　$m>n$　ならば　$x>m\wedge x<n$　を満たす x は存在しない

問 1.　次の不等式を，どの定理を用いたかを明示して解け

(1) $x^2-5x+6>0$　　(2) $1-x^2>3(1-x)$

問 2.　次の不等式を 2 つ以上の定理を同時に使わないで解け

(1) $x^2-5x+1>0$　　(2) $x^2-5x-4<0$　　(3) $2x^2-3x-3>0$

(4) $\begin{cases} x^2-3x+2>0 \\ 3x-4>x-6 \end{cases}$　　(5) $\begin{cases} 2x>x^2-4 \\ x>5x-12 \end{cases}$

§10　不等号についての公理

前節で，不等式を解くときに必要な定理を作って来たが，はたしてこれらは成立するのであろうか。直観的に正しそうに思えるので，これらの定理をすべて正しいと約束して進む，換言すれば，これらの定理をすべて公理として進んでもよいが，これらの検討を加えると，かなり重複していることが分るのである。たとえば，定理Ⅰを ⇔ の意味によって

$$(A>B \Rightarrow A+C>B+C)\wedge(A+C>B+C \Rightarrow A>B)$$

とかいてみると，前半の A を $A+C$ に，B を $B+C$ に，C を $-C$ におきかえると，後半の王張になることから，$A>B \Rightarrow A+C>B+C$　を約束するだけで，定理Ⅰが証明出来るのである。次に定理Ⅱを検討して見ても，$m>0$ のとき $\frac{1}{m}>0$ であるから，$m>0$ のとき $A>B \Rightarrow mA>mB$　を用いれば，$m>0$ の時　$mA>mB \Rightarrow A>B$　が証明出来る。

問 1.　$m>0 \Rightarrow (A>B \Rightarrow mA>mB)$　において，m，A，B を何におきかえれば，

$m>0 \Rightarrow (mA>mB \Rightarrow A>B)$　となるか。

定理Ⅲについては，$m>n$ のとき $(x<m\wedge x<n) \Rightarrow x<n$　は明白であるが，$x<n \Rightarrow (x<m\wedge x<n)$　なることは，$n<m$ と $x<n$ から $x<m$ が出せる，すなわち $(A>B\wedge B>C) \Rightarrow A>C$　を用いれば証明出来，定理Ⅲ′ もこのことを用いれば証明出来るのである。定理Ⅲ″ については，$m>n$ と $x>m$ から $x>n$ が言え，$x>n$ と $x<n$ が同時に成立することになってしまうことから，説明出来るのである。

このような検討が今迄十分になされ，現在では不等号についての約束(公理)は，次のものがえらばらるのが普通である。

不等号についての公理

Ⅰ　$A>B$, $A=B$, $A<B$　のいずれか1つだけが必ず成立する。

Ⅱ　$(A>B \wedge B>C) \Rightarrow A>C$

Ⅲ　$A>B \Rightarrow A+C>B+C$

Ⅳ　$C>0 \Rightarrow (A>B \Rightarrow AC>BC)$

問2. 教科書を見て，教科書では不等号についての約束はどんなものがえらばれているかを調べなさい。

第二章　数学で用いられる言葉と数式の文法

§1　記号の分類

日常，数学における問答や，答案の中に，時々不適切ではないかと思われる用語・記号の使い方が見受けられる。「2次方程式 ax^2+bx+c」とか「この方程式の解は $x=\phi$」等である。時によっては，$x^2-3x+2=0$ の解を表わすのに，$x=1$ または $x=2$　が正しいのか $x=1$ と $x=2$　が正しいのかについて論争したりする。教科書やその他の数学書でも，不適切ではないかと思われる記号の使い方がある。2つの命題P，Qの真偽が一致するという内容を　$P=Q$　と書いたりすることは，異論はあろうが，私には望ましくないことのように思える。「関数 $f(x)$」という言葉は，古くからの使い方が残っているのであろうが，「xに対応する要素が $f(x)$ であるような関数」という言葉の省略形として許されているのであろう。このような点について，より正確な感覚を養うために，用語・記号の検討をしよう。

数学に用いられる記号は，その働きによって何種類かに分類され得る。分類の為の観点は色々あろうが，ここではたとえば，$x+1$ は何かある1つの「物」を表わし，$x=1$ は「xと1が等しい」という1つの主張を表わしていると見て，この「物」「主張」という観点から，今迄学んで来た方程式や不等式の答案に出て来た記号を分類していこう。

問1. 第Ⅰ章§4と§6で与えられた記号のみで書かれた方程式の答案に出て来るすべての記号を，その働きが同じであると思われるグループに分け，その働きとはどんな働きであるかを説明しなさい。

分類の例

(1)　0，1，2，4，………

(2)　x，y

(3)　+，−

(4)　−1，−4等の−

(5)　$\frac{1}{2}$ 等の−

(6)　$\Rightarrow$，$\Leftrightarrow$，$\vee$，$\wedge$

(7)　=，>

(8)　=

(9)　x^2，y^2 等の2

(10)　$\sqrt{\quad}$

(11)　(　)　{　}

(12)　{

これらのグループをさらにまとめていく為に，他のグループの記号を用いてその内容が表現できるものや，一見異なっているがその意味が同じであると思われるもの，省略されている記号，等について考えてみる。まず (9) の x^2 は $x \times x$ の略と考えれば不要であり，⑿ は∧と同じ意味であるから不要であり，$\frac{1}{2}$ はこれで１つの記号で (2) に属するとも，$1 \div 2$ の意味で，(1) と (3) のグループの記号で表現出来るとも考えられる。-1 や -4 はそれぞれ１つの記号で (1) に属するとも，$-$ は１や４から別の１つの物 -1 や -4 を作ると考えて，$\sqrt{\ }$ と同じ種類の記号であると見ることもできる。(8) の≠は (7) の一種と考えてもよいと思うが，≠は「＝ではない」という意味だから，「＝」と「でない」という意味の記号「～」を合せたもので (7) と (6) のグループの記号で表わされると見ることにする。以上をまとめると，次のようになるが，これらには（　　）内に示された名称がついている。

(1)	(a)	0，1，2，4‥‥	(数　字)
	(b)	x，y	(文　字)
(2)	(a)	＋，－，×，÷	(演算記号)
	(b)	$\sqrt{\ }$，－，＋	(関数記号)
(3)		＝，＞	(特殊記号)
(4)	(a)	～	(論理記号)
	(b)	∨，∧，⇒，⇔	
(5)		（　　），｛　　｝	(括　弧)

これらの記号の働きは，次のように述べることができる。

(1)　数字；１つの定まった物を表わす記号
　　文字；定まっていないある物を表わす記号
　すなわち (1) の記号は１つの物を表わす記号である。
(2)　演算記号；２つの物から１つの物を作る記号
　　関数記号；１つの物から１つの物を作る記号
　まとめると，いくつかの物から１つの物を作る記号
(3)　特殊記号；２つの物から１つの主張を作る記号
(4)　論理記号；１つの主張から，１つの主張を作る記号（～）
　　　　　　２つの主張から，１つの主張を作る記号（∨，∧，⇒，⇔）
　まとめると，いくつかの主張から一つの主張を作る記号
(5) 括弧；それに囲まれた記号の列が，１つの物か１つの主張であることを示す記号

括弧の働きについては異論があろう。たとえば，計算の順序を定める記号，という言い方もあろうが，主張をその中に入れることもあるので，これは適切でないであろう。記号の列を読む（見る）順序を指定する記号，ということもできよう。

問 2. 次の記号は，どのグループに属するか台

(2)　$a \in A$ の $\in$　　(2)　$A \cap B = C$ の $\cap$　　(3) $f(a)$ の f

(4)　$g(x, y)$ の g　　(5)　$A \subset B$ の $\subset$　　(6) $a * b = 2a - b$ の $*$

(7)　$x^2 + (y-1)^2 = 0$　ならば $x = 0$ で $y = 1$　の「ならば」と「で」

(8)　$ab = 0$　のとき　$a = 0$ か $b = 0$　の　「のとき」と「か」

§2　意味を持つ記号の列を作る規則（数式の文法）

前節において，文法で言えば，単語の分類にあたる仕事をした。数字は名詞，文字は代名詞論理記号は文と文をつなぐ接続詞ともいえよう。この節では，どのような規則に従って並べられた記号の列なら物を表わしたり，主張を表わしたり出来るか，について調べる。

まず第1に，1つの記号だけで物や主張を表わしているものがないかと考えることによって

文法Ⅰ　1つの数字や文字は1つの物を表わす。

に気付く，次に2つの記号を並べて物や主張を表わしえないかを考えると，文字や数字の前に関数記号を並べた記号列は1つの物を表わしているが，1つの物を表わす記号列の前に関数記号をおけば，1つの物を表わすから

文法Ⅱ　物を表わす記号列の前に関数記号をおいた記号列は1つの物を表わす。

この他，2x等が1つの物を表わしているが，これは2×xの略であるから，3個の記号から出来ていると見るべきであろう。3個の記号で1つの物や主張を表わしているものはないかを考えることによって，次の規則が得られる。

文法Ⅲ　2つの物を表わす記号列の間に，演算記号をおいた記号列は1つの物を表わす。 文法Ⅳ　2つの物を表わす記号列の間に，特殊記号をおいた記号列は1つの主張を表わす。 文法Ⅴ　1つの主張を表わす記号列の前に ～ をおいた記号列は1つの主張を表わす。 文法Ⅵ　2つの主張を表わす記号列の間に ～ 以外の論理記号のいずれかをおいた記号列は1つの主張を表わす。

ある1つの記号列が，物や主張を正しく表現していることを示す為には，これらの文法のどれかを満たす記号列の列の中にその記号列を組み込むことが出来ることを示せばよいであろう。次に　$2x+3>x-1 \Leftrightarrow x>-4$　が主張であることを示そう。記号Tは，その列が物であること，Rは主張であることを示す記号である。

2	Ⅰ	T
x	Ⅰ	T
3	Ⅰ	T
1	Ⅰ	T
4	Ⅰ	T
$2\times x$	Ⅲ	T
$2\times x+3$	Ⅲ	T
$x-1$	Ⅲ	T
$2\times x+3>x-1$	Ⅳ	R
-4	Ⅱ	T
$x>-4$	Ⅳ	R
$2\times x+3>x-1 \quad \Leftrightarrow x>-4$	Ⅳ	R

問 1. 次の記号列は，物か主張のいずれかを表わしていることを示しなさい。

(1) $3x+4y-2$

(2) $x>1 \vee x<-2$

(3) ax^2+bx+c

(4) $p^2-4q<0 \Rightarrow x^2-px+q>0$

(5) $x+1\leqq 3x$

(6) $x^2-3=2x+5=1$

既に述べた文法の中に括弧についてのものがないことに気付いた人も多いと思う。括弧についての規則は絶対に不可欠であることは，次のような例を見ても理解出来るであろう。

＊ $a+b$ から $-(a+b)$ を作りたいとき，文法Ⅱを適用すると $-a+b$ になる。

＊ $a+b$ と c から $(a+b)\times c$ を作る為，文法Ⅲを適用すると $a+b\times c$ になる。

＊ $x>1\vee x>3$ と $x>3$ に文法Ⅵを適用して， $>1\vee x>3 \Rightarrow x>3$ を作ると，$(x>1\vee x>3)\Rightarrow x>3$ の意味か $x>1\vee(x>3 \Rightarrow x>3)$ の意味か分らない。

そこで，次のような括弧についての文法が必要とされるのである。

文法Ⅶ　いくつかの物や主張を表わす記号列から，文法Ⅱ ～ Ⅵを適用して1つの記号列を作るとき，用いるいくつかの記号列すべてを括弧でくくってから，文法Ⅱ～Ⅵを適用する。

（研究）

文法Ⅶも考慮して，次の記号列が主張であることを示してみよう。

$\sqrt{3+2x-x^2}+1>x+2 \Rightarrow (x>-1\wedge x<1)$

3	Ⅰ	T
2	Ⅰ	T
x	Ⅰ	T
1	Ⅰ	T
・$(2)\times(x)$	Ⅲ	T
・$(3)+((2)\times(x))$	Ⅲ	T
・$(x)\times(x)$	Ⅲ	T
・$((3)+((2)\times(x))+((x)\times(x))$	Ⅲ	T
・$\sqrt{}(((3)+((2)\times(x)))+((x)\times(x)))$	Ⅱ	T
・$(\sqrt{}(((3)+((2)\times(x)))+((x)\times(x)))$ $+(1)$	Ⅲ	T
・$(x)+(2)$	Ⅲ	T
・$((\sqrt{}(((3)+((2)\times(x)))+((x)\times(x))))$ $+(1))>((x)+(2))$	Ⅳ	R
・$-(1)$	Ⅱ	T
・$(x)>(-(1))$	Ⅳ	R
・$(x)<(1)$	Ⅳ	R
・$((x)>(-(1))\wedge((x)<(1))$	Ⅳ	R
・$(((\sqrt{}(((3)+((2)\times(x)))-((x)\times(x)))$ $)+(1))>((x)+(2)) \Rightarrow (((x)>(-(1)))$ $\wedge((x)<(1)))$	Ⅵ	R

勿論文法Ⅰを用いたとき以外は文法Ⅶも用いられている。括弧を用いることによって，前ページで※をつけて述べた問題点は解消されたが，見ての通り，大変な煩雑さである。これらの括弧を何とか省略して見やすいものとし，前述の隘路も打開出来るようにして行く為には適切な括弧の省略規則が必要である。もう一度前ページの最後の式をかいてみる。

$$(((\surd(((\overset{1}{(}3\overset{1}{)}+\overset{2}{(}\overset{1}{(}2\overset{1}{)}\times\overset{1}{(}x\overset{1}{)}\overset{2}{)})-\overset{2}{(}\overset{1}{(}x\overset{1}{)}\times\overset{1}{(}x\overset{1}{)}\overset{2}{)}))+\overset{1}{(}1\overset{1}{)})>(\overset{1}{(}x\overset{1}{)}$$

$$+\overset{1}{(}2\overset{1}{)})))\Rightarrow(((\overset{1}{(}x\overset{1}{)}>(-\overset{1}{(}1\overset{1}{)}))\wedge((\overset{1}{(}x\overset{1}{)}<\overset{1}{(}1\overset{1}{)})))$$

まず上記の1の番号のつけられた括弧は

> 1. 1つの記号から出来ている記号列を用いて文法Ⅱ ～ Ⅵを適用するときは括弧をつけない

という規則を作れば略すことができ，記号に優先順位をつければ，さらに略すことが出来る。たとえば，次の規則によって，番号2のついた括弧を略すことが出来る。

> 2. 記号×，÷は，記号＋，－より優先する。

以上の括弧を略して書くと次のようになる。

$$\overset{4}{(}\overset{3}{(}(\surd((3+2\times x)-x\times x))+1\overset{3}{)}>\overset{3}{(}x+2\overset{3}{)}\overset{4}{)}\Rightarrow(\overset{4}{(}x>\overset{3}{(}-1\overset{3}{)}\overset{4}{)}\wedge\overset{4}{(}x$$

$$<1\overset{4}{)})$$

かなりすっきりしたものになるが，さらに番号3，4のついた括弧は

> 3. 演算記号や関数記号は特殊記号に優先する。
> 4. 特殊記号は論理記号より優先する。

なる規則があれば，略しても誤解することがないであろう。

$$\overset{6}{(}\surd\overset{6}{(}\overset{5}{(}3+2\times x\overset{5}{)}-x\times x\overset{6}{)}\overset{6}{)}+1>x+2\ \Rightarrow(x>-1\wedge x<1)$$

さらに，関数記号√は，上の線を√の後においた物を表わす記号列全体に伸ばすことによって，√のかかる範囲を示すと同時に，√を含めてそれが1つの(　)でくくられた物を表わす記号列であることを表わすとすれば，6の番号の括弧は略され，5の番号のついた括弧は，次の規則で略すことが出来る。

> 5. 2通り以上の意味に読める場合でも，それらが等号で結び得る物を表わしている時には括弧を略すことが出来る。

記号×は誤解が起らないかぎり略すこと，$x\times x$はx^2と略記することなどから，ようやく今迄使っていた表現に一致させることが出来るのである。

括弧や演算記号ばかりではなく，省略したかき方は色々考えられる。たとえば，$x=y=3$

は文法を使ってはかけないが，これは $x=3 \wedge y=3$ の略であることや，$x \leqq 3$ は $x>3 \vee x=3$ のことであり，$A \Leftrightarrow B \Leftrightarrow C$ は $(A \Leftrightarrow B) \wedge (B \Leftrightarrow C)$ のことであろう。
$A \ni a,\ b$ と $x=1,\ 2$ はよく似た書き方であるが，一方は $A \ni a \wedge A \ni b$ のことであり，他方は $x=1 \vee x=2$ のことである。このように省略記法は色々あるが，ここでそれをすべて上げる訳にはいかない。その都度検討して，誤解のないようにしなければならない。

（研究）

記号の検討の途中，括弧という記号は他の記号と異種のもののようだ，という感じはしなかったであろうか。文法の中でも特別な存在であり，のちには出来るだけ略しようとするなど，鬼っ子的な扱いをうけている。あっさり，これらを使わないで表現したい内容をかくことは出来ないであろうか。

コンピューターを使って $a+b$ を計算したいとき，a のみを入れて加える命令を出しても加えられるはずもなく，a，b 共に入れて加える命令を出してはじめて計算させることが出来ることに注意すると，コンピューターでは $a+b$ ではなく，$ab+$ であるように思われる。この考え方を進めることによって，括弧を使わないで，物や主張を表現する方法が出来上っているのである。以下にこの方法を学ぶのであるが，感じをつかむ為に例を上げてみよう。

$(a+b)+c$ ——— $ab+c+$
$a+(b+c)$ ——— $abc++$
$ab+c$ ——— $ab\times c+$
$a(b+c)$ ——— $abc+\times$
$a=b+c$ ——— $abc+=$
$a+b=c$ ——— $ab+c=$
$a \fallingdotseq b \vee ab=0$ ——— $ab=\sim\ ab\times 0=\vee$
$\begin{cases} x+y=7 \\ x^2+y^2=25 \end{cases}$ $xy+7=xx\times yy\times+25=\wedge$

この書き方の文法を列記すると次のようになる。

Ⅰ，1つの文字（数字）は1つの物である。
Ⅱ，1つの物を表わす記号列の後に1つの関数記号を付加した記号列は物である。
Ⅲ，2つの物を表わす記号列をつづけてかき，その後に1つの演算記号を付加した記号列は1つの物を表わす。
Ⅳ，2つの物を表わす記号列をつづけてかき，その後に1つの特殊記号を付加した記号列は1つの主張を表わす。
Ⅴ，1つの主張を表わす記号列の後に ～ を付加した記号列は1つの主張である。
Ⅵ，2つの主張を表わす記号列をつづけてかき，そのうしろに1つの ～ 以外の論理記号を付加した記号列は1つの主張である。

記号列 $xx\times yy\times+\sqrt{\ }0=\sim x\,0=\sim y\,0=\sim\vee \Rightarrow$ が主張であることを示そう。

x	Ⅰ	T
y	Ⅰ	T
0	Ⅰ	T
xx×	Ⅲ	T
yy×	Ⅲ	T

x x × y y × +	Ⅲ	T
x x × y y × + √‾	Ⅱ	T
x x × y y × + √‾ 0 =	Ⅳ	R
x x × y y × + √‾ 0 = ～	Ⅴ	R
x 0 =	Ⅳ	R
x 0 = ～	Ⅴ	R
y 0 =	Ⅳ	R
y 0 = ～	Ⅴ	R
x 0 = ～ y 0 = ～ ∨	Ⅳ	R
x x × y y × √0 = ～ x 0 = ～ y 0 = ～ ∨ ⇒	Ⅳ	R

x 2個の後ろに×があるから，x x ×は x^2 で，y y ×も y^2 である。x^2，y^2 の後ろに＋があるから，＋迄で x^2+y^2 の意味であり，その後に√があるから $\sqrt{x^2+y^2}$ である。その後に 0 と＝があるから $\sqrt{x^2+y^2}=0$ となり，その後の～によって $\sqrt{x^2+y^2}\neq 0$ が作られる。
次に x 0 =は $x=0$ で，その後の ～ によって $x\neq 0$ となる。同じように，y 0 = ～ は，$y\neq 0$ の意味で，その後の∨によって $x\neq 0\vee y=0$ が作られ，最後の ⇒ によって，$\sqrt{x^2+y^2}\neq 0\;=\;(x\neq 0\vee y\neq 0)$ となる。即ちこれが与えられた記号列の通常の表現である。

以上のように，括弧は理論的には不要なのである。しかし，この記法に我々が不慣れなために，上の記号列は普通の記法になおさないと殆んどよめない。今後このような書き方はしないが，この記法の学習は，諸言語の文法を学ぶ時の態度や，コンピューターのプログラム作成に影響があると思う。

問 1. 次に　x 2 + √x = x 1 > ∧ x 2 = ⇒ が 1 つの主張であることが示されている。どの文法を用いているかを指摘しなさい。

x	1
2	x 1 >
x 2 +	x 2 + √x = x 1 > ∧
x 2 + √‾	x 2 =
x 2 + √x =	x 2 + √x = x 1 > ∧ x 2 = ⇒

問 2. 次の記号列が主張であることを示し，これを通常の形にかきかえなさい。

(1)　a b c + × a b × a c × + =

(2)　x 0 = ～ x y × 0 = ∧ y 0 = ⇒

問 3. 次の主張を括弧の不要な記法にかきかえなさい。

(1) $[\{2(x+3)+y=5\}\wedge(x^2+y^2=2)]\Rightarrow(x=-1)$

(2) $(x=3\Rightarrow y^2=7)\Rightarrow(x+y=5\wedge y\neq 0)$

問 4. 次の記号列は，物や主張を表わしているか，

(1)　a a a a a + + + + 5 a × =

(2)　a a + a + a + a + p b × = a b c = ∨

(3)　8 √√3 + 1 = x y + = ⇒

§3　言葉の記号化

教科書やその他の参考書に現われる問題やその解答の中には §1 で分類した記号のグループ以外にかなりの言葉が入っている。たとえば，「$ax^2+bx+c=0$ の 2 つの解を α,β とす

ると，$\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$, $\alpha\beta=\frac{c}{a}$」「$a>0$のときは，$ax^2+bx+c=0$が相違なる2実数解$\alpha<\beta$を持てば，$ax^2+bx+c>0$の解は$x<\alpha$，$\beta<x$」等である。ここにかかれた言葉はどのように考えたらよいのであろうか。実はこれらの内容も，記号のみを用いて表わすことが出来るのである。換言すれば，ある数学の物や主張は，たとえそれが言葉でかかれていようと，今迄学んで来た文法に従った記号列で表現出来るということである。上の例を記号のみ用いて書き表わしてみる。

$ax^2+bx+c=0$の2つの解がα，βであるということは，$ax^2+bx+c=0 \Leftrightarrow (x=\alpha\vee x=\beta)$ということであるから，

$\{ax^2+bx+c=0 \Leftrightarrow (x=\alpha\vee x=\beta)\} \Rightarrow (\alpha+\beta=-\frac{b}{a} \wedge \alpha\beta=\frac{c}{a})$となる

他方は，$a>0 \Rightarrow ([\{ax^2+bx+c=0 \Leftrightarrow (x=\alpha\vee x=\beta)\}\wedge(\alpha<\beta)] \Rightarrow \{ax^2+bx+c>0 \Leftrightarrow (x<\alpha\vee\beta<x)\})$ とかくことができるのである。ただ，その表わし方は1通りしかないとは言えない。たとえば，P，Q，Rを主張すると，$P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)$ ということと，$P\wedge Q \Rightarrow R$ ということとは同じことになるのであるが，その理由は次の章で検討する。言葉で表現される内容は主に論理記号の持つ意味の場合が多いが，時には特殊記号，演算記号の意味の場合もある。言葉で表わされると，その意味が曖昧になってしまう場合も多い。たとえば，「PのときQかR」という文章は，次の2様に解釈出来る。「$P \Rightarrow (Q\vee R)$」「$(P \Rightarrow Q)\vee R$」。このように，主張を文章で表現するときは，誤解を生じないように十分注意しなければならないし，また，文章で書かれた主張を記号のみで書いてみることも，大切なことである。次に，論理記号がどのような言葉で表わされるかを対比する。

$\sim$	でない，成立しない
$\vee$	または，か，少なくとも一方
$\wedge$	かつ，と，同時に成立
$\Rightarrow$	ならば，のとき，から，ば
$\Leftrightarrow$	同値である，必要十分である。同等である，のときにかぎる。

問1. 次の主張を記号のみを用いてかけ

(1) $a>0$，$b>0$のときは$a>b$と$a^2>b^2$は同値である。

(2) $a^2+b^2=ab$となるのは，$a=b=0$のときにかぎる。

(3) 負の数$-a$ の平方根は$\sqrt{a}\,i$と$-\sqrt{a}\,i$ である。

(4) a，b，c，d が正数で $\frac{a}{b}<\frac{c}{d}$ のとき $\frac{a}{b}<\frac{a+c}{b+d}<\frac{c}{d}$

(5) aはbとcの間にある。

(6) $a>b$，$a=b$，$a<b$ のどれか1つが必ず成立する。

(7) $a=0$ のとき，$ax^2+bx+c=0$の解は $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

(8) $x^2-3x+2=0$ の解の1つが2である。

(9) 複素数全体の集合cにおいては乗法の交換法則が成立する。

(10) $ax+by=0$ $cx+dy=0$ が，$x=0$，$y=0$以外の解を持つならば，$ad-bd=0$ である。

問2. 次の記号列は物や主張であるといえるか。

(1) $x\vee y$ (2) $2\wedge 3$ (3) $2 \Rightarrow x^2=4$ (4) $x\in A=B$

(5) $2=3$ (6) $(x=\pm 2)=(x^2=4)$ (7) $+2=|-2|$