数学Ⅰにおける確率・統計指導の実際

米 谷 数 子　能 崎 克 己

【は じ め に】

確率・統計は現行の指導内容では数学Ⅲで指導されることになっているが，最高学年でもあり，大学入試直前でもある関係上，とかく軽視される傾向にある。しかし確率統計的なものの見方は最近では特に重視されており，その目的を十分に達成するために，確率および記述統計ならびに推測統計の基本的な一部を数学Ⅰに入れて1年で指導しようと試みた。確率統計を早期に指導することの趨勢はすでにできているようにも思われる。すなわち，小学校や中学校でも新しい教育課程にはこの内容をとりあげることは既に明示されていることであるから，高校においても現行の数学Ⅲではじめて扱うことの反省は既になされているところではあるが，例えば確率の考えを必要とする場面はいくらも日常生活の中に表われ，常識的に既に使われて居りながら，案外曖昧な知識のまま間違った表現や考え方が一般的に流布していることがある。すなわち，この内容は，日常生活の身近な問題の中にも幾多の考えねばならない問題を含んでいる。また他教科一特に社会，理科などでもこれを応用する必要性など考えても，これはなるべく早い時期に学習することが望ましい。しかし実際に高校において例えば数学Ⅰの内容としてこれを扱う場合，中学校との関連，或は，他の指導内容との配列などの点について考慮を払わねばならない。また推測統計では十分な理論的背景のもので指導することができない。しかも1年で指導を試みるため標本調査の実際，乱数表の利用，標本平均の分布およびこの分布の平均値，標準偏差と母平均，母標準偏差の関係などを主として実験実習を通じて学習し，これによって母平均を一定の信頼度で推定する意味を理解する程度までをその内容として指導を試みた。この計画は前にあげた高校数学科の試案の指導内容に基いて試みたものであり，1年において実施した確率・統計の学習例の概要を以下に展開してみたい。まず，その展開の筋を明らかにするために，その主な項目と時間配当を示す。

〔指導内容と時間配当〕

確　率	(19時間)	統　計	(16時間)
1. 確率の意味	(2時間)	1. 資料の整理	(1時間)
排反事象　和事象　全事象　部分事象		変量，階級，度数分布，ヒストグラム	
確率の公理　余事象		2. 代表値と散布度	(5時間)
2. 場合の数	(7時間)	平均値，メジアン，モード	
和の原則　積の原則　順列　組合せ		範囲，平均偏差，標準偏差，チェビシェフの定理，標準測度・偏差値とその利用	
円順列　重複順列　重複組合せ			
3. 確率の求め方	(5時間)	3. 相関関係	(2時間)
条件つき確率　複合事象　乗法定理		相関図，相関表，相関係数	
独立事象　従属事象		4. 標本調査	(3時間)

独立試行の定理 4．統計的確率　（2時間） 実験　大数の法則　生命表 5．期待値　（1時間） 期待金額　平均余命 6．まとめと演習　（2時間）	全数調査と標本調査，母集団と標本，乱数表，正規分布 5．平均値の推定　（3時間） 標本平均の分布，平均値の推定 信頼度，信頼区間 6．まとめと演習　（2時間）

以下に学習指導の実際に当って特に留意した点などについて，記すことにする。なお，学習の展開は，上記の指導内容と時間配当に従って確率と統計を併行して指導した。

〔指導上の留意点と実験例〕

∘ 確率の意味について

ある事象の起ることがどのくらい確からしいかを数で表わしたものが確率であって，これを定義する場合，いろいろの立場があるが，矢張り，数学的構造を理解させる一つの重要な教材として考えるとき，また，更に広い意味ですなわち連続量の確率への拡張などを考えるとき，Kolmogorov の公理体系から出発することに躊躇はなかった。が，実際問題の解答，指導の立場からみて，古典的な立場すなわち Laplace の定義も理解し易い点で，時にはこれで考えてよいこと，その両者が矛盾しないものであることを指導面でつぎのような考慮を払った。

（確率の公理）

〔I〕全事象Eの起こる確率は1　$P(E)=1$
　空事象Φの確率は0　$P(\Phi)=0$

〔II〕任意の事象Aの起こる確率は区間〔0，1〕の数で表わされる　$0\leqq P(A)\leqq 1$

〔III〕A，Bが排反事象ならすなわち$A\cap B=\Phi$のとき　$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$（加法性）

以上の公理に基いて確率の定理が導かれる。

（定理1）（加法定理）

(イ)一般に2つの事象A，Bについて
$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

(ロ)A_1，A_2，……，A_nが排反事象なら
$P(A_1\cap A_2\cup\cdots\cdots\cup A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots\cdots+P(A_n)$

（定理2）（余事象の確率）

$P(\overline{A})=1-P(A)$

（定理3）（等確率の定理）

(イ)全事象Eがnこの部分事象の和事象で，起こる確率がすべて等しいとき，そのうちの一つの事象の起こる確率は$\frac{1}{n}$である。

∘ 平均値は，$\overline{x}=\frac{1}{N}\Sigma f_ix_i$ (1)から出発し度数分布については仮平均$\overline{x'}$を用い，変量 $u_i=\frac{x_i-\overline{x'}}{c}$（$c$；階級の幅）を導入して$\overline{x}=\overline{x'}+\frac{c}{N}\Sigma f_iu_i$ (2)を用いて計算する。この際，Σの記号を導入し，(1)から(2)への式の変形も学習する。

∘ 標準偏差についても平均値と同様に扱い，$\sigma=\sqrt{\frac{1}{N}\Sigma f_i(x_i-\overline{x})^2}$から出発し，これを変形して$\sigma=\sqrt{\frac{1}{N}\Sigma f_ix_i^2-\overline{x}^2}$とし，さらに$u_i$を用いて$\sigma=c\sqrt{\frac{1}{N}\Sigma f_iu_i^2-\left(\frac{1}{N}\Sigma f_iu_i\right)^2}$を導き，これを用いて計算する。

∘ 標準偏差の意味については，チェビシェフの定理の意味を知り，かつこれを証明する。また，標準偏差の一つの利用として，標準測度$\frac{x_i-\overline{x}}{\sigma}$さらに，最近学力テストの評価法としてよく利用されている偏差値$\frac{10(x_i-\overline{x})}{\sigma}+50$　にふれ，正規分布表を用いてその意味を理解する。なお，正規分布についてここでは軽くふれ正規分布表を利用する程度とする。

∘ 相関関係は，中学校で学習している相関図，相関表について復習し，個個の資料にについて相関係数　$r=\frac{1}{N\sigma_x\sigma_y}\Sigma(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})$ を計算し，その意味を知る程度とする。さらに，相関表を用いた場合の相関係数の計算法，また，$|r|\leqq 1$ の証明も，進んだ生徒には学習させることも考えられる。

∘ 標本調査は，母集団からの標本抽出を実習する。なお，どの資料も，抽出される確率が全く等しいと考えられるように配慮することを強調

(ロ)全事象 E がnこの等確率の部分事象の和事象で，そのうちのmこの部分事象の和事象の確率は$\frac{m}{n}$である。

この（定理3）は以下に示す例などによって，明かに理解させることができる。

（硬貨を投げて表が出る確率）

通常の硬貨ならば表が出ることも裏が出ることも同様に期待される，そのどちらでもなく垂直に立つことは殆んどないから，全事象Eは，表が出ることAと裏が出ることBの和事象となり $E=A+B$ （$A\cap B=\phi$ のとき $A\cup B$ をこのように＋で表わすとする）かつ $P(A)=P(B)\cdots\cdots(1)$

（公理3）により $P(E)=P(A+B)=P(A)+P(B)$

（公理1）により左辺は1に等しいから

$P(A)+P(B)=1$ そこで(1)によって

$2P(A)=1 \quad \therefore P(A)=\frac{1}{2}$

（1個ののサイコロを振るとき1の目が出る確率）

サイコロを振ってiの目が出るという事象をA_iで表わすと，$E=A_1+A_2+A_3+A_4+A_5+A_6$

$P(E)=P(A_1+A_2+\cdots\cdots+A_6)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots\cdots P(A_6)$ もしどの目も同様に出易いとすれば，

$P(A_1)=P(A_2)=\cdots\cdots\cdots=P(A_6)$ により，

$P(E)=6P(A_1)=1 \quad \therefore P(A_1)=\frac{1}{6}$

（1個のサイコロを振って偶数の目が出る確率）

$P(A_2+A_4+A_6)=P(A_2+P(A_4)+P(A_6)$

前例により$P(A_2)=P(A_4)=P(A_6)=\frac{1}{6}$

故に$P(A_2+A_4+A_6)=3\times\frac{1}{6}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$

すなわち，これらの例で示された考え方は，Laplace の定義による確率と同じものを，公理に基いて導いたことになる。

◦場合の数の扱い方について

従来のように，場合の数をそれ自体独立した内容としては扱わないで，これは例えば確率を考える場合に必要であることをのべ，すなわち，場合の数を学習するための動機つけとして，確率の意味を前にのべ，その導入とした。そしてこの学習はこれだけをまとめて指導しないで，確率の学習内容の中の必要な場所で，この場合の数を1節ずつ程まとめたりして学習して行く，学習したことは直ちに確率の問題の中に活用して行く。

場合の数を指導するとき，和の原則，積の原則する。また，正規分布について再度ふれて，正規母集団から一定の大きさの標本を生徒一人一人がそれぞれ抽出し，標本平均を計算し，それを学級単位あるいは学年単位で標本平均の分布を考察し，この分布の平均値および標準偏差を算出する。この操作を，標本の大きさをいろいろと変えて行なう。平均値m，標準偏差 σ の正規母集団から大きさ n の標本を抽出したとき，n が大きくなると，標本平均$\overline{x}$の分布は，平均値 m，標準偏差 $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ の正規分布をはなすことを，上記の実験を繰り返して確かめ，これより$\overline{x}$が

$m-\frac{k\sigma}{\sqrt{n}}<\overline{x}<m+\frac{k\sigma}{\sqrt{n}}$ となる確率は

$k=1$ のとき 0.683 $k=2$ のとき 0.954，$k=3$ のとき 0.997 であることを正規分布表を用いて確かめる。このことから，母平均をある信頼度で推定することを学習する。さらに，母平均の信頼区間について学習する。

◦使用する乱数表は，普通数学Ⅲ教科書の巻末につけられているものを用いればよく，この計画では，2けたの数が30行15列に並べられたものを用い，つぎの方法で標本抽出を行なった。

(1)抽出の最初の番号を定めるには，さいころを2回ふり，その出た目に従い，右の第1表により行数を定め，同じ操作をくりかえして列数を定める。例えば，はじめにさいころを2回ふり，第1回目に2，第2回目に5が出れば第11行とし，またつぎに再びさいころを2回ふり，第1回目，第2回目にそれぞれ5，3がでれば

（第1表）

さいころの目		行数	列数
第1回	第2回		
1	1	1	1
1	2	2	2
1	3	3	3
1	4	4	4
1	5	5	5
1	6	6	6
2	1	7	7
2	2	8	8
2	3	9	9
2	4	10	10
2	5	11	11
2	6	12	12
3	1	13	13
3	2	14	14
3	3	15	15
3	4	16	1
3	5	17	2
3	6	18	3
4	1	19	4
4	2	20	5
4	3	21	6
4	4	22	7
4	5	23	8
4	6	24	9

が一貫した基本的な考えとなっていることを強調して順列，組合せを学習する，この順列，組合せの考を確率の乗法定理のところで併せて考えて指導した1例をつぎに示す，甲が当る確率と乙の当る確率はそれぞれいくらか，
甲が当るという事象を A，乙が当る事象を B，その余事象を，$\overline{A}$，$\overline{B}$ とすると
とかけば，$P(A)=\frac{2}{10}=\frac{1}{5}$

$$P(B)=P(A)P_A(B)+P(\overline{A})P_{\overline{A}}(B)=\frac{1}{5}\times\frac{1}{9}+\frac{4}{5}\times\frac{2}{9}=\frac{1}{5}$$

これをまた，この乗法定理を用いないで順列の考えと（定理3）を用いて考えるなら，
10本のくじを任意に1列にに並べ1番目に当りくじがあれば甲が当り2番目に当りくじが並べば乙が当るという考え方をしてみれば，どちらも $\frac{2\times{}_9P_9}{{}_{10}P_{10}}=\frac{2\times9!}{10!}=\frac{2}{10}=\frac{1}{5}$ として等しいことがわかる。この場合，生徒は実際は，当りくじと空くじの2種類しか無いのであるから10このどの番号へ2本の当りくじをおくかという場合の数すなわち ${}_{10}C_2$ を分母へ分子に $2\times{}_9C_1$ としてはいけないかとの疑問を持つようである。が，ここで確率の定義に戻って，その等確率性について指導したい，この問題を n 本中 r 本の当りくじのあるくじを順番に n 人の人が引くとき，その引く順序に関係なく当る確率が一定であることを証明せよという風に一般化した場合など，乗法定理によるよりも後者の解法の方が簡明のように思われる。
（定理5）独立試行の定理

$$P_n(r)={}_nC_rp^r\cdot q^{n-r}\qquad q=1-p$$

ここで二項定理，二項係数にふれて指導する。
◦統計的確率について
n 回の試行中ある事象が r 回起ったとき $\frac{r}{n}$ をその事象の相対度数という。1回の試行において確率 P で起こる事象の相対度数は，n が大きければ殆んど P に等しくなること，すなわち大数の法則を実験によってたしかめることにする。教室で実際にはつぎの実験を行った。
（実験例1）鉛筆ころがし
六角柱の鉛筆を各自の机の面にころがし，特定のマークのついた面が試行回数中何回上に出て静止したか，その相対度数をしらべる。（さいころを振る実験に代用するものとの意図でこの実験を行った。）
生徒各自は20回の試行をして，そのうち，何回

第12列を定め，第11行第12列の数を，標本本抽出の最初の番号とする。ただし，第1回目に6がでた場はやり直しとする。

5	1	25	10
5	2	26	11
5	3	27	12
5	4	28	13
5	5	29	14
5	6	30	15
6		(やり直し)	

(2)最初の番号からどの向きへ進むかを定めるには，さいころを2回ふり，その出た目に従い，第2表によって定める。例えば，第1回，第2回にそれぞれ2，6が出れば，(1)で定めた番号から下へ順次必要数だけとり，これを標本番号とする。ただし，第1回回目に5，6が出ればやり直しとする。

（第2表）

さいころの目 第1回	第2回	進む向き
1	奇数	右
1	偶数	左
2	奇数	上
2	偶数	下
3	奇数	右上
3	偶数	左下
4	奇数	右下
4	偶数	左上
5		やり直し
6		やり直し

(3)(2)の方法で進み，最右（左，上，下）端に達した場合には，そのつぎの行（列）を左（右，下，上）から同様に進めていくものとする。
◦まとめの問題演習
1 60人の生徒の身長の表（表略）を与えて
(1)度数分布表をつくれ。
(2)(1)で得た度数分布表を用いて，
(イ)平均値 $\overline{x}$，メジアン M_e，標準偏差 σ を求めよ。
(ロ) $\overline{x}-\sigma$ と $\overline{x}+\sigma$ との間に約何人の生徒がいるかしらべよ。
(ハ) $\overline{x}-2\sigma$ と $\overline{x}+2\sigma$ との間に約何人の生徒がいるかしらべよ。
2 20人の生徒の英語と数学の成績の表（表略）によって相関係数を計算せよ。（相関表を用いないで直接に求めよ）
以上2問とも極めて好成績であった。
◦平均値 $m=57.9$，標準偏差 $\sigma=7.47$ の正規母集団から，生徒一人一人がそれぞれ大きさ n の標本抽出を実験，その標本平均の分布の平均値 m'，標準偏差 σ' を求めたところ，つぎのような結果を得た。

各自できめた特定の面が上に出たかを調べさせたら，最低1回から最高15回までの間に分布し，各学級ごとにこの回数ごとにこの回数の延数を調べその相対度数を調べたら1A（52人）1B（50人）1C（49人）の3つの学級のそれは，それぞれつぎのようであった。

$\frac{187}{1040}=0.180$　$\frac{178}{1000}=0.178$　$\frac{129}{980}=0.132$

全体としては　$\frac{494}{3020}\doteqdot 0.164$ となり，

約$\frac{1}{6}\doteqdot 0.167$ に近い数値に落つくことがわかった。

（確率）

（実験例2）画鋲投げ

画鋲を投げると上向きか，下向きか（⊥，⋌）のどちらかになる。この場合はその確率がいくらかは実験の結果を待たずには予測できない。前の例と同様に各自に20回宛投げさせて，そのうち何回下向き（⋌）になったかを調べた。これの相対度数はつぎのようであった。

$\frac{531}{1040}=0.511$，$\frac{506}{1000}=0.506$，　$\frac{530}{980}=0.541$

全体の相対度数　$\frac{1567}{3020}=0.519$

これが，わが国の男児の出生率 0.514 にほぼ近い数値になったことは，非常に興味深いことであった。

（まとめの問題演習）

(1)つぎの空所（　）を適当にうめよ。

2つのことがら E, F があって E のおこり方は m 通り，そのおのおのについて，F のおこり方が n 通りあるとすると，E と F のともに起る場合の数は（　）通りである。これを（　）の原則という。

また，2つの事がら E, F があって，これらは同時には起りえないものとする。このとき E の起り方は m 通り，F の起り方は n 通りであるとき，E か F のいずれかが起る場合の数は（　）通りであり，これを（　）の原則という。

(2) 8人が右のような8つの席につく方法は何通りか，またこの場合，特定の2人が横に並んで席につく確率はいくらか。

1	2
3	4
5	6
7	8

(3)15人のうちから4人の委員を選ぶとき，特定の2人が同時に委員に選ばれる確率を求めよ。

(4) 2つのサイコロを投げて出た目の積が偶数になる確率を求めよ。

標本の大きさ n	標本平均の分布の 平均値m',	標準偏差σ'	$\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$の値
5	58.7	3.23	3.34
10	57.9	2.45	2.37
15	58.3	1.89	1.92
20	58.2	1.76	1.67
25	57.8	1.47	1.49

この実験実習により，$m'\doteqdot m$,　$\sigma'\doteqdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$　なることを検認することができた。

左記の問題1は1年生に，この確率，統計の学習が終って3週間程後に，基礎学力テスト中の問題として実施したものであるが，
正答率は98%（誤答3人）であった。同様の問題を数年前，本校の3年生の基礎学力テストで実施して完全な正答率72%を得たことは既に発表したところである。仮に$P_1=0.72$, $P_2=0.28$ $n_1=150$, $n_2=3$ として χ^2 を求めると1.458となり自由度1，有意水準0.01の定数6.635と比べると，51.458>6.635，すなわち，今回の方が成績がよかったと考えられる。

(2)もまた，基礎学力テスト問題として出題したものであるが，前半の場合の数は，正答率82%であるが，後の確率は52%であって余り良い成績ではなかった。(3)から(6)までは，確率の学習の直後のテストして実施したもので，それぞれ(3)88%，(4)65%，(5)54%，(6)68%程度の正答率を得た。これらについては，従来の環境で学習した3年生のテスト結果と直接比較できる資料が今はないので，断定はできないが，経験的な成績の総合結果からみて，一年生だから特に理解が困難であるという点は無かったと思う。

(5)硬貨を投げるという試行を何回も行なう。
このとき3度目の表が第6回の試行で出る確率を求めよ。

(6)サイコロを35回投げるとき，1の目が何回でる確率が最大となるか。

また，テスト問題にはにはしなかったが，つぎのような連続量の確率の問題も提示して，その考え方を示した。

(連続量の確率の問題例)

◇0と1の間の任意の数 x をとるとき，$\sqrt{x}$ の小数第1位が2である確率を求めよ。

◇ある停留所を毎時5分，25分，45分に発生するバスに乗ろうとする人が，5時と6時の間の任意の時刻に停留所に着いたとき，この人が待たされる時間が3分以内である確率を求めよ。

【おわりに（反省）】

従来は2年生で数学Ⅱで学習した順列・組合せ，引き続き，数学Ⅲの確率を1年生に学習させてみたわけであるが，学習態度が真面目であり，また余裕をもって考えられたせいか，かえってよく理解したように思う。このことを裏づける資料は，前述の演習のまとめのところであげたのであるが，なお，今後の調査などによって追跡研究もしてみたいと思っている。統計の学習と同様に，確率でも実験をすることによって，統計的確率の意味，偶然に起る事象の確率などについて，或程度の明確な概念を体得したのではないかと思う。実験については，もう少し試行回数を増して相対度数の変化の様子を摑めるようにすればよかった。また，二項分布の確率の実験的なたしかめなども実施してみればよかったと思っている。公理論的な定義によって確率を導入したので，それによる体系的な構造を理解するとともに，その理論が実際にあてはまるものか否かという興味も深まり，実験することに一層の意味があったと思われる。順列・組合せの学習と併行する形で確率の学習をしたが，確率の意味に基づいてその場合に応ずる適確な場合の数を考えることができたと思う。

また，日常生活の中の確率の考えの例を再考し，認識しなおすことにより，更にいろいろの確率・社会現象や自然現象の中の確率的な問題に深い興味と関心を示すようになった。早速生物や化学などにもこの学習内容は直接役立つ場合が各所にあって活用されるようである。

統計については，つぎのようなものがあげられる。

数学的に難しい内容は少ないので，かなりよく理解されていたように思われる。演習の問題でも殆んど全員が正しく答を出しており，誤ったものはすべて単なる計算違いであった。ただ，Σを用いた式の変形では，まだΣの使用に十分慣れていないため，少なからず抵抗が感じられた。チェビシェフの定理など，内容あるいは意味は十分に理解されるが，その証明には難解な点もあったようである。しかし，Σがわかりにくければ，必らずしも記号Σを用いなくてもよく，……＋……＋……として表現しても指導の目的に矛盾しない。ただ，Σを使用した場合に，この記号の便利さを十分知らせることが必要であろう。

統計の指導内容全般にわたり，また，特に，標本抽出，標本調査などでは，実験実習を主としたため，生徒も興味をもって，一人一人が十分作業を行なったようである。標本抽出の方法も体得できたと信じており，以後の考察はすべて一人一人の抽出結果全体を資料として用いて行なったため，結果を導びくに当っては，生徒それぞれが直接参加したという印象を強め，「標本平均の分布の平均値がほぼ母平均に等しい」という結果の印象も特に強いものと思われる。

統計指導全般を通じて，複雑な数値計算を大量に必要とするので，計算機など計算器械が十分利用できることが望ましい。また，現代に生きる生徒には少なくとも電動計算機もしくは，電子式卓上計算機ぐらいの操作ができることが必要ではないかと思われる。このため，学校においても，相当数の各種計算機が備えられることを期待する。

確率・統計を1年生に実施して，指導法などの点で再考を要する点は幾多あるが，時期的にみて適切であったと思う。また或程度のねらいは果たせたのでないかと思う。早速に実施した実力テストの成績の評価に利用し，生徒は各自の素点よりもその標準測度によって相対的な位置づけを知るようになったのもその一例である。この学習内容が実際に生徒のものになり随時に活用されることにより，はじめて学習効果があったといえようか。その意味で，今後の指導に留意したい。諸先生方の御批判御指導をお願いします。なお，生徒指導の実際に当って確率は米谷が，統計は能崎が担当しました。