関数の指導について

上田外志夫

はじめに

関数の対応による指導が必要であることは，新指導要領を待つまでもなく，かなり以前から主張されて来ている。種々の研究会にこの主張が何度となく提出され，最近では既に陳腐な主張にさえなっている。しかるに，現在の教育界の実状はどうであろうか。先生方一人一人の授業内容は知る由もないが，教科書の大部分がそうなっていないことや，対応による定義を採用しても，あらためて“x が定まれば y が定まるとき，y を x の関数ということもある”と言いなおさざるをえないこと，指導内容が旧来のものと変化のないことを考え合せれば，大勢はやはり改善されていないと見なければならないであろう。私自身，定義だけは新しいものをかなり以前から採用しているが，指導内容の変更は殆ど出来ないでいる。これは自分の怠慢ばかりでなく，大学入試の制約が大きく原因している。新しいものを指導することは，現状ではその分だけ生徒の負担が増すことを意味する。指導要領が改定され，これから指導体系が出来上って行く今の時点において，私達教師がより望ましい指導内容や，その扱い方を求めることは，私達の日常の教育活動が今後の方向を決定していくことを思えば，常に努力して行かなければならない事でありながら，今であるが故に特に必要なことの様に思われる。

このレポートは新しい立場での関数指導の内容例が主な部分であるが，今後この様にあるべきだと主張しているのではない。私は現在，新しい立場での指導体系の例を殆ど知らない。だから，これがより良いものだとは比較し主張する相手を持たない。それ以前の段階にあるわけである。指導内容は昨年これに近い形で実施しているが，結果は決して良好ではなかった。さしたる反省も，実験と言われる程のこともしていない。この様な内容を組んでみたという粗案でしかない。これを公表し，御批判，御指導を頂くことにより，微力ではあるが，それなりに少しでもより良い日常活動を求めて行きたいと思っている。

1　対応による関数指導の目的

関数の指導の現代化を主張する人の中でも，その意図にかなりの幅がある様に思うが，大体つぎのようにまとめてみた。

(1)　関数概念を従来よりいっそう明確にすること。

(2)　関数（又は写像）の範囲を従来より広げるため。

(3)　対応の考えは現代数学の基礎概念だから。

(4)　関数の集合の構造を検討するといった関数の統合的な扱いをしやすくするため。

(5)　その他，物事の認識の仕方の分析をする道具として用いやすくするため。

これらの観点から，新しく導入すべき内容や，今までの内容の扱い方を変えることを検討したいのであるが，私の気付かない点があり，望ましい方向へ進めないかも知れないと怖れるばかりでなく，この目的を解釈する程度の差によって，具体的に表われて来る指導体系の差は，かなり大きいにちがいない。例えば(3)を次の様に二通りに考えてみる。

(イ)　対応を指導するに関数が適当であるからここで扱う。

(ロ) 対応はすべての数学の基礎概念であるから，単に一意対応のみならず，他の対応（関係）についても指導して，他の領域の内容をこれを基礎にして検討することが出来るようにしたい。

(イ)によれば，関数の定義を厳密にし，その他今までの内容を少してなおしすることとで十分であるとすることも出来ようが，(ロ)の立場をとれば，かなり新しい内容を盛り込むことにもなって来そうである。指導要領からは，関係とか対応という用語が入っていないことから，前者のように思うが，諸外国の指導内容には一意対応以外の対応も入れられ，対応指導に対してかなり以前から積極的に取組んでいる所が多いように思う。説明の要はないと思うが，(4)，(5)の意味は以下のつもりで書かれたものである。合成を一つの演算，逆関数をその演算に関する逆元と見たり，$F=f+g$，$G=af$ を $F(x)=f(x)+g(x)$，$G(x)=af(x)$ と定義して，ベクトル空間と見たり，その代数構造を調べたりすること等である。(5)は，あるものの数量的な面や位相的な面等を数学的な集合との対応によって認識しているはずであるとか，普通時間と気温との関係と言っているのは，実は（時間）→（数）→（数）→（気温）のことであると明確にすること，このことは厳密な関数の指導でないと把握出体ないはずだ，との主張である。

3　関数における諸概念，用語，記号の統一

Descartes が座標の考え方の萌芽と，未知の不定量の変動を考察し，Leibniz によって関数なる用語が導入されてから以後，数学の対象が広がるにつれて，関数の意味も次第に変遷して来ている。“変数と定数から組立てられた解析的な式”（Euler）とされたり，“変数 x の値の変化に応じて他の変数 y の値が定まっていけば，y は x の関数である”とされたりした。この定義にしても，解析的なもののみを扱った時代から，“y が全区間において同一の法則に従って x に関係することを要しないのみならず，その関係が数学的算法で表わされると考える必要もない”（Dirichlet）とされるようになり，さらに Cauchy，Riemann によって，変域が複素数へと拡張されてきている。現在の関数の概念は定説がないように思われる。(1) 一意対応が関数である（写像と関数は同義語）（ブルバキ，岩波辞典）(2) 関数は写像の一種である（新しい数学教育・文部省）(3) 関数の概念は明確になっていない（教師のための数学入門，遠山啓）の三種位であろうか。(2)の立場であっても，関数は定義域や値域が共に位相空間であるとするものもあれば，値域が実数や複素数またはベクトルであるとする人もある。私の読み方がよくないのかも知れないが，指導要領において，中学校では(1)の立場，高校においては(2)の立場に思えてならない。さらに(1)の立場においても，集合 X の任意の元 x に対して，集合 Y の元 y がただ一通りにきまるとき，y と x の関数といっても，この対応を関数と言っても，対応の規則のことをさしても，x，y で作られた順序対の集合を言っても，さして変わりはない。（中学校移行期の研究と展開）としているが，これは数学的な主張なのか，教育的な主張なのかはさだかでない。次に一つの関数を書き表わすとき，従来では式をかけば十分であったが，研究会等において，式と定義域をかくという主張と，式と定義域と終域（又は値域）を書くべきだとの主張がある。さらに気のついた問題点を列挙すると，今まで用いていた用語の中で，「関数 $f(x)$」「関数 $y=f(x)$」「関数 y」「関数の最大値」なる用法は認めるのかどうか（「関数 y」は不適当と思うが，「関数 $y=f(x)$」や「関数 $f(x)$」は x に対応する値域の元が $f(x)$ である様な関数と読めないこともない）。一次関数とか有理関数等は定義域がどんな場合であっても用いてよいか，（例えば $\{0,\ 1\}$ を定義域とする関数で，$f(1)=1$，$f(0)=0$ とすると，$f(x)$ を式で表現する方法は何通りでもあるが……），グラフと領域の使い分けは必要か，変数，変域等は今迄関数においてのみ用いられているが，それでよいか。

これらの問題をどう受けとめ，今後どうしていくかということは，一人一人にまかされるべきことではなく，統一見解を持たねばならないのではないかと思う。

4 指導内容

第一章　集合と論理

(1) 集　合

(2) 対　応（関係）

順序対，直積，対応

逆対応，対応の合成

対応の分類

二項関係（主として同値関係と大小関係）とその表わし方，同形

(3) 命　題

第五章　関　数

(1) 関　数

関数（写像）の定義

関数の分類

関数の表わし方

(2) 関数の性質

関数の決定，像，原像

増　減

凹　凸

対称性

変化率，平均変化率，導関数，接線，漸近線

(3) 合成関数

合成関数の定義

平行移動

拡大，縮小

対称移動

ある関数のグラフを平行移動，拡大，縮小することによって得られるグラフで表わされる関数の一般形

(4) 逆関数

逆関数の定義とその求め方

対称移動

対数の性質

対数関数の性質

合成関数と逆関数

5 指導の骨子

指導項目	内　容
第一章　集合と理論	
§1 集　合	略
§2 対　応	
順序対	∘事柄には2個のものを組にして考えれば都合の良いものがあること。 ∘順序を考えに入れた2個のものの組として定義。 ∘第1因子，第2因子の説明
順序対の相等	∘$(a,\ b)=(c,\ d) \rightleftharpoons a=c \wedge b=d$ $(a,\ b)\neq(b,\ a)$
直　積	∘$A\times B=\{(a,\ b)\mid a\in A\wedge b\in B\}$ ∘具体的に直積を作ってみること。 ∘直交座標は $R\times R$ の表現であること。
対　応	∘$A\times B$ の部分集合 G によって，A の元と B の元との間に定まる何か，を対応といい，$(a,\ b)\in G$ ならば a に b を対応させるという。 ∘始域，終域，定義域 $D=\{a\mid(a,\ b)\in G\}$ 値域　$R=\{b\mid(a,\ b)\in G\}$ ∘対応の直交座標に於けるグラフ，ベン図による表現
対応の相等	∘$A=A'$，$B=B'$，$G=G'$ のとき，G によって定まる A から B への対応と，G' によって定まる A' から B' への対応は等しいという。
逆対応	∘$G^{-1}=\{(b,\ a)\mid(a,\ b)\in G\}$ によって定まる B から A への対応を G によって定まる A から B への対応の逆対応という。 ∘ある対応のグラフとその逆対応のグラフの関係
対応の合成	∘G による A から B への対応と G' による B から C への対応の合成は，$G''=\{(a,\ c)\mid(a,\ b)\in G\vee(b,\ c)\in G'\}$ による A から C への対応である。 ∘G，G' を具体的に与えて G'' を作る。 ∘二つのグラフを与えて，その合成のグラフを作る。
対応の分類	∘定義域の一つの元に値域の元一つのみが対応するか，そうでないか，又，値域の一つの元が定義域の一つのみに対応するかそうでないかによって，多対多，1対多，多対1，1対1の対応という。多対1，1対1の対応を，一意対応という。
二項関係	∘$A\times B$ の部分集合 G によって，A の元と B の元の間に定まる何かを二項関係（対応）といい，この関係を R とかくとき，$(a,\ b)\in G$ ならば，$R\ (a,\ b)$ とか aRb とかく。
反射律	∘すべての A の元 a に対して，aRa なる関係 R は反射律を満たすという。 ∘反射律を満たす関係のグラフ上の性質。
対称律	∘aRb なら bRa なる関係 R は対称律を満たすという。 ∘対称律を満たす関係のグラフ上の性質。
推移律	∘aRb，bRc なら aRc なる関係 R は推移律を満たすという。 ∘推移律を満たす関係のグラフ上の性質。
同値関係	∘反射律，対称律，推移律を満たす関係を同値関係という。
同値関係の性質	∘同値関係を R とかくとき　$R^{-1}=R$　$R\circ R=R$ ∘等号，図形の合同，相似，剰余類に触れる。
半順序関係 全順序関係	∘反射律，推移律，aRb，bRa ならば $a=b$（反対称律）が成立する関係を半順序関係。A の任意の元 a，b に対して aRb 又は bRa がさらに成立する関係を全順序関係という。
ハッセ図	∘aRb を a は b 以上の位置にあると読んで図を描く。 ∘全順序関係のグラフ。

同　形

- 2つの集合 A, B の要素すべての相互関係（ここでは主に順序関係）を変えないような一対一対応がつけられるとき，A と B は同形という。

§3 命　題

略

第5章 関　数

§1 関　数

関数の定義

- $A\times B$ の部分集合 G が (1) $A=\{a \mid (a, b)\in G\}$ (2) $(a, b)\in G$, $(c, d)\in G$ なら $a\neq c$ を満たすときこの対応を A から B への関数という。

関数の分類

- 単射（1対1）全射（onto 上への）双射（1対1）1対1の意味は2通りの用い方がある様に思われる。
- 定義域や値域がどんな集合かによる分類（実関数，複素関数，集合関数）

関数の表わし方

式による表現

- 独立変数，従属変数（変数）；定義域や値域（変域）の元を代入すべき場所を表わす文字。
- ブラックボックス，関数記号の説明，定義域は明示しなければならないこと，終域もはっきりしないときは書くことを強調。
- 等号や演算で表現される為には定義域や値域がどんな集合でなければならないかの検討。
- 式による表現の形 $y=f(x)A$, $x\mapsto f(x)A$, $x\mapsto y=f(x)A$, $f(x, y)=0A$ （Aは定義域）
- 単に関数であることを表わす記号，f ; $A\to B$, $A \xmapsto{f} B$

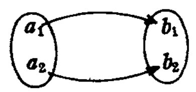
順序対の列記

- $G=\{(a_1, b_1)\ (a_2, b_2), \cdots\cdots\}$

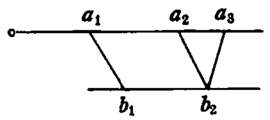
ベン図形式

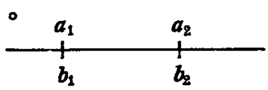
-

x	a_1	a_2	………
y	b_1	b_2	………

- 

グ ラ フ

- 直交座標 

- 

- 極座標に関しもこのような表わし方もあるという程度に触れる。

§2 関数の性質

- ここに於ては主として定義域，値域が実数の関数，特に $y=x^2$, $y=\frac{1}{x}$, $y=\sqrt{x}$, $y=2^x$を扱うが，必要に応じてその他のものも考える。

関数の決定

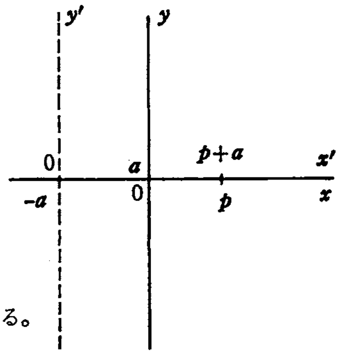
- 文章題から関数を決定し，色々な表現の仕方をしてみること。
- ある方法で表現された関数を他の方法で表現すること，特に式で表現すること。
- 式で表現された関数を直交座標上に表現すること。（多くの点を取り概形をつかむ程度）
- グラフ上の特殊な点，例えば軸との交点や定義域の区間の端と対応する点を求める。

増加減少

- ある区間で，またはすべての定義域での増加減少の定義。
- 上記の関数の増減を調べる他に $y=x^3$ や，図形から その面積への関数を扱ってもよい。
- 値域の最大元，最小元を考える。
- 増減が考えられる関数の定義域や値域はどんな集合かを考える。

凸　凹

- 凹凸の定義は f が $a<x<b$ で，下に凸とは $a<x_1$, $x_2<b$ なる任意の x_1, x_2 に対して $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)<\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$ を用いる。

	対 称 性	∘ $f(-x)=f(x)$, $f(-x)=-f(x)$ なる性質を持つ関数が y 軸，原点に関して対称となることをグラフを用いて直観的に理解する。 ∘ $y=x^3$ も扱う
	平均変化率	
	変化率，導関数	∘ $y=x^2$, $y=\sqrt{x}$, $y=\frac{1}{x}$ の導関数が直観的に求められる程度の指導で，lim の記号は用いるが lim の線形性等は扱かはない。$f'(x)$
	接線の方程式	∘ 接線は接点の近くで最もその曲線に近い直線であることを指摘し，あくまでも上記の関数の検討の道具として用いるにとどめる。
	漸 近 線	∘ $\lim_{x\to\infty} f(x)$ $\lim_{x\to a+0} f(x)$ $\lim_{x\to a-0} f(x)$ の意味。 ∘ $y=\frac{cx^2+dx+e}{ax+b}$ をも扱うが，漸近線を求めることのみを考える。
	∞に於ける状態	∘ $\sqrt{x}$, x^2, x^3, 2^x の発散の早さを直観的に考える。
§3	合成関数	
	合成関数	∘ 合成関数を考えることの必要性。 ∘ 合成関数の定義。 $(a, b)\in G\subset A\times B$, $(b, c)\in G'\subset B\times C \longrightarrow (a, c)\in G''\subset A\times C$ ∘ 関数の縮小と延長の定義，合成可能な為の条件。 ∘ ベン図形式による合成関数の説明。 ∘ 合成関数の式による表現。 ∘ 二つの直交座標が f と g のグラフが与えられているとき g, f のグラフを直交座標で描く。 ∘ 結合法則が結立すること。
	平行移動	∘ $P=\{P_a ; A\to B \mid P_a(x)=x+a$, a は実数, A, B は実数の部分集合$\}$ の元とその他の関数 f との合成，式を求める。 定義域，値域の検討。 ∘ 前項の方法でグラフを描き，f と fP_a, P_af のグラフの間の関係をみる。 ∘ x 軸と一致させた x' 軸を考え，x 軸上の p の目盛ってある点の x' 軸の目盛が，$p+a$ であるようにする。x' 軸と y 軸（必要があれば，x' 軸上の目盛が 0 である点を通り y 軸と平行な直線を y' 軸と考えてもよい）によって定まる座標平面で f のグラフを描き，その図形を x-y 平面でのグラフと見ればそれが fP_a のグラフであることを理解する。  ∘ 同様の方法で P_af のグラフを理解する。 ∘ 平行移動したグラフの式を求める。 グラフ⟶式　　式⟶グラフ ∘ P_afP_b のグラフを考える。 $P_af=F$, $fP_a=G$ と一つの関数として見る目を養う $P_aP_b=P_{a+b}$ なること。 P の任意個の元と f との任意の順序での合成によって得られる関数の一般形。 ∘ f の性質（§2 で考えた）が，P_a と f との合成によって，どのように変わるかを見る。
	軸方向への拡大	∘ $E=\{E_a ; A\to B \mid E_a(x)=ax$, a は実数, A, B は実数の部分集合$\}$ の元とその他の関数 f との合成。式を作る。定義域，値域の検討。 ∘ x 軸と y 軸の目盛の大きさが等しい座標平面に於ける f のグラフと異なった目盛のグラフとの関係を見る。

	∘ x 軸基準，y 軸方向へ a 倍に拡大ということの意味。 y 軸基準，x 軸方向へ a 倍に拡大ということの意味。
	∘ x 軸と一致させた x' 軸を考え，x 軸上の p の目盛ってある点の x' 軸の目盛を ap となるようにする。x'-y 平面での f のグラフを x-y 平面でのグラフと見れば，それが fE_a のグラフであることを理解する。
	∘ 同様の方法で E_af グラフを理解する。
	∘ ある軸を基準，他の軸の方向に拡大したグラフの式を求める。 グラフ⟶式　式⟶グラフ
	∘ E_afE_b のグラフを考える。 $E_aE_b=E_{ab}$ なること。 E の任意個の元と f との任意の順序での合成によって得られる関数の一般形。
	∘ §2 で考えた f の性質は，E_a と f との合成によってどのように変わるかを見る。
	∘ P の元と E の元と f との合成によって得られる関数の式とグラフ。
	∘ $E_aP_b \neq P_bE_a$ なること，そのグラフ上の意味。
対称移動	∘ fのグラフと fE_{-1}，$E_{-1}f$ のグラフはそれぞれ y 軸，x 軸に関して対称であること。$E_{-1}fE_{-1}$ のグラフは f のグラフと原点に関して対称であること。
	∘ $f=fE_{-1}$ ならば，f のグラフ自身が y 軸に関して対称であること。 $f=E_{-1}fE_{-1}$ のときも同様に考える。
	∘ y 軸に関する対称移動と，x 軸方向への平行移動を適当に合成すると，$x=a$ に関する対移移動になること。
	∘ f のグラフを $x=a$ に関して対称移動したグラフによって表わされている関数の式。E_{-1} と P の元と f との合成で表わす。
	∘ f のグラフと $y=b$ に関して対称に移動したグラフによって表わされている関数について上と同様の方法で考える。
	∘ 点（a，b）に関する対称移動は，$x=a$ に関する対称移動と $y=b$ に関する対称移動の合成であること。
	∘ f のグラフを点（a，b）に関して対称移動したグラフによって表わされている関数の E_{-1}，P の元，f との合成による表現，関数の式による表現。
二次関数	∘ 定義域が実数全体 R の二次関数の性質の，今迄出た結果をまとめる。 ㋑ $y=x^2$ の性質　① 値域（その最小な元が 0 であること）　② 増 減　③ 対称性　④ 凹 凸 ㋺ $E_af=fE_b$ なる b が，$a>0$ に対して定まること（その逆） ㋩ $P_afE_bP_c$ 又は $P_aE_bfP_c$ によってすべての二次関数が表わされること。 ㊁ 平行移動，対称移動の所で行なった性質の変化の復習。
分子分母が一次の分数関数	∘ 定義域が $R-\{p\}$，（p は分母を 0 にする値）の一次分数関数の性質のまとめ。 ㋑ $y=\frac{1}{x}$の性質　① 値域　② 増減　③ 対称性　④ 凹凸　⑤ 漸近線 ㋺ $E_af=fE_b$ なる b が a に応じて定まること（その逆） ㋩ $P_afE_bP_c$ 又は $P_aE_bfP_c$ によってすべての一次分数関数が表わされること。 ㊁ E_a，P_a との合成による性質の移動。
f と P，E の元との合成によって得られるれる関数の一般形	∘ $P_aP_b=P_{a+b}$，$E_aE_b=E_{ab}$，$E_aP_b=P_{ab}E_a$，$P_aE_b=E_bP_{\frac{a}{b}}$を定理とする。
	∘ $fP_aE_bP_c$……等は適当な α，βを用いて $fE\alpha P\beta$ 又は $fP\alpha E\beta$ なる形

	にかけること。 ∘ $P_a E_b \cdots\cdots f$ 等は $P\alpha E\beta f$ 又は $E\alpha P\beta f$ の形にかけること。 ∘ P，E の元の任意個と f との任意の順による合成は $P\alpha E\beta fP\gamma E\delta$ 等の形でかけること。
§4 逆関数	
逆関数	∘ ある関数の逆対応が関数である為の条件。 ∘ 逆関数の定義。$f^{-1}f(x)=ff^{-1}(x)=x$ なること。 ∘ 逆関数を式を用いて表わす。 ∘ 逆関数をグラフ。 ∘ ある関数が双射でないとき，その関数の定義域を適当に類別して，各類から終域への関数が単射である様にする。その各々の終域を値域と一致する様に狭くして，各々の逆関数を考える。
無理関数	∘ $f(x)=x^2\ \{x\geqq 0\}$ の逆関数が $y=\sqrt{x}$ であること。
（根号内が一次式）	∘ 既習の $y=x^2$ の性質と $y=\sqrt{x}$ の性質の比較によって，$y=x$ に関しての対称移動によって性質がどう変わるかを見る。
対称移動	∘ $y=x$ に関する対称移動による性質の移動。 ∘ f^{-1} と E，P の元との合成関数によって，$y=x+k$，$y=-x+k$ に関する対称移動を扱ってもよい。
対数の性質	∘ 指数関数の逆関数として対数関数の定義をする。 ∘ 対数に関する用語記号 ∘ $a^{log_a x}=log_a a^x=x$ と $a^{\alpha+\beta}=a^\alpha$，$a^\beta$ より対数の性質を導く。普通，対数の性質とされるものの他に $log_a\alpha x\alpha=log_a x$ を入れてもよい。 （注　能力のある生徒に対しては，$f^{-1}f(x)=ff^{-1}(x)=x$ と $f(\alpha+\beta)=f(\alpha)f(\beta)$ を用いて導びいてもよい） ∘ 対数計算，計算尺の簡単な解説
指数関数	∘ 定義域が R の指数関数の性質のまとめ。 ㋑ $f(x)=2^x$ の性質 ① 値域 ② 増減 ③ 凹凸 ④ 漸近線 ⑤ $\pm\infty$ に於ける状態 ㋺ fE_a によって底を任意の正数に変換出来ること。 ① $y=a^x$ と $y=\left(\frac{1}{a}\right)^x$ の対称性。② $y=a^x$ の増減，凹凸漸近線，（0，1）を通ること。$\pm\infty$ に於ける状態 ㋩ $fP_a=E_bf$ なる $b>0$ が a に応じて定まること（その逆）
対数関数	∘ 対数関数の性質のまとめ。 ㋑ $f(x)=\log_2 x$ の性質を，$y=2^x$ の性質をもとにして考える。 ㋺ E_af によって，底を任意の正数に変換出来ること。指数関数の場合と同様に $y=log_a x$ の性質をとらえる。 ㋩ $P_af=fE_b$ なる $b>0$ が a に応じて定まること（その逆） ㋥ $b<0$ のときの fE_b の検討。
合成関数と逆関数	∘ 合成には結合法則が成立すること，交換法則が成立しないこと。 ∘ 恒等関数の定義とその役割。 ∘ 逆関数の役割。 ∘ $(fg)^{-1}=g^{-1}f^{-1}$ なること。 ∘ $fp=g, q\cdot f=g$ なる関数 p，q を求めること。 ∘ 一次分数関数の逆関数 ㋑ $f(x)=\frac{1}{x}$ のとき $f=f^{-1}$ なること。 ㋺ $P_a^{-1}=P_{-a}, E_a^{-1}=E_{\frac{1}{a}}$ なること。 ㋩ 一次分数関数の逆関数を求める。 ∘ 同様の方法で，二次関数，指数関数の逆関数を求める。

以上は指導の骨組であり，例や練習問題はいっさい省いた。これらはまだ検討が不十分であるためであり，また自分の意図が不明確になることを怖れたからでもある。ここに書かれた文章は，このまま生徒に与えることが不適当である部分も多いであろうと思う。内容には三角関数が入っていない。これは同じような方法を用いるにしても，別に扱った方が扱いやすいと考えたからである。指数の拡張は，数式の無理数の所で行なうつもりである。これは実数の構造の検討にも役立つと考えたからである。この章はそれ以後に位置する。内容はかなり多いが，適当な量にするための取捨選択はしなかった。自分で実行するときも，一部を省かねばならないと思う。昨年は第一章の二項関係の指導はしなかった。

第一章の内容は教材の扱い方の現代化のために不可欠の内容であると思う。関数そのものの指導のためであるより，対応（関係）の考え方を他の領域に生かすための準備である。第5章の §2は $y=x^2$，$y=\sqrt{x}$，$y=\frac{1}{x}$，$y=2^x$ の性質を調べるのを主な眼目としているが，ある関数の性質を把握するための観点は何か，という問の答として各項目を作ってみた。しかし各項目を理解するに必要な他の関数を材料にすることを拒んではいない。§3は §2で調べた関数のグラフを平行移動，拡大縮小，対称移動することによって得られるグラフが表わす関数の性質と，これらの移動によって得られる関数の範囲を合成によって検討するという態度を貫いた。§2に $y=\sqrt{x}$ を入れたのは，§4の指導をより容易にするためである。合成を一つの演算と見てその代数的構造を調べることは，定義域，値域が関係して来てきれいに行かないことでやめたが，E.Pの元の定義域を実数全体とすると，$\{E_aP_b|a, b\in R, a\neq o\}$ は，非可換な群になる。

昨年指導してみて感じたことは，かなり抽象度が高いために，かなりの抵抗を予想したのであるが，教師が難かしいと感ずる程生徒は抵抗を感じないようである。今までより意欲的に学習したものも少なくない。合成する関数の個数が多いことに複雑さを感じた生徒もあったが，二つの関数の合成の繰返しであることを徹底出来れば避けることが出来ると思う。扱う関数の範囲が限定されたために，関数とは実数を始域，終域とする対応の一種であるとの印象を与えるかもしれないという怖れは杞憂でしかなかった。他の領域で，その他の関数を指導すれば，広い意味で理解出来るようである。

参考資料1，諸外国における関数指導

米　国

(1) CEEB

第11学年

一次関数

1　順序対，順序対の集合，関数，
公式や表やグラフで定義された関数

2，3，一次関数の基本性質，グラフ。

二次関数

指数と対数

第12学年（上級数学）

初等関数

I　集合と組合せ

1　集合の概念の復習と発展

2　順列と組合せ

Ⅱ　関数と関係

1　順序対の集合，直積

2　関数の定義（順序対の集合として）グラフ表示，関数の指定法（表，グラフ，公式，法則），値域，$f(x)$

3　関　　係

4　逆関係と逆関数

Ⅲ　整関数（ここで微分が入って来ている，slope function として）

Ⅳ　指数関係

Ⅴ　対数関数

Ⅵ　円 関 数

(2) NCTM　(24年報)

幼稚園から第12学年およびそれ以上での数学の指導の7つの柱の第2に関係と関数を上げ，「数の順序対から成る集合は，数学では重要な概念である。そしてこの概念はあらゆる学年で頻繁に使われる」とし，順序対，直積，関係の中で同値関係等が重視され，関数は関係の一種とされている。二項演算，集合関数等にも触れたいとしている。

(3) UICSM

第9学年

順序対とグラフ

格子点，数平面，式のグラフ，その他

第10学年

関係と関数

関係，集合間の演算の原理，関係と幾何学的図形，関係の性質，関数，変量，一次関数，一次関数の応用，二次関数，二次方程式，連立方程式

第12学年

初等関数

主として実数，有理数の性質，指数対数関数，付録に単調性，連続性等

円関数と三角法

整関数と複素数

(4) SMSG

第9学年用

2変数を含む開いた文の真理集合

順序対を導入，平面上の点と，実数の順序対 (x, y) との一対一対応に触れる。

関　　数

ブラックボックスを用いて，関数，定義域，値域を定義し，関数記号，関数のグラフ，一次関数，二次関数，二次方程式の解の説明等が内容である。

第11学年用

関数の一般的な定義

定義域，値域，f，$f(x)$ の説明，合成関数，逆関数，一次関数

二次関数

指数対数関数

三角関数

第12学年

初等関数

関数，整関数，整関数のグラフへの接線，指数及び対数関数，円関数

初等関数に写像の概念を用いている，合成や逆関数の観念が強調されている。

(5) ニューヨーク州の試案

第12学年用

関　係

順序対，直積，関係の定義，不等式 $y<x$ も関係と関連させ，その解をグラフ上に表わしている。逆の関係の定義とそのグラフ上の意味を考え，最後に関数関係に移り，二次関数までと最大整数関数〔x〕を上げ，逆関数，関数間の演算合成でこの単元を終っている。

より一般な関数。

n 次関数，分数関数，無理関数，初等超越関数を方程式不等式を含めて指導

(6) ケンブリッジ会議

数学教育の全般的な目標の中で，集合，関数，変換群，同型写像の考えは，なるべく初期に導入し，くりかえし適用することにより，論証化された考え方が出来るようにするのがよい，とされ，3学年～6学年のためのカリキュラムの中に，集合，関係，関数の学習，離散または連続の場合における関係と関数のグラフ，実験的に定められる関数のグラフ，聞いた文とその真理集合との関係，同型写像，変換の概念が入っている°7～12学年に対しては，二種類用意され，第一案では7～8学年では有理式と関数，多項式の導関数，11～12学年では微積分と指数，対数，三角関数が入っている。第二案において，7～8学年で解析幾何学の直線，円，放物線，また合成関数，逆関数，関数方程式，多項式関数，9学年では微積分の初歩，11～12学年で微積分と指数，対数，三角，双曲線関数の指導を主張している。

米国以外

(7) OEEC

サイクルⅠ（中学校相当）

- 元の集合の理論の初等概念，それらの性質と関係
- 集合から他の集合への写像

二項関係，三項関係，包含関係

二項関係として，関係，関数，逆関数，合成関数，同値関係，推移的関係，順序（全，半）等

- x，y 軸を用いて表わされたグラフと，それによって表わされる関数
- 比例する量
- 関数 $x \to ax+b$（xは整数，又は有理数）とそのグラフ。
- 二次関数 $x \to x^2$ とそのグラフ。
- 正の数の平方根，$x \to \sqrt{x}$ と $x \to -\sqrt{x}$
- 同形写像

サイクルⅡ（高等学校相当）

第一学年，写像（関数の概念），関係（特に同値と順序）

第二学年，関係の一般概念，群（同形，準同形）

第三学年，写像，合成写像，全射，単射，逆写像，関係，写像のグラフと関係のグラフ

(8) フランス

第３級（中学３年）

変数と関数の概念，関数 $ax+b$，比例の意味，グラフ表示

第２級（高校１年）

対応としての関数概念，$y=f(x)$，比例，ある区間上での増減，定数関数，一次関数，二元一次方程式，二次関数，$y=\frac{a}{x}$，$x\to 0$　$x\to\infty$等

第１級（高校２年）

一次分数関数，導関数，円関数

完成級（高校３年）

関数，増分，増加関数，減少関数の復習，直交座標，軸の平行移動，一次式と直線，微積分

（数学教育の現代化，日本数学教育会編，培風館　による）

参考資料２，指導要領の解説書等に見られる関数の指導の目的。

1　中学校指導書，数学科編，文部省

関数の概念についても，いっそう明確にして指導が出来るようにする。

集合，関数，確率などの新しい概念は，単に形式的に内容を指導すればよい，ということでなく，数量，図形などの概念の理解，数量関係の考察などに際して，それらの観点に着目した指導が行なわれる様な方向を考慮し………

2　中学校，新しい数学教育，数学教育現代化講座指導資料，文部省

数個の対から一般の関係を見出すというような，帰納的思考の重視。今世紀初めの数学改良運動の一つの強調点である。

操作に目をつけることにより，事柄の本質を明らかにすること。正三角形に120°の回転という換作があることにより，正三角形の本質にせまる。

関数を用いること。特性関数により，一つの集合を決定出来る等。

3　中学校学習指導要領の展開，数学科編，原弘道，大野清四郎

関数教材のねらい，という項の中で，関数眼を作ることが大切で，それは次の様な考え方を植えつけことにある。としている。

① 究明し処理しようとしている事象を必要な角度から抽象化し，集合Xとしてとらえる。

② 集合Xの性質を調べるため，集合Yを設定する。そのためには

㋐ 事象に含まれていない別の集合Yをつくる。たとえば学級の生徒に関する数的な処理のため，生徒に番号をつける。

㋑ 事象にきわめて関係の深い集合Yをつくる。たとえば図形の性質を調べるため，いくつかの線分の長さを測定する。

㋒ 事象中に含まれる２組のものをそれぞれX，Yという集合とする。たとえば鶴亀算で鶴の数を表わすべき自然数の集合をX，亀の数を表わすべき自然数の場合をYとして，２つの集合の元の間の関係を表わす関数を２つつくり，それぞれを２元１次方程式とする。

その他，関数眼は数学的な考え方の根底に横たわってきわめて重要であるが，その指導を効果的にするためには，関数を中学校の数学の他の部分にも染みわたらせなくてはならない。ともしている。

4　高等学校，新しい数学教育，数学教育現代化講座資料，文部省

集合の概念は，写像や関係の概念と並んで，数学の最も深い所に横たわる基礎概念である。それらは他の概念を明確な数学的対象として構成するための元素的な存在なのである。

高校で扱う関数の範囲は，きれいなものだけであるが，写像と見る思想，見方は，それにかかわらず非常に大切であり，現代数学の特徴を示す基本である。

5　改定高等学校学習指導要領の展開，数学科編，秋月康夫編

関数の概念を従来よりいっそう明確にし，一つ一つの関数というより，関数一般の立場で，より広い視野に立って，統合的・発展的に考察しようとするための手直しである。

参考資料3，中学校新指導要領

〔第一学年〕

1　目　　標

(3)　事象における変化の考察において，変数や対応の見方や考え方を深め，関数関係を見出し，それを用いる能力を伸ばす。

2　内　　容

B　関　　数

(1)　二つの集合について，その要素間の対応関係を考え，関数についての理解を深める。

ア　変数と変域の意味

イ　関数の意味

(2)　関数を表わすのに，表，グラフ，式などが用いられることについて理解させ，それらによって表わされた関数の特徴を調べることができるようにする。

ア　関係を表わすのに式が用いられること，および式の中の文字を変数や定数と見て，変数間の対応関係について考察すること。

イ　座標の意味

ウ　関数について，対応する値の組を表やグラフに表わすこと。

エ　関数のとる値の増加や減少

(3)　次の用語を用いることが出来るようにする。

変数，定数，変域，関数，座標，座標軸，原点，比例定数

3　内容の取り扱い。

(5)　内容Bの(2)のアについては，式の形から見た比例および反比例の特徴についても取扱うものとする。

〔第2学年〕

1　目　　標

(2)　変数や対応の見方や考え方をいっそう深め，関数を広く用いる能力を伸ばすとともに，一次関数の特徴を理解させる。

2　内　　容

B　関　　数

(1)　関数についての理解をいっそう深めるとともに，それを広く用いる能力を伸ばす。

ア　関数を表わすのに，fなどの記号が用いられること。

イ　二元一次方程式は二つの変数の間の関数関係を表わすものともみられること。

(2)　一次関数の特徴について理解させ，それを用いる能力を伸ばす。

ア　一次関数を表わす式の形とグラフの特徴

イ　対応する変数のとる値の変化の割合が一定であること。

ウ　事象の中には，一次関数を用いて近似的にとらえられるものがあること。

(3)　次の用語を用いることができるようにする。

一次関数，傾き（こうばい），切片。

〔第3学年〕

1　目　　標

(3)　簡単な関数について，その特徴の調べ方を理解させ，関数についての理解を深める。

2　内　　容

B　関　　数

(1)　簡単な二次関数の特徴について理解させる。

ア　次の式で表わされる関数のグラフの特徴。

$y=ax^2$，$y=ax^3$（数係数の場合）

イ　上記アに示す関数について，対応する変数のとる値の変化の割合が一定にならないこと。

(2)　簡単な関数について，逆関数の意味を理解させる。

(3)　次の用語を用いることができるようにする。

二次関数，放物線，定義域，値域，逆関数

3　内容の取り扱い

(4)　内容のBの(2)については，生徒によっては取り扱わなくてもさしつかえない。

参考資料4，高等学校新指導要領

第2，数学Ｉ

1　目　　標

(3)　写像の概念を理解させ，また基本的な関数の特徴を理解させる。

2　内　　容

B　解　　析

(1)　写　　像

写像の意味およびその合成と逆写像について理解させ，また，関数を写像としてとらえることができるようにする。

ア　写像の意味

イ　写像の合成

ウ　用語および記号

写像，合成（写像に圏するもの）逆写像

(2)　簡単な関数

二次関数など簡単な関数の特徴について理解させる。

ア　二次関数，関数　$y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$

イ　指数関数，対数関数

ウ　用語および記号

累乗根，指数法則，底，指数関数，対数，対数関数，$\log_a x$

(3)　三角関数

正弦，余弦および正接の意味を理解させ，三角形の辺と角の間の基本的な関係を考察できるようにする。また三角関数の意味とその周期性を理解させる。

ア　正弦，余弦および正接の意味

イ　三角形の辺と角との間の基本的な関係

ウ　三角関数とその周期性

エ　用語および記号

正弦，sin，余弦，cos，正接，tan，一般角，動径，ラジアン，三角関数，周期，周期関数

3　内容の取り扱い

(3)　内容のBの(1)　については，平面上の平行移動，対称移動（座標軸または直線 $y=x$ に関するものの程度）を含むものとする。

(4)　内容Bの(2)のアのうちの二次関数の逆関数については $y=\sqrt{ax+b}$ の程度とする。

(5)　内容Bの(2)のイについては，対数計算は取り扱わないものとする。