東ドイツ上級中等学校の数学科指導計画

海外教育事情視察報告　その1

能　崎　克　己

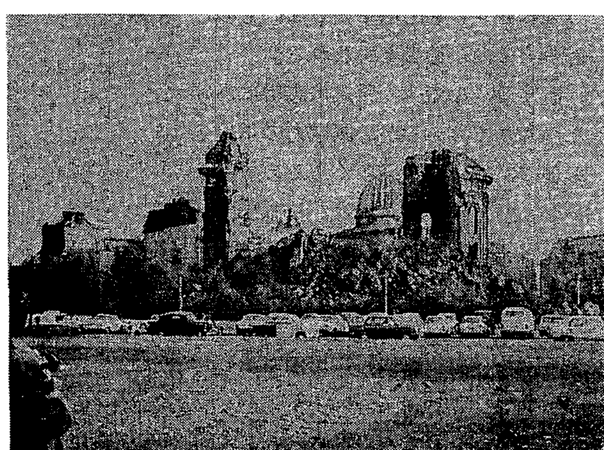
私は，昭和50年度国立大学教育学部附属学校教官海外教育事情視察計画による派遣者の一員として，10月16日から11月14日まで30日間にわたり，アメリカ，ヨーロッパを視察することができた。訪れた国名，都市名を列記すると，次の通りである。

アメリカ　（サンフランシスコ，バッファロー，ニューヨーク）
カナダ　（トロント）
スペイン　（マドリッド，トレド）
イギリス　（ロンドン，ウインザー）
西ドイツ　（西ベルリン）
東ドイツ　（ドレスデン，ケニッヒシュタイン，マイセン，モーリッツブルグ，東ベルリン）
フランス　（パリ，ベルサイユ）
イタリヤ　（ローマ，ポンペイ）

このうち，主視察国は，カナダ，東ドイツの2か国であり，カナダでは，トロント市において，

オンタリオ州教育委員会
Parkview Secondary School　（Toronto地区）
York Mills Collegiate Institute
Earl Heig Secondary School　} （North York地区）
L'Amoreaux Collegiate Institute　（Scarborough地区）

を訪れ，関係者から親切な説明を受け，施設，設備を見学し，授業を参観し，懇談することができ，大変有意義であった。また，東ドイツでは，ドレスデン市における学校視察が予定され，大きな期待をもっていたが，外交上の事務の手ちがいか，あるいはまた，政治形態のちがいなのか，定かではないが，結果的には，1校の参観すらできず，僅かに，約2時間にわたり，東ドイツ首都教員会館 Haus des Lehrers der Hauptstadt der DDR Berlin において教育関係者との懇談が行なわれたのみであった。教育事情視察としてはまことに遺憾なことであったが，滞在中見聞することのできたいろいろのことがらは，他の国では感じられなかった多くのものを得ることができた。なお，51年度のこの海外視察計画には東ドイツが含まれていないようであり，私たちは貴重な経験をしたと思っている。

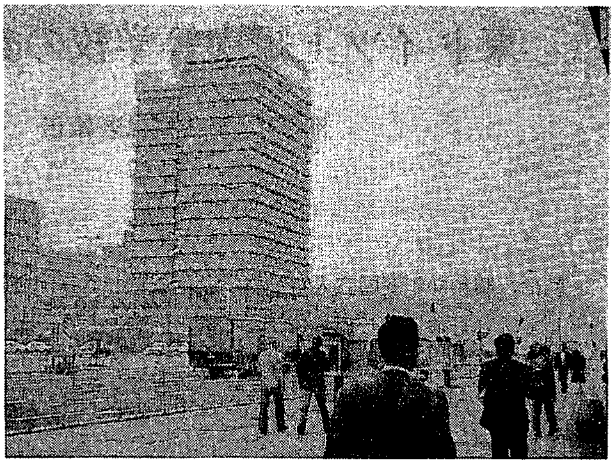


戦災を受けそのままのマルチンルッテル教会跡（ドレスデン）

この間の視察の状況については，すでに視察報告書が作成され，文部省はじめ関係方面へ提

出されているが，本稿では，同書にのせられていないものの一つとして，東ドイツの上級中等学校における数学科指導計画を紹介したいと思う。

ここに紹介する指導計画とは，Lehrplan für Mathematik といわれるものであるが，東ドイツ政府関係者から正式に配られたものではなく，自由時間中に私自身が書店で求めたものである。また，これは，性格は異なるが，日本流にいえば，「学習指導要領」に当るものと考えられる。なお，本稿の目的は，その全内容を紹介することにあるので，なるべくそのままに紹介することが主であり，その内容や取扱いなどについて論及することは目的ではないので念のためつけ加えておく。

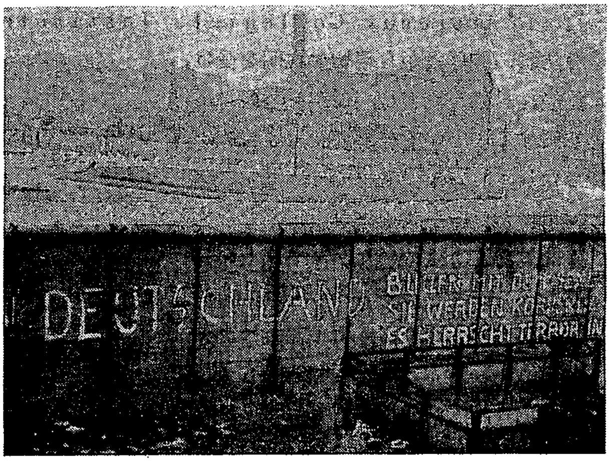


東ドイツ首都教員会館付近　（東ベルリン）

ここでとりあげた上級中等学校とは，Erweiterte Oberschuleの訳であり，直訳すれば，「拡張された高等学校」ということになるが，東ドイツの教育制度上，別に「高等学校」に当るものがあり，適訳ではないと思い，以下「上級中等学校」との名称で取扱うことにする。日本における相当学年は，高等学校の第２学年と第３学年であり，目下，わが国においても，教育課程の改訂について検討されている学年である。

指導計画には，「再生産可能な知識に属する」とか「属しない」という文章が随所に出てくるが，これは，生徒が自力で考えられる知識かどうかを示す基準的なものと考えられ，「属する」場合は記憶していなければならない内容を示すもの，「属しない」というのは必ずしも記憶を要しないものと諒解するのが適当と思われる。

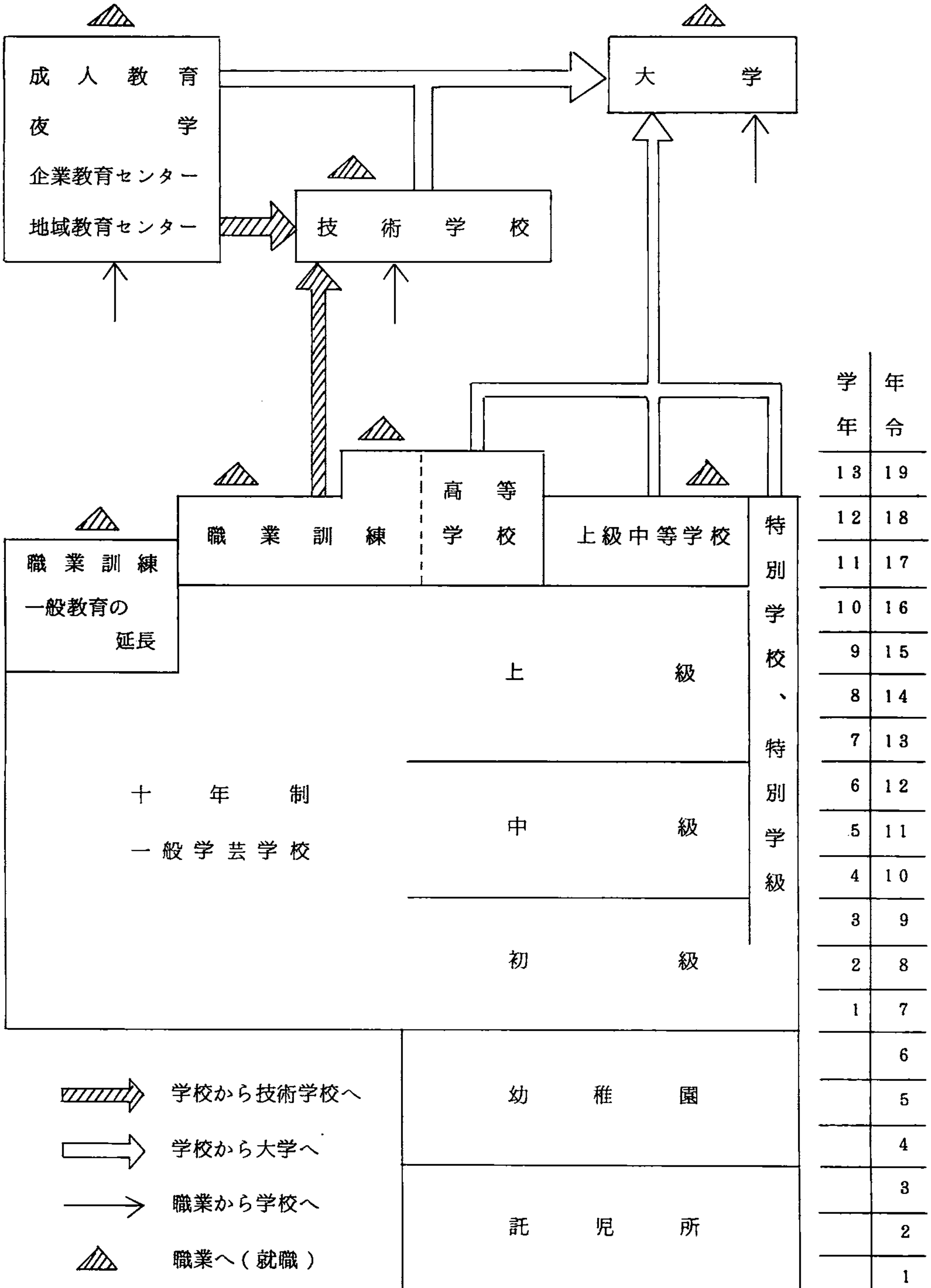
訳文は，なるべく原書に忠実にあげたつもりではあるが，語学力の不足その他のため，誤訳も多くあるのではないかと懸念される。また，日本での用語と必ずしも一致しないものもあり，そのため直訳用語を用いたところもある。原語を〔　〕内に付記したものもあるのでお許し願いたい。なお，翻訳にあたり，本校教官　樫本英彦氏にいろいろご教示をいただいた。ここに付記して謝意を表したい。



西ベルリンからみたベルリンの壁
EIN DEUTSCHLAND（ドイツは一つ）とかかれている

以下に，先ず全体の見通しのため，教育制度図，および，各学年の教科別週当り時間数一覧表をあげ，その後に，「数学科指導計画」を紹介する。なお，「指導計画」だけでは具体的な内容，程度の十分わからないところも多いので，必要に応じて，次号以下に教科書の概略をのせる予定である。

東ドイツにおける統一社会主義教育制度の図



各教科別週当り時間数一覧表

一般学芸学校　　1971 — 72年度より実施
上級中等学校

教科目 ＼ 学年	1 前	1 後	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
国語（ドイツ語）	11	10	12	14	14	7	6	5	5	3	4	3	3
ロシア語						6	5	3	3	3	3	3	3
数学	5	5	6	6	6	6	6	6	4	5	4	5	5
物理							3	2	2	3	3	3	3
天文											1		1
化学								2	4	2	2	2	3
生物						2	2	1	2	2	2	2	3
地理						2	2	2	2	1	2	2	
工作	1	1	1	1	2	2	2						
園芸		1	1	1	1	1							
学芸活動								4	4	5	5	4	4
社会主義生産入門								(1)	(1)	(2)	(2)		
生産活動								(2)	(2)	(3)	(3)	(4)	(4)
工業製図								(1)	(1)				
歴史						1	2	2	2	2	2	3	
公民								1	1	1	2	1	2
図画	1	1	1	1	2	1	1	1	1	1		選択必修	
音楽	1	1	1	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1
体育	2	2	2	2	3	3	3	2	2	2	2	2	2
第2外国語												2	3
週当り時数	21	21	24	27	29	32	33	32	33	31	33	33	33
選択													
第2外国語								3	3	3	3		
裁縫					1	1	1						
労働協同体												3	3
計	21	21	24	27	30	33	34	35	36	34	36	36	36

原則として，１学年は３０週

ドイツ民主主義共和国政府，国民教育省　編

数学科　指導計画

上級中等学校，第11学年，第12学年　　（1972年版）

第11学年　　1969年9月1日より

第12学年　　1970年9月1日より　施行

1968年6月　ベルリンにて　　国民教育長官名で告示

1. 目標と課題

統一社会主義教育制度に関する法律によって，上級中等学校は，第10学年までに得られた生徒の知識，理解，能力を確実なものとし，また，それを高める任務がある。生徒は，上級中等学校での授業を通じて，高等教育を受け，また，社会主義社会における将来の責任ある職務および集団行動について学ぶ。生徒は，高度の科学的水準と社会主義的人格に達するため，しっかりした一般教育を受けることが要求される。すべての教育分野は，この目標達成のため，独自の役割を果さなければならない。

ドイツ民主主義共和国における発達した社会主義社会の形成には，つねに，数学は大きな意味をもつ。また，数学は，すべての自然科学，工学，経済学や，また，軍事科学にも応用され，さらに，現代の工業や農業の生産に，また，社会科学にも，ますます応用されている。数学教育は，数学のこのような機能を有効に果すように，行なわなければならない。

上級中等学校における数学の授業は，数学，自然科学，工学，経済学の学習に対して本質的な前提となるものである。それに関連して，生徒が，将来，社会的な問題との関連において，責任ある行動をとれる能力を生徒につけなければならない。そして，その解決には，数学の知識の応用と合法性が必要なのである。

上級中等学校の第11学年と第12学年の数学の授業は，第10学年の終りまでに生徒が獲得してしまった一般教育の上に構成される。しかし，それ自体，独立のものであって，また，それ自体，定まった教育課程である。第11学年および第12学年における数学の授業を通じて，生徒は，科学的な思考と研究の基礎的方法に強くなることが要求される。定義や証明に対する能力，数学の問題を考察する能力，すでに得られた知識を応用する能力などは，組織化され完成される。生徒は，数学的な関係を論理的に把握すること，独立な表現，文章上異議のない表現，また同じく，数学の用語や記号を利用することなど，それぞれの能力をつけなければならない。

今までに習得された知識の上に，正確で，固定した応用性のある，新しい知識が構成され，また，より高度な科学的水準における理解力が養成される。数学の授業は，生活と密接に結びつけられなければならない。高度な科学的水準を表わすことによって，さらに補強された数学の知識，理解，能力，熟練が，自然科学，工学，国民経済の問題の解決に応用される。

上級中等学校の数学の授業においては，主として他の教科の研究対象となる，重要な国家政策および国民経済の過程や関係に関する知識や理解を，数学の独特の方法によって，さらに深く推論することを可能にするような前提をつくりだすことも大切である。それ故に，生徒に対しては，例えば，極値の問題の解法などを用いて，工学，または，経済学の，ある定まった問

題に対して，条件の最適の変化に応じて調査を進めるという方法が，数学の決定的な役割でもあることを，原則的に明らかにする必要がある。

上級中等学校の授業における生徒の数学的な知識や能力を媒介として，生徒には，社会主義的人格への教育がつづけられる。それ故に，数学の授業は，行動することに生徒の尊敬を集め，また，労働者階級の党の指導のもとに，ドイツ民主主義共和国が完成しなければならないことに対して，勤勉さによって，寄与しなければならない。このことは，社会主義的国家意識を深め，われわれの国家に対して愛情をもち，われわれの社会主義的祖国に対して党への味方となり，全体的社会主義体制に合った教育となり，また，われわれの社会に対する義務意識を強くするのである。

ドイツ民主主義共和国の科学技術革命における数学科学の意味，また，生産力としての数学の役割を，多くの例によって，生徒が理解しやすくすることは必要である。その際に，ソビエトの科学の指導的役割を示し，また，ドイツ民主主義共和国とソビエト連邦およびその他の社会主義国との間の，緊密な協力体制を強調しなければならない。生産力としての数学の役割は，それに適した例によって示され，それによって，われわれの社会的発展および将来の見通しが写し出される。さらに，数学は，軍事科学および軍事技術の間接および直接の応用については，絶え間なく増加する軍備の意味で結びつくこと，また，われわれの共和国，および，全体の社会主義体制の防御準備（軍備）の増強は，平和を維持し安定させるためには，決定的な方法なのであることを，生徒はよく認識しておかねばならない。

数学の授業は，さらに，労働，学習訓練，科学に対する尊敬，自分の行為に対する批評や評価，他の人の行為に対する感謝，真理愛，正確さと注意力，忍耐と執念，慎重さと熟考，新しいものおよび進んだものによる啓発，また，ものの集りの整頓整理，それに，利己的でない協力などによって，社会主義的道徳を発展することに寄与しなければならない。

いろいろなはたらきの研究や，異なった証明方法の比較対照には，生徒は，第6学年から第10学年の指導計画に明らかにされた意味において，より大きな関連から導びかれた理解力を得たり，また，抽象によって，事実が正確に把握されることが前提となる。これによって，数学の授業は，生徒の科学的世界観の発展への貢献にもなるのである。また，第11学年および第12学年の公民教育とむすびついて，生徒は見識を得なければならず，また，数学の助けによって，客観的な一面をより深く認識し，熟達することができる。

2. 内容と構成

第11学年および第12学年における数学の指導は，過去10学年の一般教育の上に構築される。第10学年の終りまでに生徒が得た，数の集合や，基本的な関数，方程式論，また，幾何の重要な性質に関する知識や能力を復習し，深められ，それに応じて，上級中等学校に対する目標設定に再発展する。その際には，10年間の一般学芸学校の指導計画にあげられている基準線をかえりみなければならない。

第11学年および第12学年における数学の授業で取り扱われる対象は，次のものである。

数学的帰納法の証明方法

かんたんな数列

極限値の概念，および，連続性の概念

微分積分法の基礎

ベクトル計算，および，解析幾何

円錐曲線

第11学年の教育内容は，数学的帰納法と，かんたんな数列の取扱いではじまる。その際に，既に知っている概念，事実，および，方法が復習され，ならびに，第11学年および第12学年で扱われる教材に対する学習の重要な基礎準備となる。それを通じて，数の集合の性質や，集合論の若干の概念を復習し，また，同時に，集合論の若干のより広い概念を導びくことに到達しなければならない。数学的帰納法の証明方法によって，生徒は，数学に対する典型的な結論方法を学ぶことができる。

極限値の概念，および，連続性の概念の取扱いによって，数列ならびに関数の極限値に関する定理，また，連続関数の性質に関する定理が，微分法，および，積分法の問題の理解に際して，重要な前提となる。

解析を導入する結果として，生徒は，正確に定式化した定義と定理を用いて，基礎的構造を学びとり，そして，能力がつけられる。そして，このことから，独立に推論をみちびき，かんたんな定理を証明する。指導計画には，それぞれの教材領域について，その概念，事実，および，証明を示し，生徒はそれを習得する。その他にも，定理や証明等が述べてあるが，それらは，生徒にとって，必ずしも，再生産可能な知識としては要求されない。

微分積分法の取扱いによって，生徒の関数に関する知識や能力が確実なものとなり，また，拡張される。それの，数学の中の問題への応用（曲線の研究，面積，体積の計算）によって，幾何学的な概念や事実が復習され，より深化される。それと同時に，論理的思考の強力な教育が要求される。その他に，生徒は，適当な問題を通じて，微分積分法が，自然科学，工学，および，経済学の重要な方法であることを認識する。

ベクトル計算の基礎知識の学習は，目標に示された内容に基づくものであり，これは，生徒を，定まった数学の問題，および，その上にさらに，物理の問題に対する重要な方法へと導いていく。これによって，生徒は，さらに広い数学的概念の教育へと導びかれ，ベルトルの加法，および，ベクトルと実数との乗法を用いて，ベクトルの結合をくらべ，これによって，数学の定義の意味を明らかにする。このことによって，異なった集合においては，異なった演算法則が成立することが示される。

第12学年では，生徒は，円錐曲線を取扱うことによって，図形の種類の研究をし，これによって，円錐曲線を，幾何学的に，および，解析的に表現することを学ぶ。

同時に，円，放物線，双曲線の性質に関する知識をひろげ，さらに，広い着眼点のもとに，これを整理する。「楕円」の概念，および，楕円の性質を，生徒は新しく学ぶことになる。

第12学年では，有理関数以外の関数についての微分積分法の，基礎的な考察が行なわれ，より広い法則を学習する。それによって，数学の応用分野が，さらに広げられる。

第11学年および第12学年での教育活動には，他の分野，特に，物理の分野と協力することに，大きな意味がある。

数学の授業を通じ，その基礎的な知識，定まった方法や概念を，時期によって，物理の授業に役立てるように準備しておかねばならない。（例えば，関数の導関数の概念，有理関数の導関数の求め方，定積分の概念など，これらは，第11学年における物理の分野での力学の取扱いのときに用いられる。）

若干の場合には，物理の授業で取扱われる問題が，数学の授業においても，見つけられ，数学的方法によって取扱われる。物理の授業からの豊富な応用問題の解決によって，数学の方法の応用能力，および，技価が改善される。（例えば，斜投影の研究，微分法，力の加法と力の分解，ベクトル計算，変化する力による物理的仕事の計算，積分法）この際に，各分野の独自

性は考慮されねばならない。そして，いかなる分野に対しても，その体系的な構造を侵害することは許されない。

物理の授業における，「一定の力による仕事」の概念，および，スカラー積とベクトル積の取扱いによる「回転能率」が，数学の授業に導入される。数学の授業においても，ベクトルの乗法的結合の導入によって，これらの例に立ちかえって理解させるべきであり，その可能性は十分に残されているのである。

3. 授業のやり方に対する指示

上級中等学校における目標の実現，および，数学の授業の課題は，その大部分が，指導法の形態に依存している。それ故に，実践的知的行為の，より広い発展のため，また，社会主義的教育のため，精密に書かれているこの指導計画に定められている知識および能力の習得の梗概が，授業の計画や実施に，そのまま適用されるのである。

これまでに得られた数学の知識，能力を用いて，生徒が，自発的に，より高度の理論的水準にある問題を，基礎的かつ創造的に，論究できるように仕上げねばならない。このことについては，二三の場合について，論理学における認識過程を，生徒に具体化してやることが必要である。数学の授業においては，生徒の経験や知識を，自然科学の分野に，社会的実践の領域に，同様にまた，公民学の分野に役立て，数学の授業と実際との結びつきを価値あるものにしていくことが大切である。

上級中等学校における数学の授業は，生徒の能力をさらに拡大し，また，一般化普遍化された数学の方法に関する知識を，特別な問題に応用することができるようにしなければならない。特に重要なことは，この関係において能力を完成し，実践的な事情において数学の本質的な関連を理解し，そして，問題の合理的な解決のために，どのような数学的考察をとるべきかについて，確かな，かつ，速やかな決定を下さなければならないことである。

一つの大きな教材領域の終り，および，学年の終りには，部分的な復習，または，全体の復習によって，取扱われた領域を体系化し，また，個々の領域について比較考察し，また，その間の関係をつかんでおかなければならない。これらの復習は，生徒の知識や能力を確かなものにするために必要であり，また同じく，これによって，生徒を開発に向けて教育するのに有用である。この意味の復習とともに，各領域に固有の復習や練習があるが，これらは，生徒の基礎的な数学の知識や能力を，確かなものにするために重要な役割をもつ。個々の領域に適した問題の選択には，注意を払わねばならない。一つ一つの公式，法則，定義，定理，証明，また，問題解決の手順は，いつでも記憶によび戻されるのではなく，復習によってその目的が達せられるのである。また，これによって，生徒に，意識的に，新しいものと古いものとをしっかりと結びつけさせたものを創り出し，一般的なものと特別なものとを区別し，それらを，共通の着眼点から説明を加える。復習や練習では，指導計画で直接に取扱いを要求されている内容，もしくは，そのときの教室の状況による要求のみに配慮するのではなく，はじめに予定した教室の状況で取扱うつもりだった内容も，また，練習し，復習すべきものである。それによって，より多くの領域における問題を解決するのに必要な知識や能力となるのである。

例えば，長期にわたる練習，講義，相談などにより，知識の獲得をうながすための活動性，独立性，および，能力の発展へと導びくことは必要である。また，これによって，個々の生徒の実行や能力に配慮すべきである。個人的に別々の学習への指示や，課題の提示によって，個個の生徒は，創造的な学習に近づくことができることを保証される。

生徒は，精神的活動の手法に強くさせられなければならない。卒業試験までに，生徒は，一人一人で，数学の内容の表をつくり，それに参考になる勉強をしなければならない。生徒は，多くの内容について，自分で教科書を学習し，また，他の分野についても，いかにしてそれに近づき，その学習のために，教科書の適当な章を学び，それを整理して，その問題については何を用いたかをしらべておくべきである。

教材内容の修得や，生徒の知識，能力をしらべる際には，指導計画にあげられたすべての概念，事実，証明，方法が同じ程度に扱われるわけではない。定められた概念，事実，証明，方法は，生徒の再生産可能な知識に属し，それに応じて，強めに扱われる。その上に，体系化などのため，今後の教育財をよりよく理解するために，生徒は，概念や定理の順序と同じく，その証明も内容的に十分に知っておかねばならない。この実行に対しては，何らの制限もつけられない。各章について，その区切りに必要な確かめや指示は，それぞれの前文の説明の中に含まれている。

授業の計画に当っては，将来，数学を研究しようというものや，また，科学的実践的専門団体において，また，自由参加の授業において，また，青年数学オリンピックにおいて活躍しようとする生徒のために，教科外活動も有用であることを忘れてはならない。これらの年間活動によって，教育効果は永久に高められるのである。

第11学年では4回（1回は主として2時間），第12学年では3回（1回は2時間かそれ以上）の学級活動が紹介される。学級活動の，内容上の，また，組織的な形態を通じて，特に，第12学年においては，卒業のための記述試験の用意をする。この活動では，先ず最初の段階においては，数学の問題の解決を要求されるが，単に，一人一人の知識を検査するのみではない。その際に，問題と同時に，その問題の中に含まれ，かつ，その問題の背後にある材料（それは，前の学年の内容であってもよい）で，その最後に扱かわれた領域からも検査される。また，学級活動においては，その上につねに，知識ならびに理解の程度，ある定まった能力の発展の状態，および，重要な学習方法の熟達についても，検査されなければならない。

教材の指導のため，学年の進行による復習のため，また，学級活動のため，第11学年では，30週の授業（150時間），第12学年では，27週の授業（135時間）が規則によって保証されている。

上にあげられた時間数は，教材の領域（一けたの番号のついたもの）に対しては必修的なものであり，教材の区切り（二けたの番号のついたもの）に対しては，日付が資格証明書に明示される他は，ただ，見当づけのためにのみ用いるべきものである。

学級活動のための，および，復習のための時間は，個々の教材に示されている時間数の中に含まれる。

教材一覧表

（この指導計画には，いうまでもなく，第11学年，第12学年の教材一覧表しか示されていないが，別の学年の指導計画に示されている，一般学芸学校第5学年から第10学年までの教材一覧表も，参考のため，ここで一しょに紹介する。なお，数字で示されているのは，「授業のやり方に対する指示」の項に示されている意味での配当時間数である。）

第5学年	180時間	
1. 自然数の四則	55	
1.1. 自然数の計算についての重要な法則のまとめ		10
1.2. 形式的な練習		15
1.3. 応用的な練習		30
2. 計量と単位	60	
2.1. 長さの測定		9
2.2. 面積の測定，長方形		15
2.3. 体積の測定，直方体		18
2.4. 計量の単位，通貨と，時間の測定		8
2.5. 角と，角の測定		10
3. 分数の導入，分数の計算	35	
3.1. 分割の概念		5
3.2. 同分母の分数の加法と減法		10
3.3. 小数，小数による表記		10
3.4. 分数の概念		10
4. 幾何の基礎と作図	30	
4.1. 回転		15
4.2. 対称		15

第6学年	180時間	
1. 自然数の整除	20	
1.1. 復習		3
1.2. わりきれる性質		11
1.3. 公倍数，公約数		6
2. 分数	60	
2.1. 分数の大きさ		8
2.2. 分数の加減算		14
2.3. 分数の乗除算		20
2.4. 分数と小数，小数の計算		10
2.5. 分数の計算練習		8
3. 方程式の導入と比例	30	
3.1. 方程式の導入		7
3.2. 比例と比例式		23

第７学年　　**180時間**

7. 立体幾何	12	
7. 1. 角柱		4
7. 2. 円柱		4
7. 3. 練習と応用		4

第8学年	120時間	
1. 変数のはたらき	18	
1. 1. 変数のはたらきについての基礎		3
1. 2. 変数利用の計算		15
2. 相似	52	
2. 1. 放射の定理〔Strahlensätze〕		10
2. 2. 相似の位置		7
2. 3. 相似な図形		17
2. 4. ピタゴラスの定理など		18
3. 一次関数	28	
3. 1. 関数の概念		3
3. 2. 一次関数		10
3. 3. 一次関数の零点，一次方程式		4
3. 4. 一次方程式の解法		11
4. 面積，体積の計算	22	
4. 1. 体積の比較		3
4. 2. 角錐		8
4. 3. 円錐		6
4. 4. 球		5

第9学年	150時間	
1. 実数，変数のはたらき	43	
1. 1. 復習と系統化		9
1. 2. 実数		9
1. 3. 変数のはたらき		25
2. 不等式と連立方程式	25	
2. 1. 一次不等式		13
2. 2. 二元一次連立方程式		12
3. べきと，べき関数	32	
3. 1. べき		18

3.2. べき関数		14
4. 二次関数と二次方程式	30	
4.1. 二次関数		10
4.2. 二次方程式		20
5. 指数関数，対数関数，計算法	20	
5.1. 指数関数，対数関数		8
5.2. 計算法		12

第10学年 **112時間**

1. 三角関数	62	
1.1. 関数 $y=\sin x$		10
1.2. 関数 $y=\cos x$, $y=\tan x$, $y=\cot x$		8
1.3. 三角関数の値の間の関係		14
1.4. 三角関数の，三角形の解法への応用		30
2. 立体の表現と，体積の計算	30	
2.1. 復習と補足		16
2.2. 角錐台と円錐台		14
3. 強化と系統化，試験準備	20	

第11学年 **150時間**

1. 数学的帰納法，かんたんな数列	30	
1.1. 数の集合における重要な性質の復習，および，集合論の若干の概念，若干のもっと広い概念の紹介		5
1.2. 数学的帰納法による証明のしかた		15
1.3. かんたんな数列		10
2. 極限値	25	
2.1. 数列の極限値		15
2.2. 関数の極限値と，連続性		10
3. 微分法とその応用	40	
3.1. 導関数		10
3.2. 有理関数		10
3.3. 曲線の研究，極値		20

4. 積分法とそのかんたんな応用	25	
4. 1. 定積分		5
4. 2. 不定積分		5
4. 3. 微分積分学の基礎定理		5
4. 4. 積分法の応用		10
5. ベクトル計算と解析幾何（その1）	30	
5. 1. 移動，および，移動の加法		4
5. 2. 移動と実数との乗法		4
5. 3. ベクトル空間の概念		2
5. 4. 基底（基本ベクトル）と平面における座標系		8
5. 5. 平面における直線の解析幾何		12

第12学年 　　　**150時間**

1. ベクトル計算と解析幾何（その2）	30	
1. 1. 第11学年の復習と，さらに，それを深めること		5
1. 2. スカラー積		5
1. 3. スカラー積の解析幾何への応用，物理の問題への応用		12
1. 4. ベクトル積		5
1. 5. ベクトル計算の公理的構造についての要約的考察		3
2. 円錐曲線	25	
2. 1. 円錐曲線の定義と作図		10
2. 2. 円錐曲線の方程式		15
3. 有理関数以外の関数	30	
3. 1. 有理関数以外の関数の性質		10
3. 2. 根号のついた方程式，角に関する方程式		15
3. 3. 有理関数以外の関数の極限値		5
4. 微分積分法とその応用（つづき）	50	
4. 1. 有理関数以外の関数の微分積分法		15
4. 2. 曲線の研究，極値の問題		15
4. 3. 面積，体積の計算		20
5. 卒業試験のための準備	15	

教材の内容の説明

第11学年

1. 数学的帰納法，かんたんな数列　　　30時間

この最初の章を通じて，第11学年および第12学年における数学の授業に対する，共通の出発の基礎とでもいうものを，既に知られた概念，法則，方法等の復習により，また，この学年において取扱われるべき教材を研究するためのより広い重要な基礎に立つ新しい方法により，新しく創造していこうとする。

そのため，先ずはじめに，集合論の若干の概念，ならびに，数の集合における次の重要な性質について復習する。

自然数の集合（N）では，すべての自然数に対して，ただ一つの，つぎの数が存在し，また，0は別として，ただ一つの，まえの数が存在することが説明される。特に，最小数の原理は，それが，数学的帰納法の証明方法の基礎として利用されるので，証明なしに導入する。このことは，整数の集合（G）において，すべての数がただ一つの，つぎの数，および，まえの数を持つことと対立している。

有理数の集合（R）については，いかなる有理数に対しても，つぎの数やまえの数が定められないが，有理数は，自然の順序で，いたるところに稠密に存在することが示される。

実数の集合（P）に対しては，実数と数直線上の点の間に，一対一の対応がつけられること，すなわち，実数に対応づけられた点が，数直線上に切れ目なく並んでいることが知られる。

「有界な数集合」，「上（下）界」，「上（下）限」の概念の導入によって，次の定理は，証明なしで，生徒に理解されるであろう。

(1) 空でない，上（下）に有界な任意の実数の集合は，上（下）限をもつ。

〔上（下）限に関する定理〕

この定理によって，実数の集合が，有理数の集合とはっきり区別されることがわかる。さらに，この定理によって，有界な単調数列の収束が証明され，また，微積分を理解するための新たな基礎にもなるのである。

これらの数の集合それぞれに対しても，一意的に可能ないろいろな演算が定められる。生徒は，これについて，次のことを知らねばならない。すなわち，一つの集合に対して定められた性質では，いろいろな数集合を相互に区別するには十分でないことである。これらの関係については，数集合の復習によって，複素数の集合についても論及することができる。

数学的帰納法の証明方法の例によって，生徒は，数学的科学に対する論理的証明と親密になることができ，それによって，同時に，いままでの学年で得られた数学的事実の証明に関する能力を，さらに深く，かつ，広くする。数学的帰納法の方法は，最小数の原理によって理解される。このことは，間接的な証明の導入を復習することと，密接な関係がある。生徒は，和に関する定理（例えば，最初のn個の自然数の和の公式）や，幾何の問題に関する定理を証明することによって，自分の能力を伸ばすべきである。この場合，生徒は，自分自身で予想を立て，そして，それを数学的帰納法によって証明することも考えるべきである。（例えば，最初のn個の奇数の和）

数学のこの証明方法の取扱いとは別に，数学的論理的証明についての研究を行ない，そのほかに，自然科学および数学における，知識の獲得および研究のための，帰納法や演繹法の意味

を理解する。特に，数学的帰納法による証明方法が，特別な演繹的な方法であることを，授業において明らかにしなければならない。第11学年の公民の授業で，マルクスの認識論のいくつかの基礎問題を取扱うが，上述の考察が，この公民の授業の予備段階として考察されるであろう。

例として，階乗関数，および，自然数の指数をもつ，べきの定義が，帰納的定義の方法として，生徒に与えることは，よく知られていることである。

1. $f(n)=n!$ の定義 $(n\in N)$
   すべての順序対〔n，n！〕からできる関数は，次のことが成り立つような関数 f である。
   $$f(0)=1$$
   $$f(n+1)=(n+1)f(n)$$
2. $f(n)=a^n$ の定義 $(a\in P,\ n\in N)$
   すべての順序対〔n，a^n〕からできる関数は，次のことが成り立つような関数 f である。
   $$f(0)=a^0=1 \quad (a\neq 0)$$
   $$f(n+1)=a^{n+1}=a\cdot a^n$$

例えば，　$5!=5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1$　または　$a^4=a\cdot a\cdot a\cdot a$　などによって，関数値を計算することは，もう十分に練習されて，これによって明らかになっているが，ここでは，もっと早い学年で用いられた明瞭な考え方　$a^n=\underbrace{a\cdot a\cdot a\cdots\cdots a}_{n\text{個の因数}}$　$(n\geqq 2)$　を数学的帰納法によって把握するのである。

数学的帰納法の証明方法を，さらに応用したものとして，自然数の指数による，べきに対する，指数法則が証明される。

階乗関数が，組合せの理論を用いないで導入されたと同様に，二項係数は次のように定義される。

$$\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!} \quad (n\in N,\ k\in N,\ k\leqq n)$$

関係式　$\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$，　$\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}=\binom{n+1}{k+1}$ が証明され，そして，この事実は，パスカルの数三角形として具体的に示される。

二項定理は，負ではない整数の指数に対してのみ，数学的帰納法によって証明される。

和をかんたんに表わす記号として，和の記号が導入され，これによって，二項定理の記述が簡略化される。二項定理についての練習問題として，十進数のべきへの展開を，精密さ（誤差）の限界を考える必要はあるが，なしとげることができる。この教材の終りまでに，生徒は，二項係数の計算，および，二項定理の応用についての能力を身につけなければならない。

数列を取扱う前に，第8学年で得られた関数の概念を復習する。その後，数列を，実例から出発して，基本的な関数の値のつらなりの意味において，関数の特別な場合として導入する。その際，数列の項をグラフで表わすかんたんな規則を考えるとよい。しかし，最終的には，可能な明確な表現は，数学的帰納法による証明によることが必要である。数列は，図形的に表現されるが，このとき注意すべきことは，数列のグラフは，離散した点の集合であることである。

数列のうち特別なものを用いて，「上に（下に）有界」，「上（下）限」，および，「有界な数列」なる概念が，数の集合についての適切な定義から説明される。さらに，これに加えて，新しく，「単調増加（減少）数列」の概念がでてくる。

（注）「単調」なる概念は，狭義の単調の意味で用いられている。これに対して，「広義の単

調」の概念が，次のように定められる。

$a_{k+1} \geqq a_k$　のとき，広義の単調増加数列　といい，

$a_{k+1} \leqq a_k$　のとき，広義の単調減少数列　という。

このことについて，特別な数列の上限，または，下限は，直接の証明によって計算される。（例えば，0は，数列 $\left(\frac{1}{n}\right)$ の下限である。）

等差数列や等比数列は，独立した教材としては，取扱われない。生徒は，平方数の数列，および，立方数の数列の例についてのみ，高位の等差数列を学ぶ。なお，「高位の数列」の概念は，このあたりでは導入されない。〔高位の等差数列とは，階差数列が，等差数列となる数列を意味する。―― 訳者注〕　また，このとき，部分和　$S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$　も計算される。

等差数列や等比数列の問題の解法においては，そのすべての形式や，変形に関して考察するだけでは十分ではない。この意味では，一次または二次方程式の解法の技術を，さらに強めることになろう。$a^x = b$　（a，b 実数，$a > 0$，$a \neq 1$，$b > 0$）なる形で与えられた指数方程式は，対数をとることによって解くことができる。それによって，生徒は，対数の法則（第9学年）に関する知識を復習し，同時に，常用対数表を用いることによって，必要な基礎技術を取得するようつとめるべきである。応用問題としては，また，物理の問題（例えば，1. 2. 3.……，n秒後の落下速度），工学の問題（例えば，1. 2. 3.……，n回後の真空ポンプの排気鐘の中の圧力），また，経済の問題（例えば，毎年一定のパーセンテージで増加するときの，1. 2. 3.……n年後の労働生産力の増加）などが研究される。

1.1. 数の集合における重要な性質の復習，および，集合論の若干の概念　若干のもっと広い概念の紹介　　5時間

「集合」，「集合の要素」，「部分集合」の概念の復習

数の集合の重要な性質

「有界な数集合」，「上に（下に）有界」，「上（下）限」の概念の導入，上（下）限に関する定理

1.2. 数学的帰納法による証明のしかた　　15時間

数学的帰納法による証明のしかた，帰納法と演繹法の意味の説明

自然数nに関する階乗関数の帰納的定義，自然数の指数のべきの帰納的定義，いくつかの指数法則の証明

二項係数の定義，二項係数に関する定理，パスカルの数三角形，二項定理の証明と応用，和の記号の導入

1.3. かんたんな数列　　10時間

関数概念の復習

「数列」の概念の定義，グラフによる明確な，かんたんな表現法

「単調」の概念の復習と数列への応用，「単調増加（減少）数列」の概念の導入

「数列の上（下）界」，「数列の上（下）限」，「有界な数列」の概念の導入

等差数列，等比数列と，その部分和の研究，自然数の平方数，立方数のはじめからn個の和の公式

物理，工学，経済学への応用問題

2. 極限値　　　25時間

極限値の概念は，数学の中心概念の一つであり，これを基にして，いくつかの他の数学的概念や方法の理解へと，進むものである。数列の極限値や，関数の極限値に関する知識，また，連続関数に関する知識が，微分法や積分法の問題の理解に対しては，重要な役割をもつのである。

生徒は，これにより，また，以下の教材により，解析学の方法を導入される。

この後の諸定理の取扱いによって，生徒は，解析学の論理的課題に対する考察と理解を得るべきである。これらの諸定理の，あるものは証明され，あるものは，確かなものとして進めることに注目すべきである。これらの定理の一部のみが，生徒の再生産可能な知識に属する。この章において導びかれる証明は，再生産可能な知識には属しない。

「数列の極限値」の概念を正確に形式化するために，生徒が疑問を感じたときには，数直線上に図示するなどして，多くの例を取扱うのがよい。極限値の概念の導入のために，先ず,「ある数 x_0 の ε 近傍」なる概念を，次のように定義する。

ε をある正の実数とするとき，数 x_0 の ε 近傍とは，区間（ $x_0-\varepsilon$, $x_0+\varepsilon$ ）のことをいい，$U_\varepsilon(x_0)$ とかく。

極限値の概念には，次の定義が有用である。

数列（ a_n ）において，任意の正数 ε を与え，ほとんどすべての n に対して，

$$a_n \in U_\varepsilon \ (g)$$

が成り立つとき，かつ，そのときに限り，極限値として g をもつ。これを，$\lim\limits_{n\to\infty} a_n=g$ とかく。

これと同値な，次の定義も，授業中に話しておくべきである。

数列（ a_n ）において，任意の正数 ε が与えられたとき，高高有限個の n に対して，

$$a_n \notin U_\varepsilon \ (g)$$

が成り立つとき，かつ，そのときに限り，極限値 g をもつ。

この定義は，基礎的なものであり，数列への応用，および，数列についてのかんたんな定理によって，強く印象づけなければならない。極限値の概念の理解は，生徒が与えられた数列に対して，極限値を予想し，その値を含む定まった近傍で，ある項からあとのすべての項が，その近傍に含まれるような近傍を定めるときに得られるのである。

「収束数列」，「零数列」，「発散数列」の概念は，例をあげて導入する。その際には，零数列を，前面に立てるべきである。収束数列に関する，次のかんたんな定理を証明しておく。これらの一部は，さらに進んだ定理の証明に必要なものである。

（２ａ）正の項（負の項）のみより成る収束数列（ a_n ）の極限値 g は負でない（正でない）。

（２ｂ）収束数列（ a_n ）の極限値 g が正（負）ならば，ほとんどすべての n に対して

$a_n>0$ （ $a_n<0$ ）である。

(3) 収束数列（ a_n ）の任意の部分数列（ a'_n ）は収束し，かつ，数列（ a_n ）と等しい極限値をもつ。

(4) 上に有界で，かつ，単調増加であるすべての数列は，その上限に収束する。その上限は，数列の項ではない。

生徒の再生産的可能な知識に属するのは，定理(3), (4)のみである。多くの適当な数列の研究

は，これらの定理の取扱いと，密接に関係している。

例えば，

$$\left(\frac{1}{n}\right) ; \left(\frac{1}{n^k}\right),\ k>0 \quad ; \quad \left(\frac{1}{n!}\right) ; \text{数列}(q^n)$$

ここで，これらの例についても，ある2つの数列が与えられて，どちらの数列が，より早く零に収束するか，という問題も研究する。これらの定理の取扱いによって，生徒は，解析学の典型的な証明方法を理解する。生徒は，独立して零数列を研究し，ある2つの数列が与えられて，どちらが早く零に収束するかを決定し，長い証明のうちの一歩一歩の歩みを理解することによって，自己の能力を伸ばすべきである。

収束数列に関する次の定理は，取り扱われるべきである。

(5) $\lim_{n\to\infty} a_n = a, \lim_{n\to\infty} b_n = b$ のとき，$(a_n + b_n)$もまた収束し，かつ，$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = a + b$ である。（2つの収束数列の極限値の差，積，商についても同様な定理が成立する。

この定理は，再生産可能な知識に属し，応用が完了するまで利用される。上述の定理から，ちょうど今，定理(5)が証明される。

「数列(a_n)の部分和の数列」の概念を導入し，これによって，級数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$が導入される。収束する等比級数の和の公式が，また，循環小数を普通の分数に変えることにも使用される。

関数の極限値は，「数列の極限値」の概念を用い，例を利用して導入される。

関数fは，次の2項が成立するとき，かつ，そのときに限り，点x_0において極限値gをもつといい，このとき，$\lim_{x\to x_0} f(x) = g$ とかく。

1. fがx_0の近傍で定義されていること，（場合によっては，点x_0においては定義されていなくてもよい）
2. x_0に収束するすべての数列(x_n)（ただし，すべてのnに対して$x_n \neq x_0$）に対して，その項がすべてその近傍に属し，それに対応する関数値の数列$(f(x_n))$が，gに収束すること。

生徒は，「すべての数列(x_n)に対して」の条件に含まれる意味を明らかにしなければならない。このことを，もっと正確にいえば，ある定まったxの値に対して，極限値の存在しない関数（例えば，点$x_0 = 0$における $y = \frac{|x|}{x}$）の研究もしなければならない。これらの適当な例によって，一方の側の極限値が暗示されている。

関数の極限値についての定理は，数列の極限値についての対応する定理から導びかれる。これらは，再生産可能な知識に属する。生徒は，有理関数の極限値の計算によって，その能力を伸ばすべきである。

関数の連続性については，例を用い，次の定義によって導入される。

関数fは，次の3項が成立するとき，かつ，そのときに限り，点x_0において，連続であるという。

1. fが点x_0において定義されていること
2. $\lim_{x\to x_0} f(x)$が存在すること
3. $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ が成立すること

これにつづいて，区間における関数の連続性が定義される。

連続関数に関する次の定理は，授業において取扱う。

(6) fが区間$\langle a, b\rangle$において連続な関数で，$f(a)$と$f(b)$が異なる符号をもつ

ならば，fは，(a，b)において，零点をもつ。すなわち，$a<x_0<b$ かつ $f(x_0)=0$ なる x_0 が存在する。

(7) fが区間$\langle a, b\rangle$において連続な関数で，$f(a)\fallingdotseq f(b)$ならば，次のことが成り立つ。

$f(a)<y<f(b)$ または $f(a)>y>f(b)$ なるすべてのyに対して，$f(x)=y$なるxが(a，b)に存在する。

(8) $\langle a, b\rangle$で連続な関数の値域は有界である。値域の上限，下限は，つねに，$\langle a, b\rangle$におけるfの関数値である。

定理(6)は，学級の状態に応じて説明する。定理の内容を理解するには，定理のすべての仮定を満足する例や反例を具体的にあげるのがよい。何となれば，それによって，微積分の計算の理解に対する厳密な基礎をつくることになるからである。この定理を厳密に表現することは，生徒に望むことはできない。しかし，生徒は，定理の内容を具体的に説明することによって，その能力を伸ばさなければならない。

2. 1. 数列の極限値　　１５時間

「数 x_0 の ε 近傍」の概念の定義
数列の極限値の定義
「収束数列」，「零数列」，「発散数列」の概念の定義
収束数列に関する諸定理
極限値の計算，特に，零数列について
部分和数列，「級数」の概念の定義，収束する等比級数についての和の公式の証明
循環小数の，普通の小数への変換
〔この章にいう「零数列」とは，零に収束する数列を意味する —— 訳者註〕

2. 2. 関数の極限値と連続性　　１０時間

関数の極限値の概念の定義，関数の極限値に関する定理，極限値の計算
「一点における関数の連続性」，および，「区間における関数の連続性」の概念の定義，
連続関数に関する二三の定理の形式化と研究

3. 微分法とその応用　　４０時間

この章において，生徒は，数学のある領域と親密にならなければならない。この領域というのは，数学の内部だけではなく，自然科学や，工学や，経済学に対しても，中心の位置を占めるものである。定義や定理の構造を，さらに深めることによって，生徒は，解析学の方法について，さらに深くへ導かれる。割線から接線へ，平均速度から瞬間の速度へ，などの例を用いて，実際上，異なった領域からでてきた問題の共通性を，生徒に明らかにする。このことから，新しい数学の概念の導入の必要性が，説明される。これらの考察によって，ライプニッツやニュートンの業績は，尊敬されなければならない。

先ず，「微分商」の概念を導入する。

数 $\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ を，点 x_0 における関数 f の，hに属する微分商という。

微分商〔hに属する微分商――訳者註〕は，図形的には，割線の傾きを意味する。これによって，ある関数の定まった点 x_0 における微分商は，hについての関数と考えられ，そして，点 x_0 における，関数の微分可能性や，関数の微分係数は，$h \to 0$ に対する，この関数の極限値によって定義される。

関数 f は，次の2項が成立するとき，かつ，そのときに限り，点 x_0 において微分可能であるという。

1. f が，x_0 のある近傍において，定義されていること
2. 極限値 $\lim_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ が存在すること。

上の2.に述べられた条件の必要性は，適当な例や反例（例えば，点 $x_0=0$ における $y=|x|$）によって，明らかにされ，そして，それによって，極限値の概念や，微分可能性の概念が確実なものとなる。有理関数の，定点 x_0 における微分係数を，何回でも，極限値を計算することによって確かめさせてみよ。ある関数の微分係数の，図形的な意味に対する典型的な研究の歩み（微分商の考察，適当な変形，極限値の計算）を知り，また，独自にそれを導びくことによって，生徒はその能力を伸ばさなければならない。

「微分係数」や「微分商」の概念は，同じ意味として用いられる。〔「hに属する微分商」と，「微分商」の2つの用語で，いわゆる，平均変化率と変化率を区別している。なお，微分係数と導関数の区別が，本書では，なされていないが，以下においては，微分係数と導関数を適当に使い分けておいた。――訳者註〕　授業においては，点 x_0 における関数 f の微分係数として，はじめは，次の記号を用いる。

$$f'(x_0),\quad y'\Big|_{x=x_0},\quad \frac{dy}{dx}\Big|_{x=x_0}$$

まちがえる心配がなければ，かんたんに，次のように書く。

$$y' \quad \text{または} \quad \frac{dy}{dx}$$

定理

(9) 任意の関数 f について，次のことが成立する。

f が x_0 で微分可能ならば，f は，x_0 で連続である。

が証明される。また，この逆が成立しないことが示される。この定理は，再生産可能な知識に属するが，その証明は，必要ではない。

つぎに，（開）区間における微分可能性が定義される。

関数の和，積，商の導関数に対する法則を証明する。これによって，生徒の能力が改善され，独自に，関数の導関数を得るための正常な歩みが，得られるのである。自然数の指数をもつ，べき関数の導関数についての公式は，数学的帰納法，ならびに，二項定理の応用として得ることができる。負の整数の指数をもつ，べき関数の導関数は，商の法則を用いて得られる。

第8学年および第9学年で得られた有理関数の復習をし，有理関数の種類が導入され，また，有理整関数と有理分数関数との差異について考察する。有理関数の微分法については，十分練習する必要がある。この関係において，

$$y=[f(x)]^n,\quad n\in N$$

についての微分法則

$$y' = n\,[f(x)]^{n-1} \cdot f'(x)$$

が，数学的帰納法によって証明され，また，例として応用される。

これによって，有理関数の零点および極点〔P 0 1〕についての性質が研究される。さらに，これに加えて，有理関数の無限遠における状態，および，極点の近傍における状態が研究される。

〔有理分数関数 $f(x)=\dfrac{u(x)}{v(x)}$ において，$v(x_0)=0$ かつ $u(x_0)\neq 0$ なる点 x_0 を $f(x)$ の極点といい，$u(x_0)=0$ かつ $v(x_0)\neq 0$ なる点 x_0 を $f(x)$ の零点という。—— 訳者註〕

有理関数の種類についての考察によって，さらに進んだ考察が，再び一般的に導入され，その知識が，有理関数に適用される。これらが，3.3.章において，考察の中心となる，関数の局所的状態〔Lokale Verhalten〕なのである。

先ず，「ある区間における関数の単調性」の概念が述べられる。これは，すでに第9学年における指数関数の研究において述べられたことの，くりかえしである。次に，点 x_0 における，関数の局所単調性〔Lokale Monotonie〕を定義する。

関数 f は，次の2項が成立するとき，かつ，そのときに限り，点 x_0 において，局所単調増加であるという。

1. f が，x_0 のある近傍で定義されていること
2. ある $\varepsilon>0$ が与えられたとき，すべての x について，次のことが成立すること

$x_0-\varepsilon<x<x_0$ において　$f(x)<f(x_0)$

$x_0<x<x_0+\varepsilon$ において　$f(x)>f(x_0)$

同様にして，「局所単調減少」の概念が定義される。

関数の，点 x_0 における局所単調性の研究のために，次の定理を証明しておく。

(10) 関数 f が，x_0 において局所単調増加（減少）で，かつ，x_0 で微分可能ならば，

$$f'(x_0)\geqq 0 \qquad (f'(x_0)\leqq 0)$$

が成り立つ。

(11) 関数 f が，x_0 で微分可能で，かつ，$f'(x_0)>0$　$(f'(x_0)<0)$ ならば，f は，x_0 において，局所単調増加（減少）である。

練習によって，生徒は，学力を拡張すべきである。ここにいう練習とは，与えられた関数の局所的単調性についての研究のそれである。定理(10)，(11)は，しかしながら，再生産可能な知識には属しない。

微分積分法のもっと進んだ研究のために，生徒は，微分法の平均値の定理を学ぶことが必要である。この定理の内容を，直観的に理解すればよい。ロルの定理は，平均値の定理の特別な場合とみることができる。平均値の定理は，生徒の再生産可能な知識に属する。これらの定理を証明することは，学級の実情に応じて，自由に選択すればよい。平均値の定理の理解を確実にするため，また，積分法への準備として，かんたんな定理（例えば，$f'=0$ ならば，f は定数関数であること）の証明は，やっておかねばならない。

直観的なやり方で，関数の極大（極小）は，次のように定義される。

関数 f が，ある $\varepsilon>0$ が与えられたとき，$x_0-\varepsilon<x<x_0+\varepsilon$ なるすべての $x\neq x_0$ に対して，

$$f(x)<f(x_0) \qquad (f(x)>f(x_0))$$

が成り立つとき，かつ，そのときに限り，関数 f は，点 x_0 において，極大（極小）とな

る。

定理(10)から進んで，定理(12)を証明できる。

(12) 関数fが，x_0において極値をもち，かつ，x_0で微分可能ならば，

$$f'(x_0)=0$$

が成り立つ。

生徒は，例を用いて，この定理の逆は成立しないことを明らかにすべきであり，また，これは，「必要条件」と「十分条件」の概念をうえつける。関数fが，点x_0において，極値をとるための十分条件を考察するには，x_0の近傍における$f'(x)$の符号の変化，ならびに，平均値の定理を用いて，$f''(x)$を研究することが大切である。例として，点$x_0=0$における$y=x^4$などを，生徒に示すとよい。ここでは，第一の条件が，広範囲に，第二の条件は，これに対して，軽く取扱われている。また，その点で極値をもっていても，そこでは，関数が微分係数をもたない（例えば，点$x_0=0$における$y=|x|$）ことも，生徒は，さらに知らねばならない。極値について，ここで得られた条件は，再生産可能な知識に属する。

「凸」，「凹」，「変曲点」の概念を，直観的に導入する。これについては，次のように定義する。

関数fは，次の2項が成り立つとき，かつ，そのときに限り，x_0において凸であるという。

1. fは，x_0の近傍において，微分可能であること
2. f'は，x_0において，単調増加であること

同様にして，「凹」の概念も定義される。

関数fは，次の2項が成り立つとき，かつ，そのときに限り，x_0において，変曲点をもつという。

1. fは，x_0の近傍において，微分可能であること
2. $f'(x_0)$が，極値であること

関数の局所単調に関する条件や，極値に関する条件とともに，凸（凹）や，変曲点に関する条件もあげられる。

関数の局所的な状態に関する条件を考察することによって，先ず第一に，かんたんな形式的の，曲線の研究ができ上る。生徒は，そのときどきに，暫くそこに止まって，研究が実行されなければならない。そして，それは，関数の十分な研究の課題に対する準備ができるために必要なことである。

曲線の研究に関連して，有理整関数の零点や，極値，および，変曲点の最大の個数についての考察が，関数の次数や，座標系におけるグラフの位置から導びかれる。曲線の研究は，かんたんで，計算によって展望できる場合に制限される。極値の問題の解法にあたっては，ただに，必要条件と十分条件のみではなく，実際の場合から生じる付加的条件にも，強く注意すべきである。

実際の問題の疑問から生ずる実際の極値問題の解法，および，関数のグラフの研究にかかわるような微分計算の応用には，より多くの価値がある。もっと大きくいえば，数学的方法を用いて解くことができるような，国民経済上最適なものは何かという課題は，生徒には，知識として導びかれていなければならない。現在準備されている数学は，ドイツ民主主義共和国における科学的技術的改革の完成のためには，決定的なものである。軍事技術の質問に対する課題（例えば，弾道）は，社会主義の防衛の教育に対して有用なものである。

3.1. 導関数　　10時間

関数のグラフ上で，点 x_0 における接線，瞬間の速度
関数の微分可能性，関数の微分係数の定義，定まった値 x_0 に対する関数の微分係数の計算
関数の和，積，商の微分法に関する法則の導入と応用
$y = x^n$（n は整数）の導関数についての法則の導入
関数の高次導関数の定義

3.2. 有理関数　　10時間

第8学年，第9学年で学習した有理関数の復習，有理関数の種類の導入，有理関数の分類，
有理関数の微分計算の練習，$y = [f(x)]^n (n \in N)$ に対する微分法則の証明と応用，
有理関数の零点と極点の計算，有理関数の無限遠における状態，および，極点の近傍における状態の研究，漸近線

3.3. 曲線の研究，極値　　20時間

「単調性」の概念の復習と強化，点 x_0 における関数の単調性に対する条件の導入
微分法における平均値の定理
「極値」および「極大（極小）」の概念の定義，極値に対する必要十分条件，「必要条件」と「十分条件」の意味の説明
「凸（凹）」と「変曲点」の概念の定義，凸（凹）の条件，変曲点の条件
形式的な曲線についての研究の実行
極値についての問題の解法，数学の他の分野，物理，工学，経済学からみた関数の研究，

4. 積分法と，そのかんたんな応用　　25時間

この章では，関数の極限値と導関数についての，生徒の知識を，その他の，同様に重要な，数学の領域へ応用し，また，生徒が，微分積分法の，さらに広範な方法へと進む。

その際に，定積分の概念と，不定積分の概念の，どちらを先に導入するかは，自由裁量に委せられる。

「定積分」の概念の導入に当っては，これが面積の計算の問題には必ずでてくること　そしてまた，定積分は，積の和の極限値として定義されるものであり，そのとき，すべての考察が，直観的に明らかにされる。

先ず，「区間の分割」および「分割の和」〔Zerlegungssumme〕の概念が定義される。

分割 Zn とは，閉区間〈a，b〉について，一つの数列

$$x_0,\ x_1,\ x_2\ \cdots\cdots,\ x_n$$

をつくり，$x_0 = a$，$x_n = b$，かつ $x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n$ であるようにして，閉区間 $<a, b>$ を，n 個の部分区間に分けたものをいい，分割の和とは，

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \cdot (x_i - x_{i-1})$$

なる数をいう。ここに，ξ_i は，$x_{i-1} \leqq \xi_i \leqq x_i$ なる任意の数である。

次に，「分割列（z_n）」〔Zerlegungsfolge〕および「特別分割列」

〔augezeichnete Zerlegungsfolge〕の概念を導入する。ここにいう特別分割列とは，分割列のうち，最大の区間の長さが，n→∞のとき，0に近づくものをいう。

以下の考察は，連続関数に対してのみ成立するものである。生徒には，次の定理が与えられる。

(13) fが，区間$\langle a, b\rangle$で連続な任意の関数であるとき，特別分割列をどのように選んでも，また，分割の間の点をどのように選んでも，その分割の和は，実は，つねに，ある一つの同じ値に収束する。

定理(13)で示された共通の極限値を，関数fの区間$\langle a, b\rangle$における定積分といい，

$\int_a^b f(x)\,dx$ とかく。

定積分の定義を，このように定めることによって，いくつかの特別な関数の定積分は，極限値を計算することによって，求められる。その際，この例については，特殊な特別分割列から出発してもよいことが証明される。これについては，これ以上，深入りしない。

この事実をもとに，閉曲線で囲まれた部分の面積の概念が，先ず，定積分の助けによって，説明することができることを，生徒に暗示する。しかし，ここではまだ，あまり詳細には立入らない。

つづいて，連続な関数に対して次の定義と定理を取扱う。

定義 $\int_a^b f(x)\,dx=0 \qquad (a=b)$

定義 $\int_a^b f(x)\,dx=-\int_b^a f(x)\,dx \qquad (b<a)$

(14) cが $a\leqq c\leqq b$なる任意の数ならば

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b f(x)\,dx$$

が，つねに成り立つ。

定理(14)は，明らかなものとして扱い，証明はしない。

積分の平均値の定理は，微分積分学の基礎定理の証明の基礎としてとらえるものとし，その内容は，直観的に理解する。これは，生徒の再生産可能な知識に属しない。

不定積分の概念は，定積分とは無関係に導入される。そのときには，次の理由から出発する。

ある定まった区間において定義された関数fに対して，次のようなある関数Fをみつける。すなわち，その区間で定義され，かつ，その導関数が，その区間のすべてにおいて，$F'(x)=f(x)$が成立するものである。このような関数Fを，fの原始関数という。このことから，不定積分について，次の定義がなされる。

fを，$a\leqq x\leqq b$において定義された連続関数とする。そのとき，不定積分$\int f(x)dx$とは，$a\leqq x\leqq b$において定義され，かつ，微分可能で，その区間において$F'(x)=f(x)$が成立するような，すべての原始関数Fの集合である。

積分定数の幾何学的意味は，曲線群の中の目印として説明できる。一群の指標としての役割が，これから説明される。

法則

$$\int [f(x)+g(x)]\,dx=\int f(x)\,dx+\int g(x)\,dx$$

（これは，n個の和についても，拡張できる。）

$$\int k f(x)\,dx=k\int f(x)\,dx$$

は，証明すべきである。これらの証明は，生徒の再生産可能な知識に属する。

第11学年の授業では，$y=x^{n}$（nは整数，$n \neq -1$）なる形の等式で表わされる，べき関数の他，有理整関数を積分するのみであり，従って，その他の特別な積分の方法は取扱わない。そのような関数の積分は，方法を説明する程度に止める。

次の節では，微分積分学の基礎定理が証明される。

(15) fが，$a \leqq x \leqq b$において連続な関数で，Fが，fの任意の原始関数ならば，

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

が成り立つ。

この基本的な定理は，微分法と積分法との間の関係を表わすものであると同時に，この定理が，定積分の計算方法を与えるものであることが，明確にされた。

生徒は，応用問題（面積の計算，一定でない力に関する問題の計算）を，自力で解くことにより，能力をつけなければならない。

4.1. 定積分　5時間

「区間の分割」，「分割の和」，「分割列」，「特別分割列」の概念の導入
「連続関数の定積分」の概念の定義
積分の平均値の定理の方式化および具体化

4.2. 不定積分　5時間

「原始関数」と「不定積分」の概念の定義
積分の法則の証明
$y=x^{n}$（nは整数で，$n \neq -1$）なる形の等式で表わされる，べき関数の積分
有理整関数の積分

4.3. 微分積分学の基礎定理　5時間

基礎定理の証明と，その意味の説明
定積分の計算

4.4. 積分法の応用　10時間

次のような図形の面積の計算
　x軸の上部にある部分のみ
　x軸の下部にある部分のみ
　部分的に，x軸の上部または下部にある
一定でない力に関する物理の問題の計算

数学と物理の両者にかかわる問題のうちのあるものは，第11学年と第12学年における，ベクトル計算の基礎知識を，媒介として要求される。さらに，その教材についての可能性を示し，生徒に，数学の一分野の公理的構造についての問題性，疑問性に関心を向けさせる。

生徒が，移動について，中程度に得られている知識に関連して，平面上および空間における移動の定義が与えられ，その移動を表わすために，有向線分（矢線）の表示が用いられる。

移動の定義

> 平面の，それ自身の上への，可逆的一意写像を，平面の移動という。ある点（もとの点）が，この移動によって，ある点（像の点）に移るとき，この二点を結ぶ有向線分は，すべて，平行で等しい。

この定義により，移動を表示するには，有向線分によって具体化される。物理的量を観察するときにも，同様に，矢線によって，具体的に表わすことができる。（力，速度，加速度）

個々の移動の考察の後に，移動の結合を導入する。加法は，順次に移動を結合することにより，また，実数と移動との乗法（何倍かにすること）は，移動の大きさを用いて導入される。これと関連して，幾何図形の放射の定理〔Strahlensätze，一点を中心とする，図形の実数倍の拡大（縮小）に関する定理――訳者註〕および，相似を復習する。応用する問題としては，これまた，物理的な問題が復習される。（力の加法）

計算法則（加法に関する交換法則，結合法則，移動と実数との乗法に関する結合法則，分配法則）の取扱いについては，数の集合における同様の計算法則との類似において取扱う。実数と移動との乗法に関するすべての計算法則の証明を必要とするわけではない。加法，および，移動と実数との乗法の定義につづいて，同じように，この結合の性質の導入は，次のように，ベクトル空間の概念を，公理的に導くことによって行なわれる。

> ある集合があって，その要素に対して，加法，および，実数との乗法が定義され，任意の要素 $\mathfrak{A}$，$\mathfrak{B}$，$\mathfrak{C}$ および，任意の実数 λ，μ に対して，次の法則が成立するとき，この集合を，ベクトル空間といい，その要素を，ベクトルという。
>
> 1. $\mathfrak{A}+\mathfrak{B}=\mathfrak{B}+\mathfrak{A}$
> 2. $(\mathfrak{A}+\mathfrak{B})+\mathfrak{C}=\mathfrak{A}+(\mathfrak{B}+\mathfrak{C})$
> 3. 集合の２つの要素 $\mathfrak{A}$，$\mathfrak{B}$ に対して，$\mathfrak{A}+\mathfrak{C}=\mathfrak{B}$ となる要素 $\mathfrak{C}$ が，この集合の中に，つねに，ただ一つ，存在する。
> 4. $1\cdot\mathfrak{A}=\mathfrak{A}$
> 5. $(\lambda+\mu)\mathfrak{A}=\lambda\mathfrak{A}+\mu\mathfrak{A}$
> 6. $\lambda(\mathfrak{A}+\mathfrak{B})=\lambda\mathfrak{A}+\lambda\mathfrak{B}$
> 7. $\lambda(\mu\mathfrak{A})=(\lambda\mu)\mathfrak{A}$

これらの定義は，生徒の再生産可能な知識には属しない。

ここで，数学および物理の領域から定められたある集合が，ベクトル空間に関するすべての公理を満たしていることを，示してみせるのがよい。既に考察された平面や空間のモデル，および，物理的なモデルのあとで，順序をもったn個の数の組のすべてから成るベクトル空間にも言及し，さらに，ベクトル空間の要素は，必ずしも，矢線によってのみ具体化されるとは限らないことを，明らかにする必要がある。

ベクトルの一次結合，および，多角形状移動表示〔Polygonzüg〕によるその幾何学的意味の取扱いを学んだ後，物理の授業に関する知識をもとにして，ベクトルを，平行でない２

つのベクトルに分解することができる。この分解の可能性および一意性から，「基底」，「成分」，「座標」の概念が導びかれる。

平面などへのベクトル空間の基底の導入によって，平面における座標系が，一般から特殊へ，例えば，斜交座標系から，直交座標系へと移行する。このことから，これ以後，直交座標系のみで考察することにする。

直交化された基底の回転を扱うことによって，正弦，および，余弦関数の加法定理が導びかれる。

直線の方程式は，最初は，ベクトルにより，媒介変数表示の形で導入される。媒介変数を消去して，座標表示へ移行することは，基礎的な練習である。これによって，直線の方程式における異なった形の原則的な同値性が考察される。方程式　$y = mx + b$ は，直線の方程式の一般形ではないことを知ることは，大切である。この形は，一次関数（$m \neq 0$）や，定数関数（$m = 0$）を表現できるが，y 軸に平行な直線は，この形では表現することができない。

問題を解くことによって，生徒は，能力を獲得すべきである。すなわち，ベクトル表示は，定理の導入にも，また，幾何や物理の問題を解くときも，添加物として応用され，また，座標表示は，計算の実行を確かなものとすることに重点がおかれる。その他の応用としては，平面幾何の定理を復習したり，証明したり，（例えば，平行四辺形）また，同様に，物理の問題，特に力学の問題を解くことなどがある。

5. 1. 移動および移動の加法　　4 時間

移動の概念，矢線による移動の表現
移動の大きさ，逆向きの移動
物理的量，これは，矢線によって具体化される
移動の加法の定義，加法の性質
恒等移動，移動の減法
移動の加法と，一点にはたらく力（例えば，速度または加速度）の合成との類似，応用問題の解決

5. 2. 移動と実数との乗法　　4 時間

移動と実数との乗法の定義，いろいろな場合の幾何学的説明，移動と実数との乗法の性質，得られた知識の，若干の平面幾何の定理への応用

5. 3. ベクトル空間の概念　　2 時間

ベクトル空間の公理的定義，例，平面または空間における移動の集合，一点にはたらく力の集合，n 個の順序をもった数の組への論及

5. 4. 基底（基本ベクトル）と，平面における座標系　　8 時間

ベクトルの一次結合，ベクトルの一次独立，一つのベクトルの平行でない 2 つのベクトルへの分解，力の分解の復習

平面におけるベクトルの空間の基底の概念，１つのベクトルの基底に関する成分と座標
斜交座標系
単位ベクトル
２つのベクトルの間の角の定義，直交するベクトル，基本ベクトル，直交座標系
座標表示された移動の，加法，減法，実数との乗法
座標系の平行移動，平面における基本ベクトルの回転，正弦と余弦の加法定理

5.5. 平面における直線の解析幾何　　１２時間

直線の媒介変数表示方程式，半直線および線分の媒介変数表示方程式（媒介変数の定義域の制限），線分の長さの比としての媒介変数の説明
媒介変数を消去した方程式への変形，一点を通り定方向の直線の方程式，二点を通る直線の方程式，両軸の切片が定まった直線の方程式
直線の交点の計算
有向線分の，点による分割における線分の比の計算

第12学年

1. ベクトル計算と解析幾何（その２）　　３０時間

第12学年の最初に当り，ベクトル計算，および，直線の解析幾何について，生徒の知識を復習し，そして，それを，三次元ユークリッド空間へ拡張する。空間における直線の方程式は，媒介変数表示の形で取扱われる。その際に，「跡点」〔Ｓｐｕｒｐｕｎｋｔ，直線と平面との交点のことで，跡ともいう。――訳者註〕の概念を導入し，そして，二直線の位置関係（画法幾何，第７学年）についての，生徒の知識が復習され，さらに，それに応じた練習をくりかえす。空間における平面の媒介変数表示方程式を導入するが，これは，生徒の再生産可能な知識には属しない。

ベクトルの乗法的結合の導入については，「一定の力による仕事」および「回転能率」の，物理の概念から得られる。「スカラー積」および「ベクトル積」なる結合は，「ベクトルの大きさ」，「２つのベクトルの間の角」，および，「正の向きのらせんの意味（方向付け）」によって定義される。これらの積の，座標による表示，または，成分表示による表示は，これから導びかれる。

スカラー積，および，ベクトル積については，次のことが説明される。すなわち，積が零であるか，もしくは，零ベクトルであっても，その因子は，必らずしも，零ベクトルとは限らないということである。これについては，結合法則や，ベクトル積についての交換法則が成立しないことを，さらに，知らねばならない。この際に，数の集合における，対応した計算法則との，類似や差異をよくみることである。ベクトルの乗法に対する分配法則は，証明されない。

スカラー積の取扱いに関連して，平面幾何，および，三角法の，より広い定理が，復習され，証明される。

直線の解析幾何に対する問題により，また，物理の仕事を，スカラー積で計算し，また，回転能率を，ベクトル積によって考え，また同時に，飛行機の方位や運行に対する適当な問題の解法により，数学その他の科学に対する，また，軍事科学に対する，ベクトル計算の意味が，

はっきりしてくる。

円や球についての解析幾何の，ベクトルによる取扱いについては，生徒の，第7学年または第8学年の知識に相当した知識からはじめられる。方程式のベクトルによる書き方から，座標表示への移行に，より大きな価値がある。さらに進んで，例えば，円や球のベクトル形式は，これらの方程式が，ベクトル空間の次元に応じて，その他の様子をも記述するものであることを示す。（直線の方程式の，ベクトル形式に対する差異に気をつけよ。）

この部分についての練習としては，学級の進んだ状態のときに取扱われるべき，円についての角，直線に関する若干の定理（例えば，ターレスの定理）を復習し，さらに，ベクトルを用いて，これを証明することである。円の接線の方程式は，先ずはじめに，ベクトルによって，つぎに，座標表示によって説明される。

この章の最後において，生徒のベクトル計算に対する知識を系統的に復習する。このとき，ベクトル空間の異なったモデルを，対立させてみることが必要である。この系統化においては，生徒に，数学の理論の公理的構成を，教育的に洞察させるようにしなければならない。特に，その応用を可能ならしめるために，異なったモデルの上にそれぞれ公理的に構成された理論の長所について，論及すべきである。

1.1. 第11学年の復習と，さらにそれを深めること　　5時間

異なったモデルの復習

3次元ユークリッド空間への拡張，空間における直線の媒介変数表示による方程式，跡点，一直線の座標平面への射影，二直線の位置関係，平面の媒介変数方程式

1.2. スカラー積　　5時間

スカラー積の定義，スカラー積の性質

直角三角形の幾何に関する主要な定理の証明，ベクトル計算を利用して平面三角法の余弦定理の証明

スカラー積の座標表示の導入

ベクトルの大きさの計算，2つのベクトルのなす角の計算

1.3. スカラー積の解析幾何への応用，物理の問題への応用　　12時間

2直線の交角の計算

2直線の平行条件と垂直条件

点の集合としての円の定義の復習，点の集合としての球の定義，ベクトル表示および座標表示による円，球の方程式の導入

円と直接の位置関係，円の接線の方程式

円における角，線分，直線に関する諸定理の復習と証明

スカラー積の物理の問題（例えば，仕事）への応用

1.4. ベクトル積　　5時間

ベクトル積の定義，ベクトル積の性質

ベクトルの成分表示の導入

2つのベクトルのベクトル積の大きさが，これらのベクトルでできる平行四辺形の面積であることの幾何学的な意味

ベクトル積の物理の問題（例えば，回転能率）への応用

1.5. ベクトル計算の公理的構造についての要約的考察　　3時間

ベクトル空間の公理的定義，いくつかの類型（幾何学的，算術的，物理的）の対照

2. 円錐曲線　　25時間

この章においては，直円錐を平面で切断することによってできる断面図を，その正しい大きさや形状について考察し，かつ，解析幾何の基礎的な部分を，円錐曲線に応用する。

生徒は，直円錐の切断面による断面図（作図平面に垂直な切断面）〔直円錐を平画面上においたとき，立画面に垂直な平面で切断し，断面図は立画面上に作図する意味である。──訳者註〕を，作図によって実際の形のままで，画かなければならない。円錐曲線は，円錐と切断面の位置の関係に応じて分類される。このことは，円錐曲線の種類の変り方についての暗示を，生徒に与える。点集合としての円錐曲線の性質は，ダンデリンの球〔円錐と，その切断面とに接する球をいう。──訳者註〕の助けによって導びかれる。（再生産可能な知識ではない）　これによって，円は，楕円の特別な場合として，考察される。

円錐曲線の定義は，生徒の再生産可能な知識に属する。この定義から，楕円，双曲線，放物線に対して，つねに，適当な作図方法が導びかれる。これらの方法は，十分練習すべきであり，生徒は，円錐曲線を，くわしく作図する技術を身につけることが，必要である。

円錐曲線の方程式は，直線や，球や，円の方程式に対立して，座標によってのみ（ベクトルではなく）導びかれる。円錐曲線の方程式の導き方は，再生産可能な知識に属する。

与えられた値について，（面積や体積の計算に対する準備として）方程式をつくること，および，与えられた方程式に従って，円錐曲線を作図することは，十分に練習しておくべきであり，これによって，生徒は，技術を身につける。

円錐曲線と直線について，ありうる相互の位置に関する議論に関連して，直線の方程式のはたらきに，熟練しておかなければならない。練習問題においては，円錐曲線の任意の点における接線の方程式も必要であり，双曲線の漸近線の方程式も導びかれる。若干の練習問題では，円錐曲線の，特別な性質，ないしは，特長が得られる。

例　放物線の接線で，接点と，放物線の軸との交点との間の線分は，頂点における接線で二等分される。

証明されるべき性質や特長の選択は，自由裁量に委されている。生徒自身の能力を獲得するために，円錐曲線と直線の方程式に関する，非常に多くの練習問題が，用意されている。これらの練習によって，同時に，方程式や，連立方程式の解法が復習される。円錐曲線の原形は，宇宙における，天体の移動する経路であることは，よく知られている。（例えば，万有引力の場における天体の移動）　精巧な天体の動く経路の例は，自然科学および工学に対する数学の

意味を，よく表わしており，また，宇宙の平和的研究によって，ソビエト連邦の指導的役割に入り込むことになるのである。

この章の最後にあたって，生徒の課題として，円錐曲線の一般的な性質を整理し，さらに，円錐曲線の一般の方程式を，楕円，双曲線の方程式の標準形，および，放物線の方程式の標準形から，導びかせるようにする。

2.1. 円錐曲線の定義と作図　　10時間

直円錐の平面による切断でできる切断面を平行投影によって表現すること
切断面が楕円，放物線，双曲線に分類されること
平面上の点の集合としての円錐曲線の性質
楕円，双曲線，放物線の作図

2.2. 円錐曲線の方程式　　15時間

楕円および双曲線の方程式の標準形の導入
放物線の方程式の標準形の導入
座標軸と平行な軸をもつ位置にある円錐曲線の方程式の説明，与えられた値について円錐曲線の方程式をつくること，与えられた方程式に対する円錐曲線の作図
円錐曲線と直線の位置関係の研究，接線の方程式，双曲線の漸近線の方程式
円錐曲線に関する二三の特長のある性質または特色の証明
円錐曲線の一般の方程式の導入と研究

3. 有理関数以外の関数　　30時間

ここでの授業の目標は，基準的な「関数」のつづきとして，第9学年および第10学年で導入された有理関数以外の関数についての，生徒の知識を復習し，かつ，それを深めるとともに，有理関数以外の特別な関数についての取扱いを，導入することである。この章においては，微分および積分の計算の方法を，応用ぬきで研究する。

まずはじめに，合理的な演算方法（加法，減法，乗法，除法）によって，既に得られた関数から，新しい関数をつくることができるようにする。このように，関数から新しい関数をつくるのと同じようにして，たがいに逆の関数についての知識を生徒は修得すべきである。その際，同時に，互に逆の関数のグラフの対称性について，直線 $y=x$ と関係があることが導びかれる。関数の「合成」もまた，新しい関数のグラフの特長づけることによって可能である。

第9学年と第10学年で導入された有理関数以外の関数の復習をするとき，先ず最初に考えなければならないのは，これらの関数の定義に関する知識を確実にすることであり，それから，これらの関数を，今一度グラフに表現し，これらの関数の重要な性質と，そのグラフについての知識を整理し，さらに，新しい内容を取扱うことになる。（値域，有界性，単調性，偶関数，奇関数，周期性，零点，極点，漸近線）

三角関数の復習によって，加法定理から，正弦，余弦の半角の公式，倍角の公式が導びかれる。三角関数の間に成り立つさらに多くの関係が，形式的に導びかれる。（公式集の作成）

指数関数と対数関数の復習によって，次のことが示される。$y=a^x$（$a>0$，$a\neq 1$）な

る形の等式で表わされる指数関数において，Xの値が等差数列をなすとき，yの値は，つねに，等比数列をなすこと，および，$y=\log_a x$（$a>0$，$a\fallingdotseq 1$，$x>0$）なる形の等式で表わされる対数関数において，Xの値が等比数列をなすとき，yの値は，等差数列となる。

数列$\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)$および$\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\right)$の両者からはじめて，極限値$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$の存在が証明される。この存在証明は，再生産可能な知識には属しない。この両数列において，$n\in\{1, 2, 3, 4, 10, 100\}$に対して計算すると，eなる数の有理数の近似値が得られる。

$\ln X$ およびe^xの数表の使用は，練習しておかねばならない。また，1と異なる任意の正の数を底とする対数と，常用対数との間の関係についても論及する。

等式 $y=e^x$， $y=e^{-x}$ および $y=\ln X$で表わされる関数について，それを，グラフで表示する。

指数関数の，数学上および応用上の，もっと大きい意味は，次のことを説明することである。例えば，

生物体の成長

放射能の減衰

連鎖反応

など。

零点決定の問題から進展して，根号を含む方程式や，三角方程式の解法が取り扱かわれ，それによって，「方程式と不等式」への発展が，もっと広くなるのである。しかし，この際に注意することは，変形によって得られる最終の方程式が，つねにもとの方程式と，同値とは限らないことであり，これは，つねに，検討によって理解されることである。

解こうとする根号方程式は，一般に，平方根のみを含み，高高二度の平方によって，n次方程式となるものである。この，方程式の次数nが，2より大きいものは，わずかの例のみに止めるべきである。

角を含む方程式（三角方程式）については，次のタイプのものが解かれる。

ただ一つの三角関数のみを含む方程式

例　$2\sin^2 x-0.5=0$

　　$\tan^2 x-(\sqrt{3}+1)\tan x+\sqrt{3}=0$

等しい角について，多くの三角関数を含む方程式

例　$4\cos^2 x-2\sin x-2=0$

　　$\frac{2}{3}\sqrt{3}\sin x-3\cos x-2.5=0$

異なった角の三角関数を含む方程式

例　$4\sin\left(X+\frac{\pi}{6}\right)-2\cos x=\sqrt{3}$

有理関数以外の関数の微分法についての準備として，有理関数以外の関数の極限値を計算しておく。極限値$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$の計算は，手はじめとして直観からはじめる。極限値$\lim_{x\to 0}\log_a(1+x)^{\frac{1}{x}}$の導入は，単に概略をみるのみに止める。そのときに，まだ証明されていない定理「$\lim_{x\to 0}(1+X)^{\frac{1}{x}}=e$（$x\in P$）」および，「正の項と正の極限値をもつ収束数列は，それぞれ，対数をとってしらべることができる。」が利用される。これらの定理は，再生産可能な知識には属しない。

3. 1.　有理関数以外の関数の性質　　10時間

合理的な計算法則による新しい関数の作成，「互に逆の関数」の概念の導入，逆関数への移行による新しい関数の作成，関数の合成による新しい関数の作成

べき関数および根号のついた関数の復習

三角関数　$y=\sin x$，$y=\cos x$，$y=\tan x$，$y=\cot x$　および，$y=a\sin bx$（$a>0$，$b>0$）の復習

$y=a\sin(bx+c)$の導入

基本的な関係　$\sin^2 x+\cos^2 x=1$，および$\tan x\cdot\cot x=1$，　それに，正弦，余弦の加法定理の復習，正弦，余弦に対する半角および倍角の公式の説明，さらにいろいろな関係への論及

指数関数および対数関数の復習

極限値 $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$（$n\in N$）の存在の証明，数値を代入することによってこれが，$e=2.71$……に近づくことの決定，e^x および $\ln X$ の数表の使用，異なる底をもつ対数の間の関係

方程式　$y=e^x$，$y=e^{-x}$，$y=\ln X$　で表わされる関数の研究，これらの関数のグラフ表示

指数関数の，自然科学への，また同様に，工学，経済学への応用

3. 2.　根号のついた方程式，角に関する方程式　　15時間

根号のついた方程式の解法，角を含んだ方程式の解法

有理関数以外の関数の零点および極点の決定

3. 3.　有理関数以外の関数の極限値　　5時間

極限値 $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$　および $\lim_{x\to 0}\log_a(1+x)^{\frac{1}{x}}=\log_a e$の説明

4.　微分積分法とその応用（つづき）　　50時間

この最後の章においては，生徒は，第11学年の微分積分法に関する重要な知識について復習する。それに加えて，この章の目的は，微分積分の計算によって，より広い公式や法則を練習することであり，それによって，代数関数，三角関数，指数関数，対数関数の，さらに深めた取扱いをすることである。

第11学年で扱われた微分積分法の法則の復習については，生徒は，これらの法則の公式的応用の技術を確実にすべきであり，また，有理関数に関する知識を復習することが大切である。

ついで，互に逆の関数の導関数についての法則を導き，それから，有理数の指数をもつ，べき関数の導関数についての法則の成立の証明によって，その応用を考える。有理数の指数をもつ，べき関数の積分の積分に関する法則の成立を証明する。この微分積分の法則の練習によって，有理数の指数をもつべきを，根号を用いて表現する方法，および，その逆についても考える。

$y=[f(X)]^n$ ($n \in N$)の導関数に関して，第11学年で扱った法則の一般化として，合成法則〔Kettenregel； 合成関数の微分法の法則 ── 訳者註〕が得られる。特別な積分方法として，置換積分法を例によって取扱う。上述の法則の導入は，再生産可能な知識には属しない。しかしながら，これらの法則を独自で応用することができるようにする必要がある。

正弦関数の導関数は，極限値の利用によって得られ，また，その他の三角関数の導関数は，これに対して，すでに得られた三角関数の間の関係，および，正弦関数の導関数の応用として得られる。対数関数の導関数は，極限値の利用によって確かめられ，また，指数関数の導関数は，互に逆の関数の導関数についての法則の利用によって導びかれる。

生徒は，第11学年と第12学年に得た微分積分の法則（例えば，積の法則，商の法則，合成法則等）の技術を拡張すべきである。そしてこれは，独立に，比較的容易に，有理関数以外の関数にも，見通しよく応用することができる。

ここで取扱われるべき有理関数以外の関数の，導関数および基本的な積分を考察するためには，生徒は，既に得られた知識を，いろいろな問題に応用する必要があり，その際に，第11学年に得られた知識（曲線の研究，極値の問題，面積の計算）もまた必要となってくる。また，それによって，$y=a\sin(bx+c)$のような関数も，微分でき，また，積分できることになる。そのほか，いろいろな練習問題を選び，それによって，有理関数を研究し，またそれによって，この学年における，生徒の関数に関する知識を復習し，確実にする。

微分法の平均値の定理を復習する。曲線の研究においては，それは，より広い理論的考察をしないで，関数値 ── 零点も含んで ── の近似計算に応用される。しかし，これは広範な初等的計算に関してのみでなく，特に，実用上，近似計算の意味に関して適用されるものである。

積分計算の応用としての面積計算の問題から出発して，積分計算は体積の計算にも利用されることを導入する。体積の計算については，ここで特に研究すべき立体として，回転体を主とすべきであり，それは，生産および軍事技術（例えば，流線形の回転体）の意味において重要である。初等的な幾何学的立体，特に回転体の体積の計算については，生徒は，下級の授業で得られた公式によって証明する。

第12学年のこの最後の章は，系統的な復習，および，卒業試験の準備に役立てる一定の練習によって，有効なものとなる。特に，生徒は，数学の問題に関係のある，いかに小さな内容であっても，それをとらえ，それによって，各自の能力をのばすように進んでいくべきである。

4.1. 有理関数以外の関数の微分積分法　　15時間

有理関数の微分法の法則の練習，$y=x^n$ ($n \in G$, $n \neq -1$)の積分法の復習，整関数の積分法の復習

互に逆の関数の導関数に対する法則の説明，$y=x^r$ ($r \in R$)の微分法，$y=x^r$ ($r \in R$, $r \neq -1$)の積分法

$y=[f(x)]^n$ の微分法についての法則の復習，合成関数の説明と応用，置換積分法，

三角関数の微分法，正弦，余弦関数の積分法

対数関数の微分法，$y=x^{-1}$ の積分法，指数関数の微分法，積分法

4.2. 曲線の研究，極値の問題　　15時間

曲線の局所的状態に関する条件の復習，曲線の研究，微分法の平均値の定理を用いた関数値

の近似計算，極値の問題

4. 3.　面積，体積の計算　　20時間

定積分による面積の計算の復習
体積計算への定積分の応用
回転体の体積
基本的な立体図形（円柱，円錐，円錐台，角錐，角錐台，球，球欠）の体積の公式の証明

5.　卒業試験のための準備　　15時間