平面幾何の指導についての一試案

北陸四県高等学校数学研究委員会
金沢大学教育学部付属高等学校数学科
米谷　数子，能崎　克己，上田外志夫

【は　じ　め　に】

前年度に北陸四県数学研究委員会の先生方の御協力を得て，この地方の数校の高校生，（約1,500名）について，図形に関する学力（特に中学校でも既習の程度の基本的な知識）についての調査を行い，その結果は既に発表したが，予想以上の低い学力であった。定義・定理などの意味も分明でなく何が証明かも理解していないものが，かなりの率をしめることを知った。公理から出発した厳密なものでなくなんとなく証明らしいものを知り，断片的な知識として頭の一隅に残されているように思う。しかも高校でも多くの教科書は，これを論証の一部として軽くとりあげている程度である。一方ベクトル，複素数，或は解析幾何などで取扱っている問題の中にも，初等幾何の知識や考え方で取扱った方がより簡単に解決出来る種類の問題も見られる。また時には大学入試問題などでも平面幾何の知識を既知のものとして，それを利用しての解決を余儀なくさせられるものもある。（例41年度金沢大学のベクトルの問題，三角形の角の二等分線が対辺を二辺の比に分けることを利用するものであるが，この定理を知らなかった受験生も居たという信じられないような事実もある）高校で論証が一つの重要な指導内容である現在，折角公理，無定義用語から出発して演繹的に命題の証明の仕方を指導するのであるから，もう少し息を続かせて論証のの面白さを知らせることができないものであろうか。たとえそれが代数教材でも出来るとは言え，幾何のそれに比べたら断片的でもあり，記号操作的な面が強調されて，図形的な直観を働かせる機会が少なくなる。赤摂也先生は「現在の抽象数学でも最先端では図形的な直観が必要となり，幾何が関係してくるし，幾何もまた代数の知識をかりねばならない処があって両者はあたかも車の両輪のような役割をなしているものであるから現行の指導要領でそうした意味でも，幾何が軽視されているように見えるのは片手落ちのように思われる」との意見を述べて居られる。現在，幾何の取扱いは世界的に論争の焦点の一つとなっている由，イギリスでも中等数学改良の最先端であり，最高責任者である S. M. P. の Thwaites 教授はつぎのように述べている。「幾何が正確な思考の訓練をする基礎になるものだと判断する人達は，ユークリッドの定理の系列を捨て去るにしのびないものだと判断し，一方全体を通じて大幅な論理的推論を導入しょうとする人達は，幾何の伝統的な取扱い方を変えることによって全体の結合（現在の数学的構造につらなる数学を単一のものとして考える行き方）が出来たら，喜んでそうしょうとしている。」　改良された幾何のあつかいの一例として S.M.S.G. の Geometry があることは知られているところである。Birkhoff（1932年）の公理系を基にして，これを教育的に改めたものを公理として，その基調として実数は既知のものとして論じている。ベクトルアプローチを叫ばれているときに，このような Moise 教授の扱い方も十分学ばねばならぬものがあると思う。しかしながらこれをそのまま我々の高校生にあてはめるのも問題がある。「S.M.S.G の幾何学は余りにも論理的構成に重点をおきすぎたきらいがあり，教育の場面ではむしろ従来のユークリッド幾何の方が素朴であり感覚的であって初学者にはより近づき易いものではないか，そこで従来のユークリッド幾何のわずかの公理から

演繹していくという行き方を改めて，従来の幾何では論証し得ないで直観的飛躍をもって補っていたような命題を新たに公理として要請し，結局たくさんの公理を基にして演繹的推論を展開していくことを提案する」と熊本大学の稲葉先生も言って居られるが，この意見は尤もと思う。ここでは勿論，公理とは演繹的推論を展開するための出発点となる基礎的な事柄の意味であって，証明のできない命題であるとか，証明を要しない自明の命題であるという観念から一応絶縁して考えていく。

現在の高校1年の指導内容として扱う「図形と論証」の中での平面幾何の指導展開を以下にあげて諸先生方の御批判と御指導をお願いしたいと思う。

【目標と立場】

ユークリッドの幾何学原本の公理が不完全なものであることは既に知られて居り，D.Hilbertによって与えられた公理系は，最も吟味のゆきとどいた完全な公理系であると言われている。しかし勿論そのままでは高校教育に適当ではない。Hilbert の公理系をその基礎において，これを教育的に改め，現状にできるだけ適したものをとの意図で，一つの公理系を作ってみた。その具体的な立場のねらいをあげるならば，以下のようである。

〔1〕 Hillert の公理系をその基礎におくが，この公理系のうちで，あまりにも抽象的すぎて理解しにくいものは，少々曖昧な表現の仕方をしても直観的な裏付けにより理解し易いものにする。すなわち，ヒルベルトの結合の公理の中にあげられている存在公理はこれを殊更とり出さず，直線と平面の存在と決定として，それぞれまとめた。また合同の公理は，直観的に理解し易いと思われる移動の公理に代えた。

〔2〕 既知のもので図形と同型のものを利用する。すなわち，実数の性質を用い，これを線分の長さや角の大きさに対応させ，ヒルベルトの順序の公理群にある“間” between の考えに代って生かそうとした。このことは，Birkhoff の公理の一部を改良して S. M. S. G. の Geometry などでも試みている点であるが同じ立場をとった。

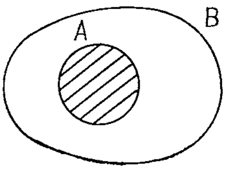
〔3〕 現代数学において重要な概念の一つである集合をその考え方の基本におき，ユークリッド幾何には殆んど入っていなかった量の概念を導入することで，図形の性質も時には代数的取扱いにかえて把握し，できれば測度の概念に発展する素地も培って幾何を現代数学の構造の一環として把えてゆく方向に一歩でも近づけることが出来ないかとの意図である。

【指導展開案】

第一章　論証について

【命　題】 2つのことがらA，Bに対し「AならばBである」A→Bの形に述べられたことがらを一般に命題という。Aをその条件（仮定）Bを結論（終結）という。

【集　合】 一般にある条件をみたすものの集まりを集合といい，集合を作っているおのおののものをその集合の要素（または元）という。その要素が与えられた条件によって，その集合に属するか否かが明確に定まるものでなければならない。a が集合Aの要素のときA∋a とかく。二つの集合A，BにおいてAのどの要素もBの要素になっているとき集合Aは集合Bに含まれる。あるいは，BはAを含むといい，A⊆B（または B⊇A）



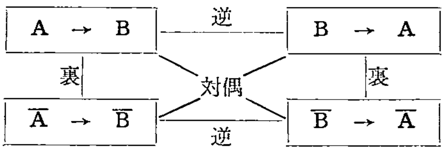
で表わす。このとき，集合Aは集合Bの部分集合であるという。

【条件と集合】 一般に命題$A \to B$がなり立つとき，条件Aに適するもの全体の集合をA，条件Bに適するもの全体の集合をBとすればこの命題が成り立つことと集合A，Bについて$A \subseteqq B$がなり立つことは同じである。

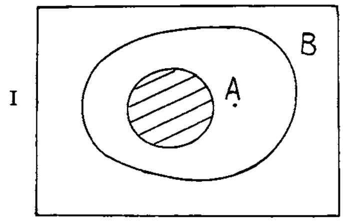
【逆 と 対 偶】

一般にあることがらAを否定したことがらを$\overline{A}$で表わす。

$A \to B$という命題に対して，$B \to A$を逆　$\overline{B} \to \overline{A}$を対偶　$\overline{A} \to \overline{B}$を裏という。



一般に考えている対象全体の集合をＩで表わし，Ｉの要素のうち条件Aをみたすもの全体の集合をAとする。またＩの要素のうち条件Aをみたさないもの全体の集合は，集合ＩからAの要素を除いたもの全体である。この集合を$\overline{A}$と書く。同様に集合Bに対して$\overline{B}$を考える。



命題$A \to B$が真であれば集合について$A \subseteqq B$このとき明らかに$\overline{B} \subseteqq \overline{A}$故に対偶$\overline{B} \to \overline{A}$は真である。

$A \to B$が真であってもその逆$B \to A$，裏$\overline{A} \to \overline{B}$は必ずしも真でないことを集合の立場から説明できる。

【必要条件，十分条件】

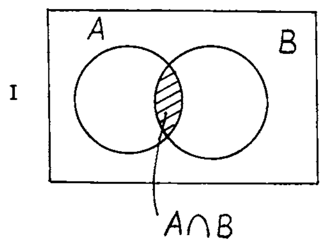
$A \to B$　がなりたつとき，AをBの十分条件　BをAの必要条件という。

逆$B \to A$も成り立つとき，すなわち$A \rightleftarrows B$のとき，これを集合の包含関係で表わせば，

$A \subseteqq B$でかつ$A \supseteqq B$が成り立つとき，AとBは互に必要十分条件である。またはAとBは同値であるという。

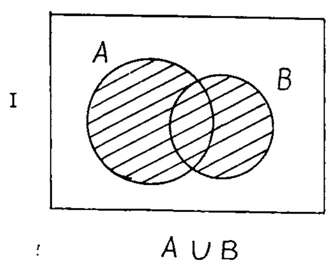
【集合の共通部分・和集合】

A，Bを二つの集合（Ｉの部分集合）とするとき，Aの要素でもありかつBの要素でもあるような要素の全体からなる集合をAとBの共通部分といい，これを$A \cap B$で示す。



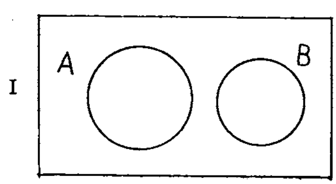
Aのすべての要素とBのすべての要素の全体をA，Bの和集合といい，これを$A \cup B$で示す。

全然要素をもたない集合を空集合といい０またはϕで示す。AとBに共通な要素がないとき，$A \cap B = \phi$で示す。



【証　　明】 ある命題が正しいと断定するためにはすでに真であると認められている他の命題を根拠にして，正しい推論によって，その命題が導き出されることを示せばよい。その推論の過程が証明である。

【公　　理】 一つの命題の証明の根拠となる命題それ自身が成り立つことを証明するためにはさらに別の根拠となる命題が必要になる。このようにして順次さかのぼると，ついにはどうしても証明なしで正しいと認めなければならないような基本的な命題に達する。



このような推論の出発点とする基本的命題を公理という。

【定　　理】 証明によって保証された命題のうち以後の研究に重要

と見られるものを特に定理という。一度証明された定理は新しい命題を導くための根拠として公理と同様に用いてもよい。

【系】 ある定理から直ちに証明できる命題をその定理の系という。

【定　義】 公理や定理などを記述したり説明したりするときに使用する用語や記号の意味が不明確では記述の内容や推論の過程に混乱や誤りが起こる。記号・用語の意味を明確に述べたものを定義という。

【無定義用語】 ある用語を定義するためにはさらに，他の用語を必要とし，次々にさかのぼると，最後にはこれ以上別の用語を用いて定義しにくい単純な用語に達する。このような用語を無定義用語という。基本図形としての点・直線・平面などは無定義用語である。

第二章　公　理

第 1 節　数の四則と順序の公理

実数の集合Mは，Mのなかで四則（加減乗除）の計算ができる。それは集合Mがつぎの公理をみたしていることである。

【四則の公理】

A_1　$M \ni a,\ b \to M \ni a+b$

A_2　$a+b=b+a$

A_3　$(a+b)+c=a+(b+c)$

B_1　$M \ni a,\ b \to M \ni ab$

B_2　$ab=ba$

B_3　$(ab)c=a(bc)$

C　$a(b+c)=ab+ac$

D_1　Mのどんな数aに対しても
$a+u=a$となる一定数uがMのなかにある。このuを0で表わす
（すなわち　$a+0=a$）

D_2　Mの任意の数　aに対して
$a+x=0$
となるxがMのなかにあるこのxを$-a$で表わす。
$(a+(-a)=0)$

E_1　Mのどんな数aに対しても
$av=a$　となる0でない一定の数vがMのなかにある。このvを1で表わす。
$(a\cdot 1=a)$

E_2　Mの任意の数$a\ (\neq 0)$
に対して　$ay=1$
となる数yがMのなかにある。このyを$\dfrac{1}{a}$で表わす。
$\left(a\cdot\dfrac{1}{a}=1\right)$

一般に数の集合Mが四則計算の公理をみたしているとき，Mの数について大小の関係が考えられるというのは，集合Mが，さらに次の公理をみたしていることである。

〔順 序 の 公 理〕

F_1　Mの任意の2数a，bの間には
$a>b$，$a=b$，$a<b$のうちどれか1つの関係だけが成り立つ。

F_2　$a>b$，$b>c$ならば$a>c$

【順序と計算に関する公理】

G_1　$a>b$ならば　Mの任意の数cに対して　$a+c>b+c$

G_2　$a>b$，$c>0$ならば　$ac>bc$

これらを合わせて大小関係の公理という。

（問　題）数の四則の公理および大小関係の公理からつぎのことがらを証明せよ。

(1)　Mのどんな数aに対しても　$a\cdot 0=0$

(2)　$a>0$，$b>0$　ならば　$a+b>0$，$ab>0$

(3)　$a>0$，$b>0$　ならば　$a+b>a$，$a+b>b$

(4) $a=b$ ならば $a+c=b+c$

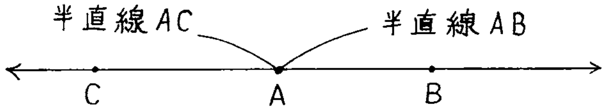
(5) $a>b \rightleftarrows a-b>0$, $a=b \rightleftarrows a-b=0$

$a<b \rightleftarrows a-b<0$

第2節 量 の 公 理

「直線」は無定義用語であるが，点集合の一つであって，その上の一点Aによって，

図のように二つの点集合に分けられる。そのおのおのを「半直線」という。Aか



らみてBの側にある方を半直線ABという。このとき，Aを半直線ABの端点という。またAからBまでの間の点集合を線分ABといい，その両端の点A，Bは線分に含まれるものとする。この線分の長さに対してつぎのような公理をとる。

1 **【線分の長さの公理】**

(イ) 線分ABには，その長さ（あるいはA，B間の距離）とよぶ正の実数が対応するものとする。

（長さの単位はあらかじめ与えられたものとする）

(ロ) 任意の実数xが与えられたとき，半直線の上に，端点から $|x|$ の距離にある点が存在するものとする。逆に半直線上の端点から $|x|$ の距離にある点に対して実数xが対応している。すなわち，直線上の点と実数の間に1対1の対応がつく。

(ハ) 一直線上の二点A，Bに対応する実数をそれぞれx，yとするとき，二点A，Bの距離dは，$\overline{AB}=d=|x-y|$ で表わされる。

（$d\geqq 0$である A，B が一致するとき $d=0$）

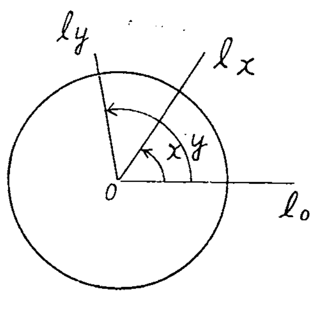
(ニ) 一直線上の三点A，B，Cに対し，BがA，Cの間にあるとき，$\overline{AB}+\overline{BC}=\overline{AC}$とする。

（長さの加法性）

〔定　理〕一直線上の三点A，B，Cに対応する実数がx，y，zのとき$x<y<z$ ならばBはAとCの間にある。

〔 系 〕一直線上の一点Aに対し B，C が同じ側にあってAからの距離がそれぞれℓ_B，ℓ_C のとき，$\ell_B<\ell_C$ ならばBはAとCの間にある。

2 **【角の大きさの公理】**



角（一点から出る2本の半直線によってできる図形，この点を角の頂点という）には，以下のようにその大きさを表わす正の実数を対応させることができる。

(イ) 任意の半直線 ℓ_0 を基線としてその端0の周りに回転した半直線 ℓ_x には，その回転の位置を示す実数xが対応する。

$-180\leqq x\leqq 180$ $(-2\angle R<x<2\angle R)$

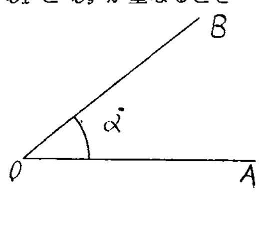
（反時針方向を＋とする）

$y>x$ならばxに対応する半直線 ℓ_x は基線 ℓ_0 とyに対応する半直線の間にある。

(ロ) 角の大きさは，その二辺の対応する実数の差の絶対値で表わす。すなわち $\angle\ell_x 0\ell_y$ の大きさは $|y-x|=\alpha$ とする。

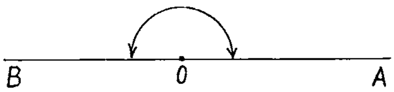
(ハ) ℓ_x と ℓ_y が重なるとき $\alpha=0$ と定める。

(ニ)



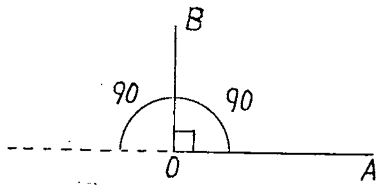
角が与えられているとき単に $\angle$A0B といえば劣角をさすものとする。従って $180\geqq\alpha\geqq 0$

(ホ)

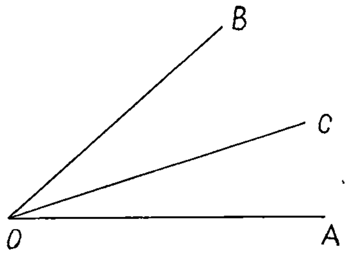


OA, OB が反対方向の半直線のとき，
　$\alpha = 180$（平角という）

(ヘ)



$\alpha = 90$ のとき $\angle AOB = \angle R$（直角という）



OC が $\angle AOB$ 内の半直線のとき，
　$\angle AOC + \angle COB = \angle AOB$ とすることができる
すなわち，
　$\angle AOC = x$　$\angle COB = y$　$\angle AOB = z$ のとき
　$x + y = z$ とできてそのとき，OC は O Aと
　O Bの間にある。

3　【面積の公理】

(イ) 長方形の面積はその二辺の長さを表わす実数の積で表わされる。すなわち二辺の長さが a，b の長方形の面積Ｓは　$S = ab$

(ロ) 一つの図形が互に重り合っていない２つの部分からなるとき，その図形の面積はおのおのの部分の面積の和に等しい。

4　【量の加法性】

以上あげた量すなわち線分の長さ，角の大きさ平面図形の面積などはすべて正数値（０を含む）集合関数であり，それぞれの集合Aに対し $m(A)$　$(m(A) \geqq 0)$ なる数が対応している。これらを集合Aの測度とよぶ。

　$I \supset A$，B　I は線分の集合（または角の集合など）

　$A \cap B = \phi$　ならば $m(A \cup B) = m(A) + m(B)$

とできる。

これから一般に，同じ全体集合の部分集合である有限個の集合が互に共通部分がないとき，それらの和集合の測度はそれぞれの集合の測度の和に等しいとすることができる。

すなわち $A_i \cap A_j = \phi$　$(i \neq j)$ $I \supset A_1,\ A_2,\ \cdots A_n$ ならば

$m\ (A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cdots\cdots \cup A_n) = m(A_1) + m(A_2) + \cdots\cdots m(A_n)$

第３節　図形の公理

1　【運動（移動）の公理】

図形はその形，大きさ（線分の長さ・角の大きさ・面積）を変えないで，任意の位置に移動させることができる。

2　【直線の存在と決定】

異なる二点を通る直線は一つあって唯一つである。

(註) 実際の指導の際は，面積の公理は面積を学習する時に出す。

3　【平面の存在と決定】

一直線上にない3点を通る平面は一つあって唯一つである。

4　【平面上の直線】

平面上の異る二点を通る直線上のすべての点はその平面に含まれる。

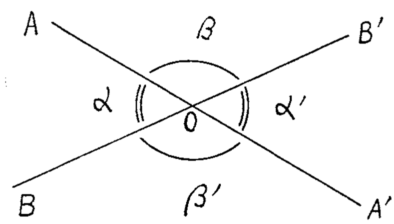
5　【平行線公理】

直線外の一点を通りその直線に平行な直線は一つあってただ一つである。

第三章　平面図形の性質

第1節　直　線　図　形

【定　義】（対頂角）二直線 AA′, BB′ が一点 0 で交わってできる4つの角のうち ∠AOB と ∠A′OB′, ∠AOB′ と ∠A′OB を互に他の対頂角という。

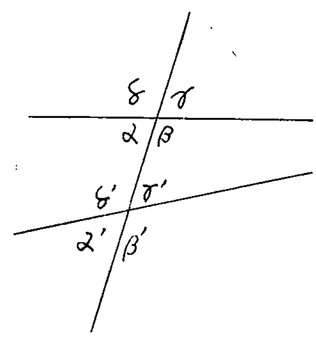


【定　理1】対頂角の大きさは等しい（これを単に対頂角は等しいともいう）

（証　明）∠AOB, ∠A′OB′, ∠A′OB の大きさをそれぞれ α, α', β, β' で表わせば，∠BOB′, ∠AOA′ は平角であるから $\alpha+\beta=180$, $\beta+\alpha'=180$ $\therefore \alpha+\beta=\beta+\alpha'$ $\therefore \alpha=\alpha'$ 同様に $\beta=\beta'$

【定　義】（平行線）一平面上にあって共有点を持たない（交わらない）二直線は互に平行であるといい，一方を他方の平行線という。（$a /\!/ b$）（同位角・錯角・同側内角）二直線に他の一直線が交わってできる8つの角

α, β, γ, δ;α', β', γ', δ' のうち，つぎの位置関係にあるものをそれぞれつぎのようによぶ。



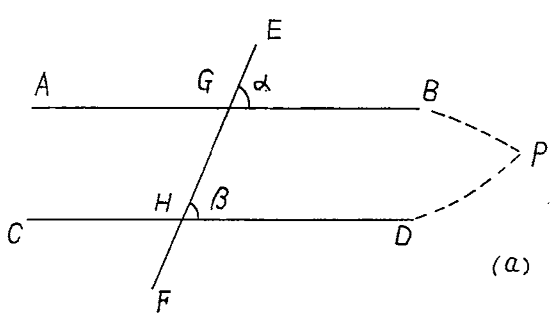
同位角　α と α', β と $\beta'$$\gamma$ と γ', δ と δ'

錯　角　α と γ' β と δ'

同側内角　α と δ', β と γ'

【定 理 2】平面上で異なる二直線が第三の直線と交わるとき一組の同位角が等しいならば，この二直線は平行である。

（証　明）AB, CD を直線 EFF 交わる直線とし，その同位角を α, β とする。$\alpha=\beta$ ならば AB∥CD であることを証明する。いま，AB, CDが点Pで交わると仮定する。



a図を回転してb図のようにa図のG，Hの上にb図のH，Gがそれぞれ重なるように，b図をa図の上に重ねる。（移動の公理により）すると

∠CHF＝∠DHG＝β（定理1）

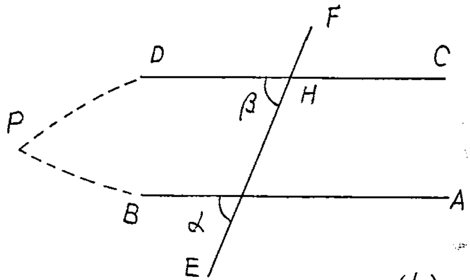
条件より $\beta=\alpha=$∠BGE

∴　∠CHF＝∠BGE

同様に　∠AGF＝$\alpha=\beta=$∠DHE

ゆえにａ図の直線 AB, CD, EF 上にそれぞれｂ図の直線 DC, BA, FE が重なる。

よって AB, CD にａ図の点Ｐとｂ図の点Ｐの２つの点で交わる。したがって２直線 AB, CD は一致しなければならない。（図形の公理２）これは，AB, CDが異なる二直線であることに反する。ゆえに AB, CD は交わらない。すなわち AB∥CD である。



(b)

【定理２の系】

1　平面上で異なる二直線が第三の直線と交わるとき１組の錯角が等しければこの二直線は平行である。

2　平面上で異なる二直線が第三の直線と交わるとき同側内角が補角をなせばこの二直線は平行である。

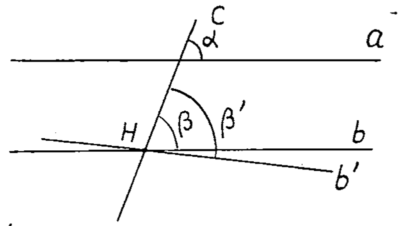
【定　理　3】 平行な二直線が他の直線と交わるとき，同位角は等しい。（定理２の逆命題）

（証　　明）平行な２直線をａ，ｂそれぞれに交わる直線をｃとする。一組の同位角をα, β とする。

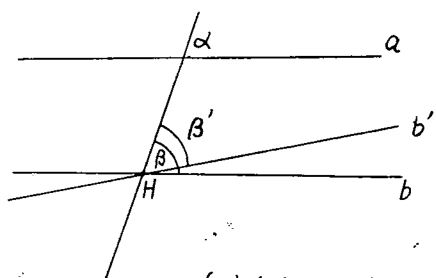
いま $\alpha \fallingdotseq \beta$ と仮定すると，$\alpha>\beta$ または $\alpha<\beta$（順序の公理F_1）ｂとｃの交点Ｈを通って，$\alpha=\beta'$ の直線 b′ を引けば，それぞれ右図のようにｂと異なる直線 b′ が引ける。

同位角 $\alpha\beta'$ が等しいから定理２によって，ａ∥b′ となる。また条件よりａ∥ｂゆえに直線ａ外の一点Ｈからａに平行な直線がａ，b′ の２つ引けることになり，これは平行線公理に矛盾する。

ゆえに $\alpha=\beta$ でなければならない。



（α＞βのとき）



（α＜βのとき）

【定理３の系】

平行な２直線が他の直線と交わるとき，錯角は等しい。

（背 理 法）定理２や定理３の証明のように与えられた条件のもとに結論を否定すると，既知の公理，定理，定義または条件に反して矛盾が起ることをのべて結論が成り立たなければならないことを証明する方法を背理法という。

【定　理　4】 同じ直線に平行な２直線は互に平行ある。（一平面上の場合として背理法で証明する）

（問　　題）一平面上にあって平行線の一方に交わる直線は他にも交紀る。これを証明せよ。（定理４とこの問題の関係を考えてみる）

【定　　義】（三角形）一直線上にない三点を相互に結んでできる三つ線分の和集合。

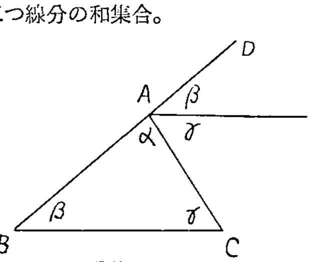
３点を頂点，３つの線分を辺各頂点で二辺のなす角を三角形の（内）角，３辺，３角を三角形の６要素という。

【定　理　5】 三角形の三つの内角の和は180°である。

$\alpha+\beta+\gamma=180$

【系　　1】 三角形の外角はその内対角の和に等しい。

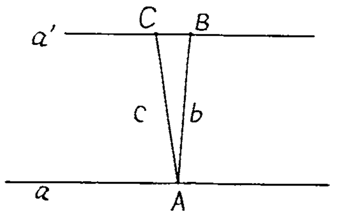
【系　　2】 三角形の外角はその内対角のどれよりも大きい。



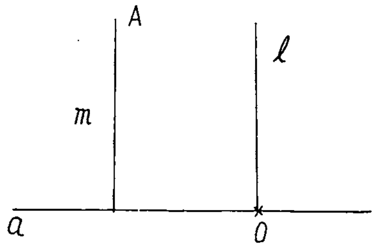
（外角，内対角）∠A の外角は ∠CAD$=\beta+\gamma$∠B，∠C はその内対角

（問　　題）1　三角形の内角は2つ以上直角または鈍角（90°より大）でありえないことを証明せよ。

2　平面上の一点Aを通りこの平面内の直線 a に垂直な直線（垂線）はただ一つある。



（証　　明）点Aが直線 a 上のとき，角の大きさの公理と垂の定義により，Aを頂点とし，a と 90° の角となす半直線 b は存在する。もう一つAを通る a の垂線 c 線るが存在したとすと，b 上の一点Bから a に平行線 a′ をひけば，c とも点Cで交わり，△ABCで∠B＝∠C＝90°となり問題に反する。



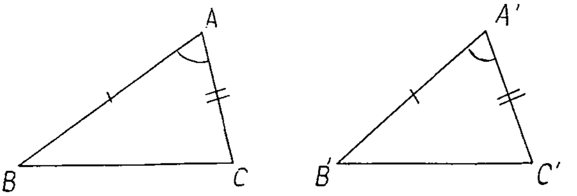
一点Aが直線 a の外にあるとき，a 上の任意の一点 0 を通る a の垂線は唯一つある。

点Aを通り ℓ に平行な直線mを引けば，定理3により m と a が垂直となる。（$a \perp m$）このようなmは唯一つしかないことは平行線公理による。

3　△ABC の内部に1点Oをとれば ∠BOC＝ BAC＋ ∠ABO＋ ∠ACO　（∠BOC＞∠BAC）を証明せよ。

【定　　義】（合同）移動によって重ねられる図形は合同であるという。

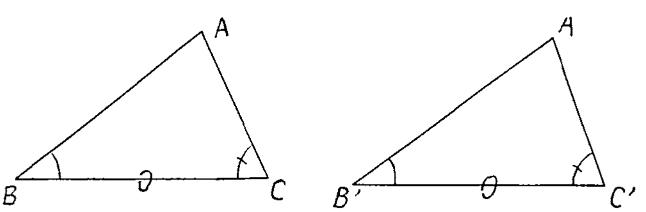
【定 理 6】（第一合同定理）二辺夾角がそれぞれ等しい三角形は合同である。



△ABC と△A′B′C′ において AB＝A′B′，AC＝A′C′，∠A＝∠A′ ならば，△ABC≡△A′B′C′

〔証　　明〕A′B′ をこれに等しい AB に重ねる。（A′ を A，B′ をB）C′ を AB(A′B′) に関してCと同側にくるようにおく。∠B′A′C′＝∠BAC より半直線 A′C′ は半直線 AC に重なる。しかも A′C′＝AC より C′ は C の上になる。三点 A′，B′，C′ がそれぞれ A，B，C に重ねることができた。故に △ABC と △A′B′C′ は合同である。

【定 理 7】（第二合同定理）二角夾辺がそれぞれ等しい三角形は合同である。

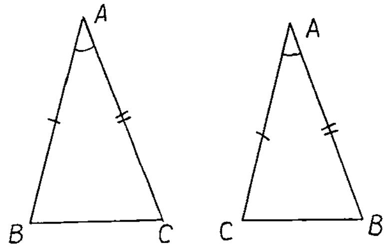


△ABC と △A′B′C′ で BC＝B′C′ ∠B＝∠B′，∠C＝∠C′ B′ を B に C′ を C に重ねることができる。Aと A′ BC に関して同じ側におくと ∠B＝∠B′ によって半直線 B′A′ は半直線 BA の上に重なる。また ∠C＝∠C′ により半直線 C′A′ は半直線 CA に重なる。故に二つの半直線の交点A′は，他の2つの半直線の交点Aに重なる。

【定　　義】（二等辺三角形）二辺の長さが等しい三角形を二等辺三角形といい，等しい二辺を等辺，残りの辺を底辺という。等辺の夾む角を頂角，等辺に対する二つの角を底角という。

【定 理 8】二等辺三角形の両底角は等しい。$\triangle ABC$ で $AB=AC$ なら $\angle B=\angle C$

（証　明）$\triangle ABC$ をAの周りに AB と AC の位置が反対になるように裏返す。



$\triangle ABC$ と $\triangle ACB$ において

$AB=AC,\ AC=AB$

$\angle A=\angle A$ であるから第一合同定理により

$\triangle ABC\equiv\triangle ACB$　　$\therefore \angle B=\angle C$

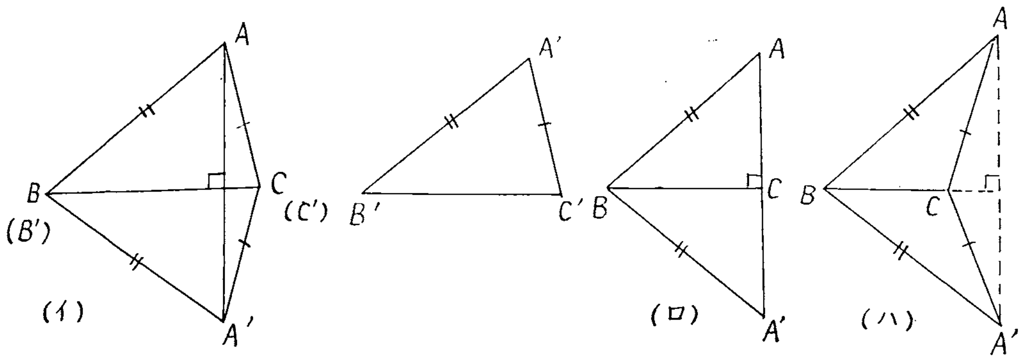
（問 題 1）定理8の逆，すなわち $\triangle ABC$ において $\angle B=\angle C$ ならば，$AB=AC$ であることを証明せよ。

定理8とこの問題によって，$\triangle ABC$ が AB, AC を等辺とする二等辺三角形であるための必要十分条件は $\angle B=\angle C$ である。

（問 題 2）二等辺三角形 ABC の頂角の頂点と底辺の中点を結ぶ直線は底辺に垂直である。また，頂点から底辺へ下した垂線は底辺を二等分する。

（問 題 3）二等辺三角形の頂角の二等分線は底辺を垂直に二等分する。

【定 理 9】（第三合同定理）二つの三角形で対応する三辺がそれぞれ等しいならば両三角形は合同である。



$\triangle ABC$ と $\triangle A'BC'$ において $AB=A'B'$, $AC=A'C'$, $BC=B'C'$ ならば $\triangle ABC\equiv\triangle A'B'C'$

（証　明）$B'C'$ を移動してこれに等しい BC に重ね，$\triangle A'B'C'$ の頂点 A'がBC に関して A と反対側にくるようにおく。AA' を結ぶと BC と交わる場合，C を通る場合，または BC の延長と交わる場合がある。

(イ)のとき $\triangle ABA'$ において $AB=A'B$ 故に定理8により $\angle BAA'=\angle BA'A$, 同様に $\triangle ACA'$ においても

$AC=A'C$ より $\angle CAA'=\angle CA'A$

$\therefore$　$\angle BAA'+\angle CAA'=\angle BA'A+\angle CA'A$ すなわち

$\angle BAC=\angle BA'C$ 故に第一合同定理より

$\triangle ABC\equiv\triangle A'BC$　　　$\therefore$　$\triangle ABC\equiv\triangle A'B'C'$

（問 題 1）(ロ), (ハ)の場合も同様に $\triangle ABC\equiv\triangle A'B'C'$ となることをたしかめよ。

（問 題 2）$B'C'$ を BC に重ね，A' が BC に関して A と同じ側にくるようにおき，もし A' と A が重ならないと，し，背理法で定理9を証明せよ。（二等辺三角形の性質を利用）

（問 題 3）二つの三角形の2角と1対辺それぞれが等しい両三角形は合同であることをたしかめよ。（第四合同定理ともいう）

【定 理 10】二つの直角三角形（一角が90°である三角形）の合同条件は，つぎの場合である。

(1)　1鋭角とその対辺がそれぞれ等しい。

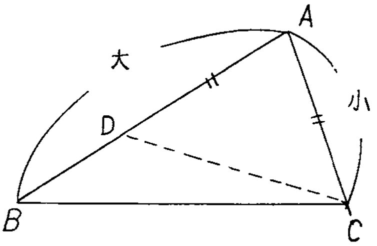
(2)　斜辺（直角に対する辺）と1鋭角がそれぞれ等しい。

(3)　斜辺と他の一辺がそれぞれ等しい。

（問 題 1）定理10をたしかめよ。

（問 題 2）一つの線分の垂直二等分線上の点は線分の両端から等きょりにあることを証明せよ。

【定 理 11】 三角形の二つの辺の長さが等しくないとき，大きい辺に対する角は小さい辺に対する角より大きい。



AB>AC→∠C>∠B

（証 明） AB＝c　AC＝b　とすると

$c > b \quad \therefore \quad c-b > 0$

AB 上に AC に等しく AD をとると，すなわち AD＝b，DB＝c－b＞0 よりDはAとBの間にくる。すなわち CD は ∠ACB の内部にある。故に ∠ACB＞ ∠ACD……………①

△ACD は二等辺三角形故 ∠ACD＝ ∠ADC……………………………………②

∠ADC は △BCD の外角故その内対角 ∠B より大 すなわち ∠ADC>∠B……………③

①，②，③より ∠ACB ＞∠B すなわち ∠C>∠B

【定 理 12】 三角形の二角の大きさが等しくないとき，大きい角に対する辺が小さい角に対する辺より大きい。

三角形 ABC で

(1)　AB＝AC　なら　∠C＝∠B　　（定理8による）

(2)　AB>AD　なら　∠C>∠B　　（定理11による）

(3)　AB<AC　なら　∠C<∠B

が既に成立している。ここで(1)，(2)，(3)の条件は2辺 AB，AC の大小関係について，結論は対角∠C，∠B の大小関係について起りうるすべての場合をつくしていて，どの2つも同時に成り立つことはない。このようなとき，(1)，(2)，(3)の逆がすべて成り立つことになる。例えば

(2)の逆 ∠C>∠B⇒ AB>AC を証明するなら条件 ∠C>∠B のとき，もし結論が AB<AC とすると，順序の公理（F_1）により AB＝AC または AB<AC このとき (1)，(3)により ∠C＝∠B または ∠C<∠B となる。これは，条件 ∠C>∠B に矛盾する。故に結論 AB>AC は成立しなければならない。

(1)，(3)の逆についても同様に成立することがいえる。

すなわち　∠C＝∠B ⇒ AB＝AC

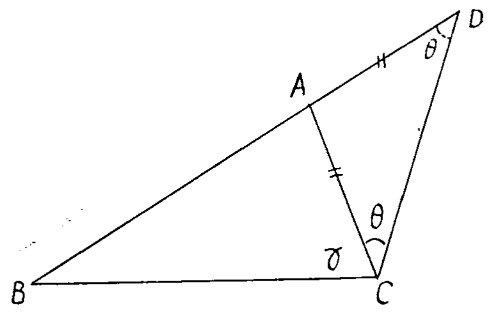
∠C<∠B ⇒ AB>AC

∠C<∠B ⇒ AB<AC　が成立する。

一般に上の(1)，(2)，(3)のように一連の正しい命題があって，それらの仮定（条件）が，すべての場合をつくしており，どの2つも両立することがなく，各結論がどの2つをとっても両立しないとき，これらの命題の逆がすべて成り立つことを，上と同様の方法で結論することができる。この証明法を<u>転換法</u>という。

【 系 】 直角三角形の斜辺は最大辺である。

【定 理 13】三角形の二辺の和は他の一辺より大きい。



$\triangle$ ABCにおいて，AB+AC>BC

（証　明）BA の延長上に AC に等しく AD をとれば $\triangle$ACD は二等辺三角形であるから，両底角は等しい。
$\angle D=\angle DCA=\theta$ とおき，$\angle ACB=\gamma$ とおくと，$\angle DCB=\theta+\gamma>\theta=\angle D$ すなわち $\triangle$BCD で $\angle BCD>\angle D$ よりBD>BC （定理12）

すなわち AB+AC>BC

三角形の三辺を a，b，c とすると

$b+c>a$ 　(1)

$c+a>b$ 　(2)

$a+b>c$ 　(3)

(2)，(3)より

$a>b-c$，$a>c-b$

$\therefore\ a>b\sim c$ ……………(4)

(1)と(4)より　$b+c>a>b\sim c$

すなわち定理13の系としてつぎのことがなり立つ。

【 系 】三角形の一辺は他の二辺の和より小で二辺の差より大である。

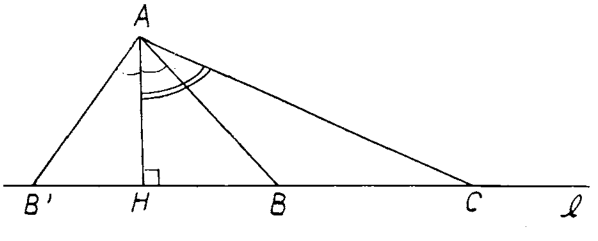
〔問　　題〕直線 g の同側に 2 点A，Bがあるとき，g 上のどのような 1 点Pをとれば AP+BP が最小になるか。また AP∼BP が最大になる点Pが g 上にあるか。

【定 理 14】直線外の一点と，この直線上の点とを結ぶ線分の長さのうちで

(1) 垂線が最も小さい。

(2) 垂線と等しい角をなす線分は等しい。

(3) 垂線と大きい角をなす線分ほど大きい。

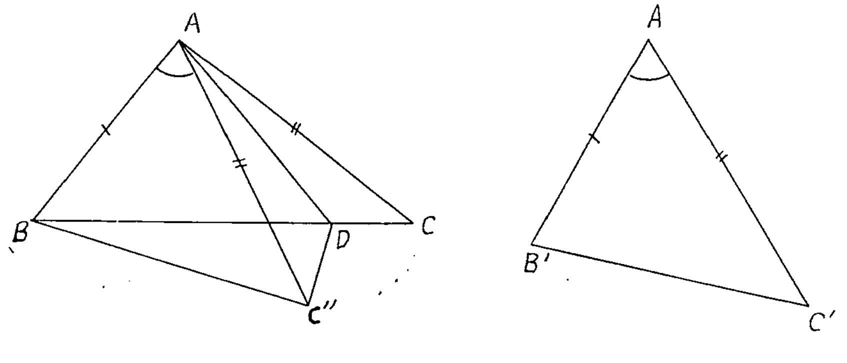


$AH\perp \ell$ 　　AB=AB'

AH<AB<AC

（問　　題）この定理14を証明せよ。

【定 理 15】二つの三角形において二組の辺がそれぞれ等しく，その夾角が等しくないときは大きい角に対



する辺は小さい角に対する辺より大きい。

すなわち $\triangle ABC$ と $\triangle A'B'C'$ で，$AB=A'B'$，$AC=A'C' \angle A>\angle A'$ とすると $BC>B'C'$ が成立する。

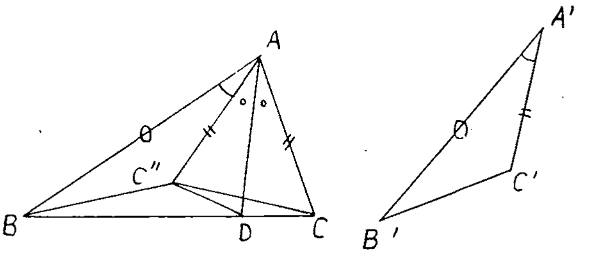
（証　明）$A'B'$ を AB に重ね，AB に対して C' が C と同じ側にくるようにおくと，$\angle B'A'C'<\angle BAC$ より $A'C'$ は AB と AC の間にくる。C' の落ちる位置をC'' とする。すなわち $\triangle ABC''\equiv\triangle A'B'C'$

$\angle C''AC$ の二等分線が辺 BCと交わる点をDとする。

$\triangle ACD\equiv\triangle AC''D$（第一合同定理）

$\therefore\ C''D=CD,\ BC=BD+DC=BD+DC''>BC''=B'C'$

すなわち $BC>B'C'$ が言える。



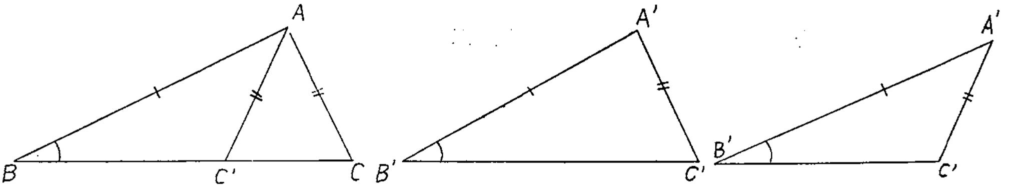
（注　意）$AB<AC$ のときは，C'' は $\triangle ABC$ の外部にくるが，$AB>AC$ の場合に，C'' が $\triangle ABC$ の内部にくることもある。

これは定理14によってたしかめることができる。どの場合でも上の証明はあてはまる。

【定 理 16】 二つの三角形において二組の辺がそれぞれ等しく一組の辺が等しくないとき大きい辺に対する角は小さい辺に対する角より大きい。

（問 題 1）この定理16を証明せよ。

（問 題 2）二つの三角形の２組の辺がそれぞれ等しく，それらの等しい辺に対する一組の角が等しいとき，この三角形は合同であるといえるか。他の等しい辺に対する一組の角の間にどんな関係があるか。（二辺一対角の関係）



【定　義】（ｎ角形（凸多角形））どの三点も一直線上にない n 個の点を順次結んでできるｎ個の線分の和集合，ｎこの辺ｎこの角……２ｎ個の要素　辺上の任意の二点を結ぶ線分がその多角形に含まれる（外部に出ない）ものを凸多角形という。

（注　意）特に断わらねば，ｎ角形は凸ｎ角形をさす。

【定 理 17】 ｎ角形の内角の総和は（２ｎ－４）$\angle R$すなわち $180(n-2)^\circ$ である。

【　系　】 凸多角形の各頂点の外角１つづつの総和は360°である。

（問　題）この定理および系を証明せよ。

【定　義】（平行四辺形）２組の対辺がそれぞれ平行である四角形を平行四辺形という。

（長方形）４つの内角の大きさが等しい四角形

（ひし形）４つの辺の長さが等しい四角形

（正方形）４つの辺の長さと４つの内角の大きさが等しい四角形

任意の四角形の集合をＩ，平行四辺形の集合をＡ，長方形の集合をＢ，ひし形の集合をＣ，正方形の集合をＤとすると

$\dot{I}\supset\dot{A}\supset(B\cup C)\supset D$，$B\cap C=\dot{D}$
である。

【定 理 18】 任意の四角形が平行四辺形であるための必要十分条件はつぎのどれか１つがなりたつことである。

(1)　２組の対辺が平行である。（定義）
(2)　２組の対辺がそれぞれ等しい。
(3)　２組の対角がそれぞれ等しい。
(4)　１組の対辺が平行で，かつ等しい。
(5)　対角線が互に他を２等分する。

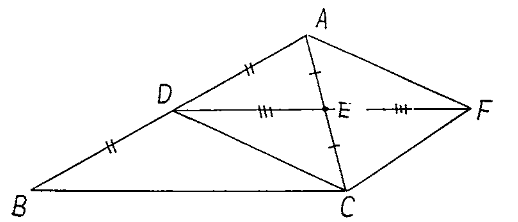
【系　１】（長方形の条件）
対角線が等しく互に他を２等分する。

【系　２】（ひし形の条件）
対角線が互に他を垂直に２等分する。

【系　３】（正方形の条件）
対角線が等しく，互に他を垂直に２等分する。

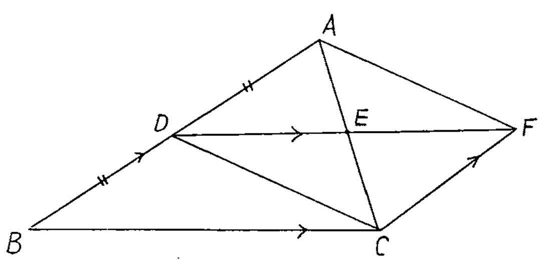
（問　題）上の定理及びその系を証明せよ。

【定 理 19】（中点連結定理）
三角形の２辺の中点を結ぶ結分は，第３辺に平行で，その長さは第３辺の長さの半分に等しい。



（DE の延長上に DE に等しく EF をとる）

〔問 題 1〕定理19を証明せよ。つぎにこの定理の逆「三角形の一辺の中点から他の辺に平行に引いた直線は，第３辺の中点を通る」ことを証明せよ。



（C から BA に平行線をひき DE の延長との交点をＦとせよ）

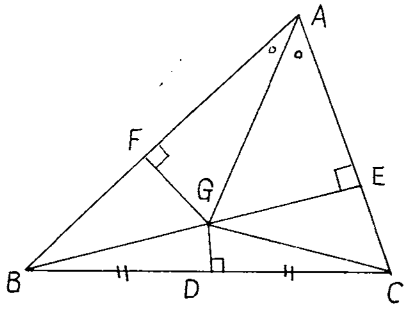
この定理19の逆は，つぎのように，定理19を利用して間接証明法（同一法）によっても証明できる。

AB の中点Ｄを通り BC に平行線を引き，AC との交点をＥとする。一方 AC の中点を E′ とすると，定理19によって DE′ は BC に平行になる。ところが，１点Ｄを通り BC に平行な直線は唯１つ(公理５）であるから半直線，DE は半直線，DE′ に重ならねばならない。かつ，E，E′ は共に AC 上の点であるからＥと E′ は一致する。すなわちＥは AC の中点でなければならない。

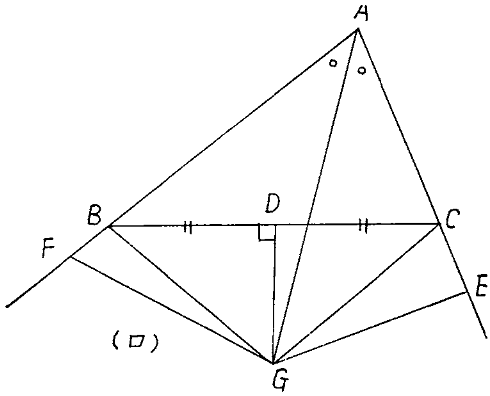
〔問 題 2〕三角形の３中線（頂点と対辺の中点を結ぶ線分）は１点で交わる。この点を三角形の重心という。３中線はそれぞれ重心によって２：１の比に内分されることを証明せよ。

（問 題 3）ある人がつぎのようにして「任意の三角形が二等辺三角形である」ことを証明できるといっ

た。以下の証明のどこに誤りがあるのか。



（イ）



（ロ）

△ABC において∠Aの二等分線と BC の垂直二等分線との交点を G とし，Gから AB, AC（またはその延長上）へ下した垂線の足をF，Eとする。

直角三角形 △AFG, △AEG において，∠FAG＝∠EAG, AGは共通

∴ △AFG≡△AEG　　∴ AF＝AE　FG＝EG……………(1)

つぎに直角三角形 △BFG, △CEG において垂直二等分線の性質から BG＝CG これと(1)から △BFG≡△CEG

∴ FG＝EC　(イ)図のとき　AB＝AF＋FB　　(ロ)図のとき　AB＝AF－FB

AC＝AE＋EC　　AC＝AE－EC

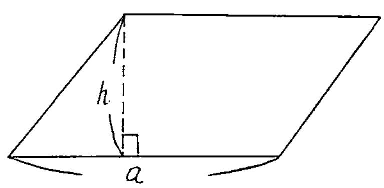
どの場合でも AB＝AC となる。

第 2 節　面 積 と 比 例

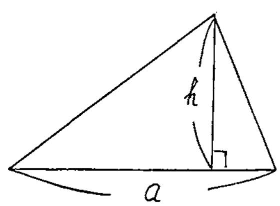
前章の公理のうち，量の公理で，長方形の面積をそのとなり合う二辺の長さの積として与え，またそこであげた面積の加法性によって，平行四辺形や三角形の面積について，つぎの定理がなりたつ。

【定 理 20】 (1)　平行四辺形の面積は底辺の長さ×高さ

(2)　三角形の面積は底辺の長さ×高さ×$\frac{1}{2}$

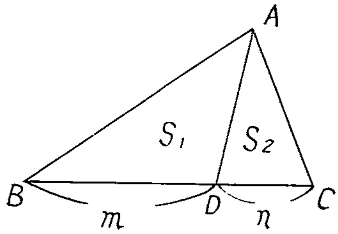


$S=ah$



$S=\frac{1}{2}ah$

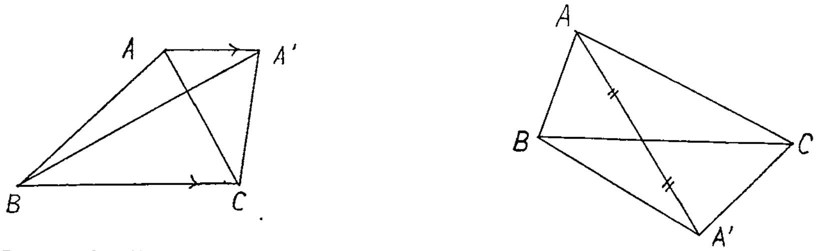
【定 理 21】 高さが一定な三角形の面積はその底辺の長さに比例する。また底辺の長さが一定な三角形の面積はその高さに比例する。



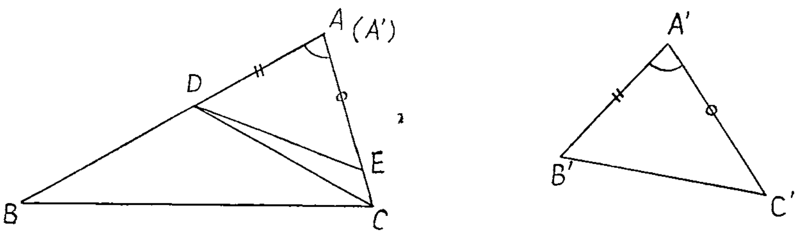
例えば図で △ABD の面積を S_1, △ADC の面積を S_2 とし，BD, DC の長さを m, n とすれば $\frac{S_1}{S_2}=\frac{m}{n}$

（問 題 1）定理20, 21をたしかめよ。

（問 題 2）底辺を共有する二つの三角形が等積ならば，頂点を結ぶ線分は底辺に平行かまたは，底辺（またはその延長）によって二等分される。またこの逆もなりたつことを証明せよ。



【定 理 22】 1つの角が等しい2つの三角形の面積の比はその角をはさむ2辺の長さの積の比に等しい。



$\triangle ABC$ と $\triangle A'B'C'$ で $\angle A=\angle A'$ なら $\dfrac{\triangle ABC}{\triangle A'B'C'}=\dfrac{AB\cdot AC}{A'B'\cdot A'C'}$

（証　明）頂点 A′ を A に重ね AB 上に A′B′ に等しく AD をとり C′ を C と AB に関して同側になるようおけば $\angle A'$ は $\angle A$ に等しいから A′C′ は AC に重なり，C′ のおちる点を E とすると

$\triangle ADE\equiv\triangle A'B'C'$　　　$\therefore$　$\triangle AADE=\triangle A'B'C$

$\dfrac{\triangle ABC}{\triangle ADC}=\dfrac{AB}{AD}$, $\dfrac{\triangle ADC}{\triangle ADE}=\dfrac{AC}{AE}$　　（定理21）

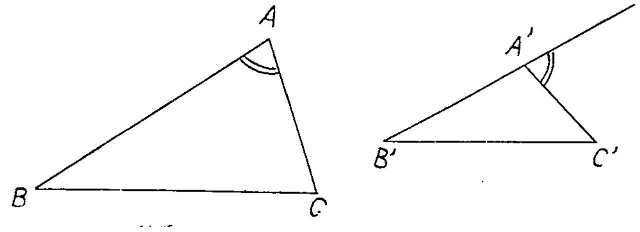
$\therefore$　$\dfrac{\triangle ABC}{\triangle ADC}=\dfrac{\triangle ABC}{\triangle ADC}\cdot\dfrac{\triangle ADC}{\triangle ADE}=\left(\dfrac{AB}{AD}\right)\left(\dfrac{AC}{AE}\right)=\dfrac{AB\cdot AC}{A'B'\cdot A'C'}$

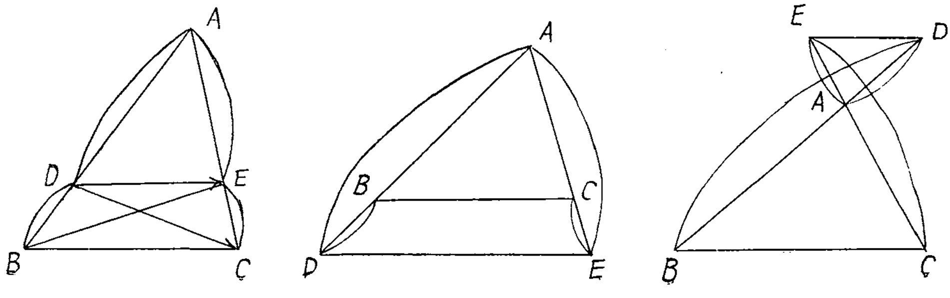
すなわち $\dfrac{\triangle ABC}{\triangle A'B'C'}=\dfrac{AB\cdot AC}{A'B'\cdot A'C'}$

【 系 】 1つの角が互いに補角をなす2つの三角形の面積の比は，その角をはさむ2辺の長さの積の比に等しい。

（問　題）この系を証明せよ。

【定 理 23】 三角形の1つの辺に平行な直線は他の2つの辺を同じ比に内分または外分する。この逆も成りたつ。





$$\mathrm{DE} /\!\!/ \mathrm{BC} \rightleftarrows \frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{DB}}=\frac{\mathrm{AE}}{\mathrm{EC}}$$

（証　明）$\dfrac{\mathrm{AD}}{\mathrm{DB}}=\dfrac{\triangle \mathrm{ADE}}{\triangle \mathrm{BDE}}$，$\dfrac{\mathrm{AE}}{\mathrm{EC}}=\dfrac{\triangle \mathrm{ADE}}{\triangle \mathrm{CDE}}$　$\mathrm{BC} /\!\!/ \mathrm{DE}$ より $\triangle \mathrm{BDE}=\triangle \mathrm{CDE}$ これから$\dfrac{\mathrm{AD}}{\mathrm{DB}}=$ $\dfrac{\mathrm{BE}}{\mathrm{EC}}$ が出る。この逆もいえる。（定理21の下の問題２）

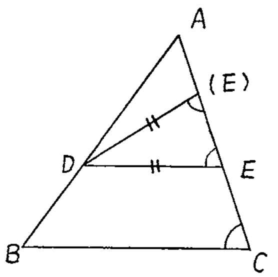
【系】$\triangle \mathrm{ABC}$ において，辺 AB，AC またはその延長上の点D，Eに対して DE と BC が平行ならば

(1) $\dfrac{\mathrm{AD}}{\mathrm{AB}}=\dfrac{\mathrm{AE}}{\mathrm{AC}}$　　(2) $\dfrac{\mathrm{AB}}{\mathrm{BD}}=\dfrac{\mathrm{AC}}{\mathrm{CE}}$　　(3) $\dfrac{\mathrm{AD}}{\mathrm{AB}}=\dfrac{\mathrm{DE}}{\mathrm{BC}}$

逆に(1)，(2)のどれかが成り立てば $\mathrm{DE} /\!\!/ \mathrm{BC}$。

比例式の性質$\dfrac{a}{a'}=\dfrac{b}{b'} \rightleftarrows \dfrac{a}{a+a'}=\dfrac{b}{a+b'}$，$\dfrac{a+a'}{a'}=\dfrac{b+b'}{b'}$から(1)，(2)が成り立つことはわかる。

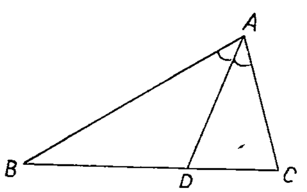
(3)の逆は必ずしも成り立たない。

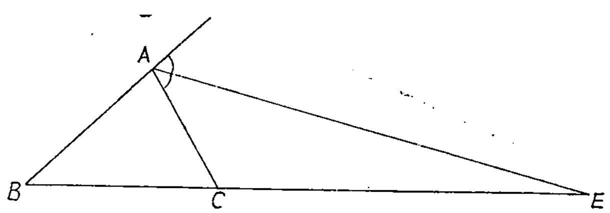


左図のように(3)を満たす DE すなわち $\mathrm{DE}=\mathrm{BC}\times\dfrac{\mathrm{AD}}{\mathrm{AB}}$の長さの DE が AC 上に二つとれる場合がある。

【定理 24】$\triangle \mathrm{ABC}$ で(1)頂角Aの二等分線は辺BCを２辺 AB，AC の比に内分する。

(2) $\mathrm{AB} \neq \mathrm{AC}$ のとき頂角Aの外角の二等分線は辺 BC を２辺 AB，AC の比に外分する





$\dfrac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AC}}=\dfrac{\mathrm{BD}}{\mathrm{DC}}$　　　$\dfrac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AC}}=\dfrac{\mathrm{BE}}{\mathrm{EC}}$

（証　明）(1)　$\triangle \mathrm{ABD}$ と $\triangle \mathrm{ACD}$ は $\angle \mathrm{BAD}=\angle \mathrm{DAC}$ であるから定理22によって

$$\frac{\triangle \mathrm{ABD}}{\triangle \mathrm{ACD}}=\frac{\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AD}}{\mathrm{AC}\cdot\mathrm{AD}}=\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AC}}$$

一方また，定理21によって$\dfrac{\triangle \mathrm{ABD}}{\triangle \mathrm{ACD}}=\dfrac{\mathrm{BD}}{\mathrm{DC}}$　$\therefore \dfrac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AC}}=\dfrac{\mathrm{BD}}{\mathrm{DC}}$

(2)　$\triangle \mathrm{ABE}$ と $\triangle \mathrm{ACE}$ について，$\angle \mathrm{BAE}+\angle \mathrm{CAE}=180°$ より

定理22の系によって　$\dfrac{\triangle \mathrm{ABD}}{\triangle \mathrm{ACE}}=\dfrac{\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AE}}{\mathrm{AC}\cdot\mathrm{AE}}=\dfrac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AC}}$

また定理21により $\dfrac{\triangle ABE}{\triangle ACE}=\dfrac{BE}{EC}$　　$\therefore\ \dfrac{AB}{AC}=\dfrac{BE}{EC}$

この定理によってD，Eは線分 BC を同じ比に内分および外分している。すなわち $\dfrac{BD}{DC}=\dfrac{BE}{EC}$ このときD，Eは BC を調和に分けるといい，B，C；D，Eは調和点列をなすという。

（問　題）一直線上にA，C，B，Dがこの順にあってA，B；C，Dが調和点列をなすとき

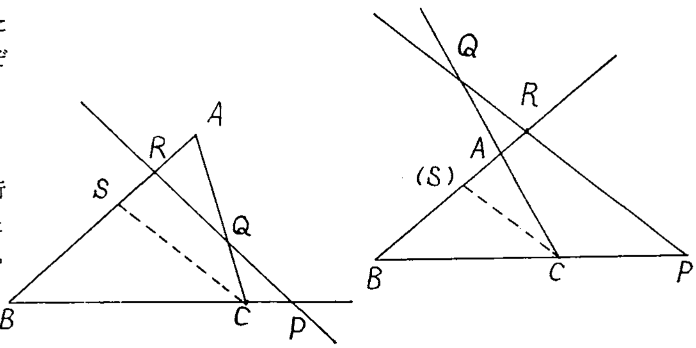
$\dfrac{1}{AC}+\dfrac{1}{AD}=\dfrac{2}{AB}$ であることを証明せよ。

またこのとき，D，C；B，Aも調和点列をなすと言えることを示せ。

【定 理 25】（メネラウスの定理）

△ABC の辺 BC, CA, AB またはその延長が1つの直線とそれぞれP，Q，Rで交わるとき

$$\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{AR}{RB}=1$$



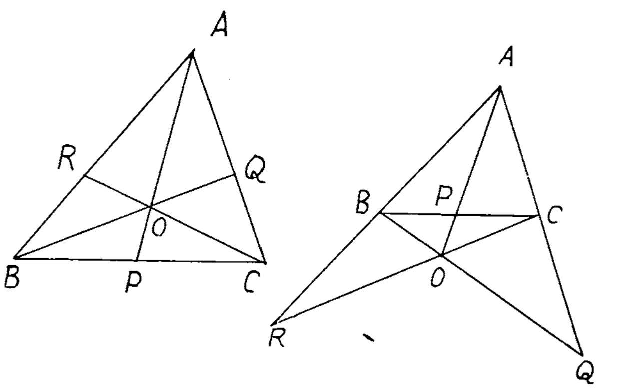
（証　明）Cからこの直線に平行線をひき，AB との交点をSとすると（定理23とその系によって）$\dfrac{BP}{PC}=\dfrac{BR}{RS}$，$\dfrac{CQ}{QA}=\dfrac{SR}{RA}$

$$\therefore\ \frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{AR}{RB}=\frac{BR}{RS}\cdot\frac{SR}{RA}\cdot\frac{AR}{RB}=1$$

【定 理 26】（チェバの定理）

三角形ABCの頂点 A, B, C と辺上にない任意の一点Oを結ぶ3直線と対辺またはその延長との交点をそれぞれP，Q，Rとすれば

$$\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{AR}{RB}=1$$



（証　明）Oが △ABC 内の1点のとき

$\dfrac{\triangle ABP}{\triangle ACP}=\dfrac{BP}{PC}$，$\dfrac{\triangle OBP}{\triangle OCP}=\dfrac{BP}{PC}$　　$\therefore\ \dfrac{BP}{PC}=\dfrac{\triangle ABP}{\triangle ACP}=\dfrac{\triangle OBP}{\triangle OCP}=\dfrac{\triangle ABP-\triangle OBP}{\triangle ACP-\triangle OCP}=\dfrac{\triangle ABO}{\triangle AOC}$

すなわち $\dfrac{BP}{PC}=\dfrac{\triangle ABO}{\triangle CAO}$ ……(1)　同様に $\dfrac{CQ}{QA}=\dfrac{\triangle BCO}{\triangle ABO}$ ……(2)　$\dfrac{AR}{RB}=\dfrac{\triangle CAO}{\triangle BCO}$ ……(3)

(1)，(2)，(3)をかけ合わせて $\dfrac{BP}{PC}\cdot\dfrac{CQ}{QA}\cdot\dfrac{AR}{RB}=1$

Oが △ABC の外にあるときも同様に証明できる。

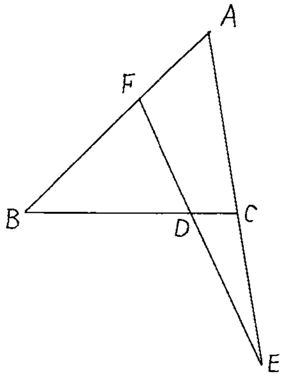
（注　意）ここで比例式の性質

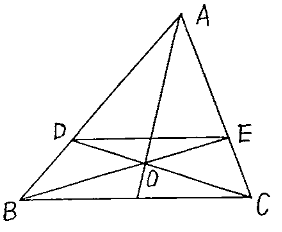
$\dfrac{a}{a'}=\dfrac{b}{b'}$ のときこの比の値は $\dfrac{a+b}{a'+b'}$ にも $\dfrac{a-b}{a'-b'}$ にも等しいことを証明しておいて利用する。

$$\left(\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}\cdots\cdots\cdots\cdots=\frac{la+mb+nc+\cdots\cdots\cdots}{la+mb'+nc'+\cdots\cdots\cdots}\right)$$

（問 題 1）$\triangle ABC$ の辺 BC に平行な直線と辺 AB, AC の交点をそれぞれD, E とする。BE, CDの交点 O と A とを結ぶ直線は BC の中点を通ることを証明せよ。

（問 題 2）





$\triangle ABC$ において辺 AB 上に $2AF=BF$ であるように点 F を AC の延長上に AC に等しく CE をとり，EF と BC の交点を D とするとき，$BD:DC$, $FD:DE$ の値を求めよ。

【定　義】（相似多角形）2つの n 角形 $A_1A_2\cdots\cdots A_n$, $B_1B_2B_3\cdots\cdots B_n$ がつぎの条件を満足するとき相似であるという。

(1) $\angle A_1=\angle B_1$, $\angle A_2=\angle B_2$, $\cdots\cdots\cdots\angle A_n=\angle B_n$

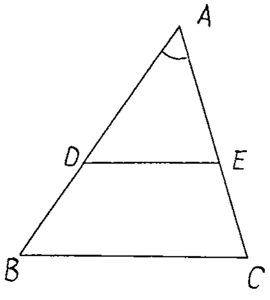
(2) $\dfrac{A_1A_2}{B_1B_2}=\dfrac{A_2A_3}{B_2B_3}=\cdots\cdots=\dfrac{A_{n-1}A_n}{B_{n-1}B_n}=\dfrac{A_nA_1}{B_nB_1}$

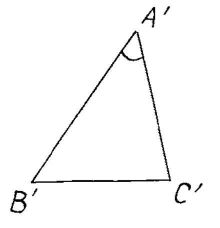
従って2つの三角形の相似も対応する3つの角がそれぞれ等しく，対応する3辺の比がすべて等しくなければならないが，このすべてがたしかめられなくてもつぎの条件がなりたつとき相似であるという。

(2)の比を相似比という。

【定 理 27】 2つの三角形は対応するつぎの要素が等しいとき相似である。

(1)　2辺の比と夾角　　（第一相似定理）
(2)　2　　角　　（第二相似定理）
(3)　3 辺 の 比　　（第三相似定理）　$\triangle ABC$ と $\triangle A'B'C'$ において





(1)　$\angle A=\angle A'$, $\dfrac{AB}{A'B'}=\dfrac{AC}{A'C'}$

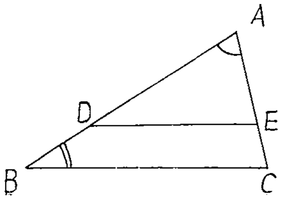
辺AB，AC上またはその延長上に $AD=A'B'$, $AE=A'C'$ となるように定めると，

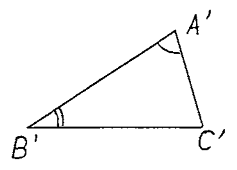
$\triangle ADE\equiv\triangle A'B'C'$（第一合同定理）　$\therefore$　条件 $\dfrac{AB}{A'B'}=\dfrac{AC}{A'C'}$ より $\dfrac{AB}{AD}=\dfrac{AC}{AE}$ $\therefore DE/\!/BC$

従って $\angle B=\angle ADE=\angle B'$　$\angle C=\angle AED=\angle C'$　また $\dfrac{AB}{AD}=\dfrac{AC}{AE}=\dfrac{BC}{DE}$

$AD=A'B'$, $AE=A'C'$, $DE=B'C'$ であるから　$\dfrac{AB}{A'B'}=\dfrac{AC}{A'C'}=\dfrac{BC}{B'C'}$

(2)　2角 $\angle A=\angle A'$, $\angle B=\angle B'$ のとき，





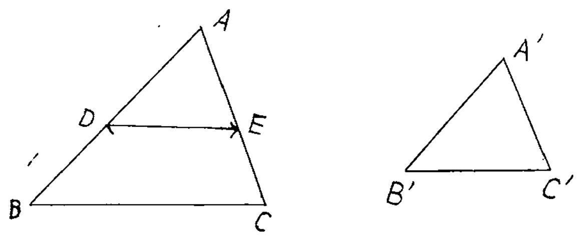
三角形の内角の和が $2\angle R$ であることから，$\angle C=\angle C'$

故に対応辺の比が等しいことを示せばよい。

$\triangle ABC$ の辺 AB, AC またはその延長上に D, E を $AD=A'B'$, $AE=A'C'$ であるようにとる。$\angle A=\angle A'$ より(1)の場合と同様に $\triangle ADE\equiv\triangle A'B'C'$ $\therefore\angle ADE=\angle B'=\angle B$ 故に $DE//BC$ 従って $\dfrac{AB}{AD}=\dfrac{AC}{AE}=\dfrac{BC}{DE}$ $AD=A'B'$, $AE=A'C'$, $DE=B'C'$ であるから

$\dfrac{AB}{A'B'}=\dfrac{BC}{B'C'}=\dfrac{CA}{C'A'}$ よって $\triangle ABC\backsim\triangle A'B'C'$

(3) $\dfrac{AB}{A'B'}=\dfrac{BC}{B'C'}=\dfrac{CA}{C'A'}$ ① のとき



$\triangle ABC$ の辺 AB またはその延長上に点 D を $AD=A'B'$ であるようにとりDを通って BC に平行線をひき，ACまたはその延長上との交点を E とすれば

$\angle A=\angle A$, $\angle B=\angle ADE$, $\angle C=\angle AED$

$\dfrac{AB}{AD}=\dfrac{BC}{DE}=\dfrac{CA}{EA}$ これと条件①と $AD=A'B'$ から

$DE=B'C'$, $EA=C'A'$ 故に第三合同定理により $\triangle ADE\equiv\triangle A'B'C'$

$\therefore$ $\angle A=\angle A'$, $\angle B=\angle B'$, $\angle C=\angle C'$ よって $\triangle ABC\backsim\triangle A'B'C'$

【定　義】（相似の位置）

2つの n 角形 A_1, A_2, ……A_n と n 角形 B_1, B_2, ……B_n が，つぎの条件をみたすとき，「O を相似の中心とする相似の位置にある」という。

(1) 対応頂点を結ぶ直線 A_1B_1, A_2B_2, ……A_nB_n が一点 O に集る。

(2) 線分 A_1B_1, A_2B_2, ……A_nB_n が O によって一定の比に同時に内分または外分される。

【定 理 28】

相似多角形はこれを任意の一点 O を相似の中心とする相似の位置に移すことができる。

与えられた相似多角形を

$A_1A_2\cdots\cdots A_n$, $B_1B_2\cdots\cdots B_n$ とし

相似比$\dfrac{A_1A_2}{B_1B_2}=\cdots\cdots=\dfrac{A_{n-1}A_n}{B_{n-1}B_n}=\dfrac{A_nA_1}{B_nB_1}=\dfrac{m}{n}$

とする。

任意の一点 O と A_1, A_2, ……, A_n を結びこれらの線分上，またはその延長上に $\dfrac{OA_1}{OB_1'}=\dfrac{OA_2}{OB_2'}$ $=\dfrac{OA_3}{OB_3'}=\cdots\cdots=\dfrac{OA_n}{OB_n'}=\dfrac{m}{n}$ となるよう $B_1'B_2'\cdots\cdots B_n'$ をとれば n 角形 $B_1'B_2'\cdots\cdots B_n'\backsim n$ 角形 $A_1A_2\cdots\cdots A_n$ ところが条件より $A_1A_2\cdots\cdots A_n\backsim B_1B_2\cdots\cdots B_n$ 故に $B_1'B_2'\cdots\cdots B_n'\backsim$ $B_1B_2\cdots\cdots B_n$ また$\dfrac{A_1A_2}{B_1B_2}=\dfrac{m}{n}=\dfrac{A_1A_2}{B_1'B_2'}$から$B_1B_2=B_1'B_2'$

故に（n 角形）$B_1B_2\cdots\cdots B_n\backsim$（$n$ 角形）$B_1'B_2'\cdots\cdots B_n'$

【定 理 29】 図形Fと F′ が相似の位置にあるとき，F 上の2点 P, Q に対応する F′ 上の点を P′, Q′ とすれば，$PQ//P'Q'$ でかつ $PQ:P'Q'$ は相似比に等しい。

（問　題）この定理を証明せよ。

【定 理 30】 相似な三角形の面積の比は相似比の2乗に等しい。

（証　明）$\triangle ABC\backsim\triangle A'B'C'$ のとき，$\angle A=\angle A'$ 定理22によって

$$\frac{\triangle ABC}{\triangle A'B'C'}=\frac{AB\cdot AC}{A'B'\cdot A'C'}=\left(\frac{AB}{A'B'}\right)\left(\frac{AC}{A'C'}\right)=k^2$$

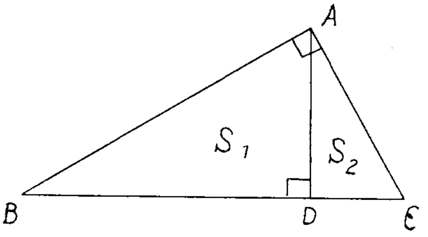
〔定理30の系〕 相似多角形（n 角形）の面積の比は相似比の２乗に等しい。

相似 n 角形の対応する頂点からでる $n-3$ 本の対角線によって（$n-2$）このそれぞれ相似な三角形に分けることができるから，それらをそれぞれ S_1，$S_2\cdots\cdots S_{n-2}$ S_1' $S_2'\cdots\cdots S_{n-2}'$ とすると

$$\frac{S}{S'}=\frac{S_1+S_1+\cdots\cdots+S_{n-2}}{S_1'+S_2'+\cdots\cdots S'_{n-2}}=\frac{na^2}{nb^2}=\frac{a^2}{b^2}$$

ただし $\dfrac{a}{b}$ は相似比。

【定 理 31】 直角三角形の斜辺の長さの２乗は，直角を夾む２辺の長さの２乗の和に等しい。（ピタゴラスの定理）



$\triangle ABC$で $\angle A=\angle R$ のとき$BC^2=AB^2+AC^2$

（証　明）直角の頂点Aから斜辺 BC へ垂線ADを下す，と

$\triangle ABC \backsim \triangle DBA \backsim \triangle DAB$

（２角が等しいことより）

$\triangle ABC=S$，$\triangle DBA=S_1$，$\triangle DAC=S_2$ とすると，

（定理30により） $\dfrac{S}{BC^2}=\dfrac{S_1}{BA^2}=\dfrac{S_2}{AC^2}=K$ とおくと

$S=BC^2K$，$S_1=BA^2K$，$S_2=AC^2K$

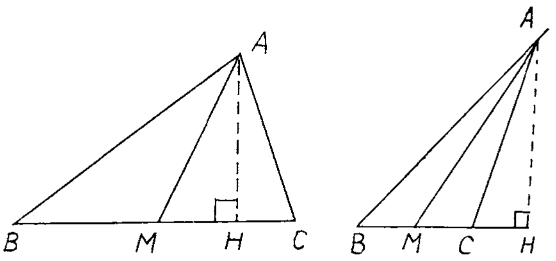
$S=S_1+S_2$ より $BC^2K=BA^2K+AC^2K$

$\therefore\ BC^2=BA^2+AC^2$

【定 理 32】 パップスの定理

$\triangle ABC$ において BC の中点をMとすると

$AB^2+AC^2=2(AM^2+BM^2)$



（証　明）Aから対辺BCへ垂線AHを下すと，

ピタゴラスの定理により

$AB^2=AH^2+BH^2=(AH^2-MH^2)+(BM+MH)^2=AM^2+BM^2+2BM\cdot MH\cdots\cdots(1)$

$AC^2=AH^2+CH^2=(AM^2-MH^2)+(CM\sim MH)^2$
$=AM^2+CM^2-2CM\cdot MH$
$=AM^2+BM^2-2BM\cdot MH\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$

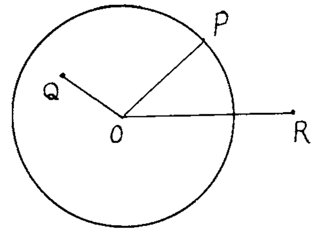
(1)，(2)より　　$AB^2+AC^2=2(AM^2+BM^2)$

（問　題）三角形 ABC の辺 BC を $m:n$ に内分する点を D とすれば $n\ AB^2+m\ AC^2=n\ BD^2+m\ DC^2+(m+n)\ AD^2$ となることを証明せよ。

第３節　　円

【定　義】（円）平面上の一定点 O と長さが一定 r である線分が与えられているとき，$\overline{OP}=r$ であるようなすべての点Pの集合を円という。定点Oをこの円の中心，定線分 r を半径という。$\overline{OQ}<r$ であるようなすべての点 Q の集合を円の内部といい，$OR>r$ であるようなすべて点 R の集合を円の外部と

いう。



上の定義の円とその内部をあわせた図形を円板といい，これを円ということもある。始めの定義の円をこれと区別したいときはそれを円周という。両端が円周上にある線分を円の弦といい，中心を通る弦をとくに直径という。

また中心と円周上の点を結ぶ線分を半径という。

中心 O の円周上の二点 A，B によって円周は劣角∠AOBの内部にある部分と外部にある部分に分けられる。その各々を弧といい，劣弧$\overset{\frown}{AB}$，優弧$\overset{\frown}{AB}$などとかく，弧$\overset{\frown}{AB}$と弧$\overset{\frown}{BA}$は同じものを表わす。

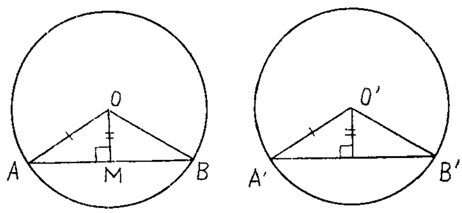
$\overset{\frown}{AB}$とかけば普通劣弧の方をさす。∠AOBをその内角にある$\overset{\frown}{AB}$（または弦AB）に対する中心角という。

【定 理 33】 円 O の中心から一つの弦 AB にひいた垂線はこの弦を二等分する。

（証　明）△OAB は O を頂点とする二等辺三角形であるから（定理8，問題2）これはなりたつ。弦AB上の任意の点をPとすれば OP＜OA（＝OB）（定理14）故にPは円 O の内部にある。また AB の延長および BA の延長上の点 Q は OQ＞OA となることにより円の外部にある。従って円と直線は三点以上を共有することはない。

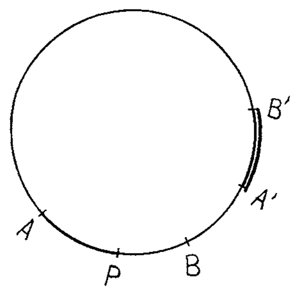
〔 系 〕円の中心と一つの弦の中点を結ぶ直線はこの弦の垂直二等分線である。

【定 理 34】 同円または等円において，(1)等しい長さの弦へ中心から下した垂線の長さは等しく，逆に，(2)中心から下した垂線の長さが等しい弦の長さは等しい。



直角三角形の合同条件（定理10）を利用して証明できる。

（$\overset{\frown}{AB}$の長さ）$\overset{\frown}{AB}$に対してその長さを表わす正の実数が対応するものとする。同円または等円で$\overset{\frown}{AB}$，$\overset{\frown}{A'B'}$が図形として合同であるときこの二つの弧の長さは等しいといい，$\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{A'B'}$で表わす、$\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{BA}$，また $\overset{\frown}{AB}$ 上に$\overset{\frown}{AP}=\overset{\frown}{A'B'}$ であるような点 P が存在すれば，（あるいは$\overset{\frown}{AB}$上に$\overset{\frown}{BQ}=\overset{\frown}{A'B'}$であるような Q があるなら）$\overset{\frown}{AB}$は$\overset{\frown}{A'B'}$より大であるといい$\overset{\frown}{AB}>\overset{\frown}{A'B}$（または$\overset{\frown}{A'B'}$は $\overset{\frown}{AB}$ より小$\overset{\frown}{A'B}<\overset{\frown}{AB}$）とかく。



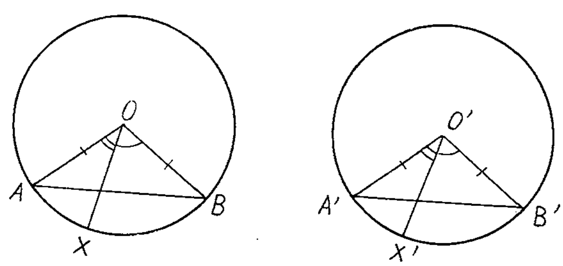
【定 理 35】 同円または等円で，

(1) 等しい大きさの中心角に対する弧（または弦）の長さは等しく

(2) 大きい中心角に対する弧は小さい中心角に対する弧の長さよりも大きい。

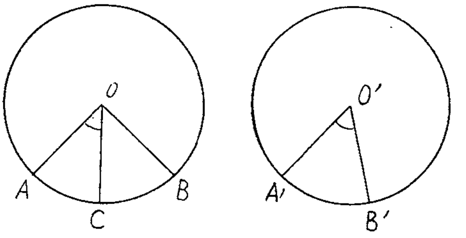
（証　明）

(1) 等円 O，O′ において，∠AOP＝∠A′O′B′ とする△OAB≡△OA′B′（第1合同定理）故に△OAB を △O′A′B′ に重ねることができる。故に$\overset{\frown}{AB}$，$\overset{\frown}{A'B'}$の両端はそれぞれ重なる。いま$\overset{\frown}{AB}$上の任意の1点を X とし，∠AOX＝∠A′O′X′ であるような点 X′ を $\overset{\frown}{A'B'}$ 上にとれば，△OAX≡△O′A′X′ となり X は X′ に重なる。このように



$\overset{\frown}{AB}$ 上の各点がこれに対応する $\overset{\frown}{A'B'}$ 上の点に重ねることができるから，$\overset{\frown}{AB} \equiv \overset{\frown}{A'B'}$ ∴ $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{A'B'}$ また $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{A'B'}$ は明らか。

(2) 等円O，O′において∠AOB＞∠A′O′B′とする。角の大きさの公理によって，∠AOB の内に ∠A′O′B′ となるような半直線 OC が存在する。故にこの半直線と $\overset{\frown}{AB}$ の交点 C は $\overset{\frown}{AB}$ の間にあることになり，弧の長さの大小の定義によって $\overset{\frown}{AB} > \overset{\frown}{A'B'}$



（問　題）定理34の逆もまた成り立つことをたしかめよ。

【定 理 36】 同円または等円において

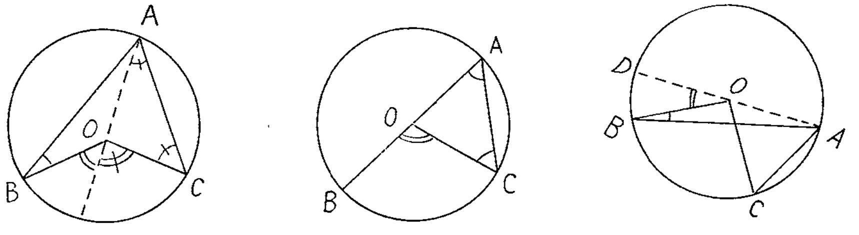
(1) 等しい長さの弧に対する弦の長さは等しい。

(2) 大きい劣弧に対する弦の長さは小さい劣弧に対する弦の長さより大きい。

また，これらの逆も成り立つ。

（問　題）この定理を証明せよ。

【定　義】　（円周角）円周上の一点Aから出る2つの弦を AB，AC とするとき，∠BAC を $\overset{\frown}{BC}$に対する円周角という。（$\overset{\frown}{BC}$ は点 A を含まない方をさす）（弓形）弦 BC と弧 BAC 上の点の和集合を弓形という。∠BAC をこの弓形の含む角という。



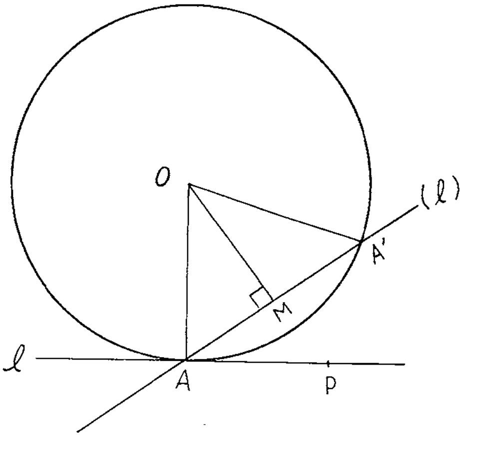
【定 理 37】 円周角の大きさは同じ弧に対する中心角の大きさの半分に等しい。

【系　　1】 同円または等円において，同じ弧または等しい弧の上に立つ円周角は等しい。

【系　　2】 直径に対する円周角は直角であり，逆もなりたつ。

【定　　義】（接線・割線）

平面上で直線と円との共有点が唯一点であるときこの直線はこの円に接するといい，この直線を接線，共有点を接点という。共有点が2個のとき，直線は円と交わる，この直線をこの円の割線，共有点を交点という。



【定 理 38】 (1) 半径の端を通りこれに垂直な直線は接線である。逆に(2)円の接線は接点を通る半径に垂直である。

（証　明）

(1) 円Oの半径OAの端点Aを通りこれに垂直な直線 l 上のA以外の任意の点を P とすれば，OP＞OA（定理14）故にPは円Oの外にある。すなわち l と円Oの共有点は A だけ，故に接線である。

(2) 接線 l の接点を A とし，l が半径 OA に垂直でないとすればOから接線 l に垂線を下してその足をMとするとき，AとMは異な

る点である。$\dot{A}\dot{M}$ の延長上に $\overline{AM}=\overline{MA'}$ であるような点 A′ をとれば第一合同定理により△OAM≡△OA′M　∴OA＝OA′ 故に A′ は円 O 上にある A′ は A と異なる点であるから l は円 O と二点 A，A′ を共有することになり，接線であるという条件に矛盾する。故に l は半径OAに垂直でなければならない。

〔系〕円の中心 O から l に下した垂線の足を H とするとき，円 O の半径を r $\overline{OH}=d$ とすれば

(1) $d<r$ ならば直線 l は円と交わる。

(2) $d=r$ ならば直線 l は円に接する。

(3) $d>r$ ならば直線 l は円と共有点をもたない。

これらの逆もまた真である。

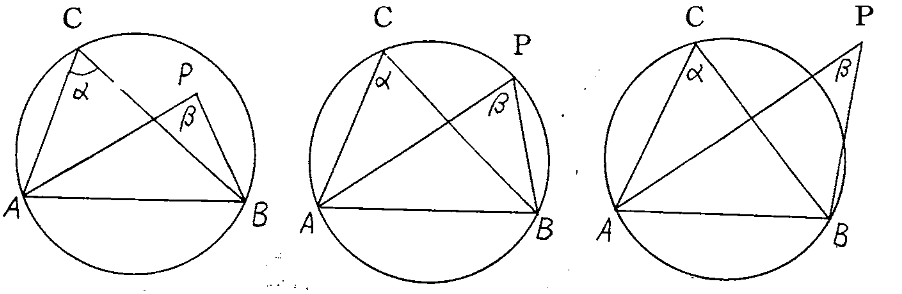
【定理 39】 弦 AB と弧 ACB で作られる弓形と，その弦に関して弧と同じ側に点 P がある。弓形の角を α，P から弦を見こむ角を β とするとき，

(1) P が弓形内にあるならば $\alpha<\beta$

(2) P が弓形の弧上にあるならば $\alpha=\beta$

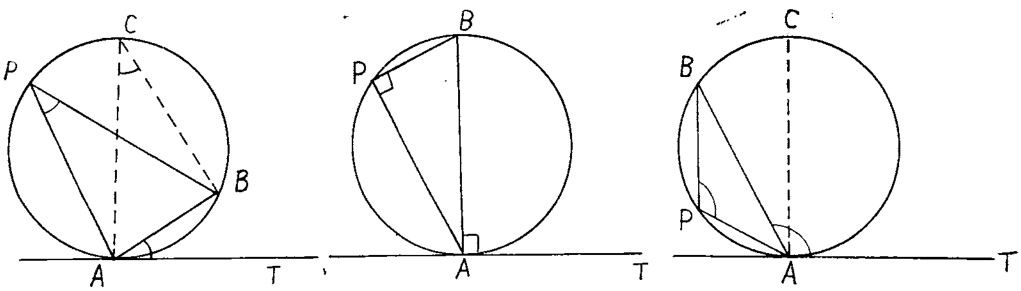
(3) P が弓形外にあるならば $\alpha>\beta$

またこの逆もなりたつ。



（証　明）AB と円弧との交点をDとするとき，∠ADB＝α（定理36の系 1）α と β は△BADの外角と内対角の関係にあることより明らか。逆は転換法で成立する。

【定理 40】 円 O の弦 AB とその端 A における接線とのはさむ角はその角の内部に含まれる弧 AB の上に立つ円周角に等しい。

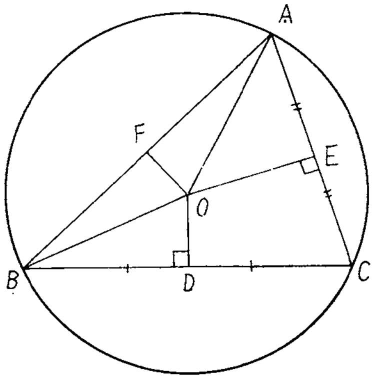


（問　題）上の各図についてこの定理をたしかめよ。

【系】 円の弦とその一端を通る直線とのなす角がその弦に関してその角と反対側にある弓形の含む角に等しいならばその直線は円に接する。（同一法によってこの系は証明される）

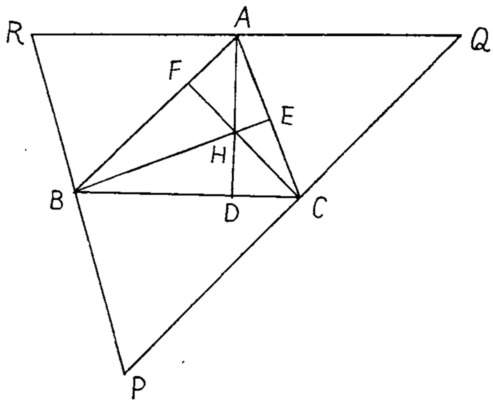
【定理 41】 三角形は常に１つの外接円をもつ。（この円の中心を三角形の<u>外心</u>という）

（証　明）与えられた三角形を ABC とする三辺の垂直二等分線が一点に集る。何故ならば二辺 BC，CA の垂直二等分線の交点をOとし，O から AB へ垂線すと，AF＝BF となることによりわかる。垂直二等分線の性質によってOB＝OC となるから O を中心 OA を半径とする円周上に B，C はある。



これ以外に外接円のないことは，円の中心は各弦の垂直二等分線上になければならない（定理33の系）ことから容易にわかる。

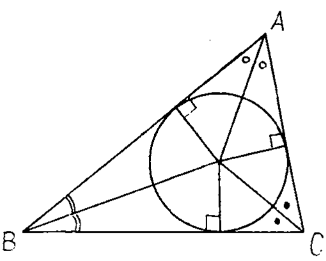
【定 理 42】 三角形の各頂点から対辺への３本の垂線は１点で交わる。この点を三角形の垂心という。



△ABCの各頂点から対辺に垂線 AD，BE，CF をおろす。A，B，Cを通りそれぞれ対辺に平行な直線を引き，それらの交点を P，Q，Rとする。△PQRに対して，BE，CF，AD はそれぞれ三辺の垂直二等分線になっていることをたしかめよ。これによって AD，BE，CFは△PQR の外心 H で交わるといえる。

【定 理 43】 三角形の３内角の二等分線は１点で交わるこの点を三角形の内心という。

内心から３辺への垂線の長さは等しい。すなわち内心はこの三角形の三辺に接する円（内接円）の中心である。

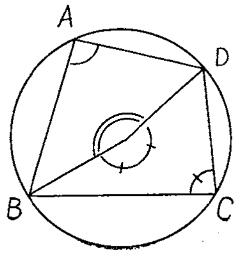


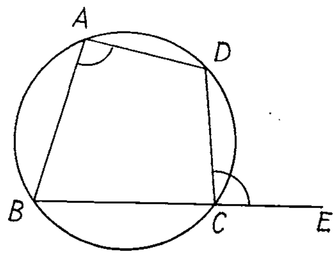
【定 理 44】 三角形の１内角の二等分線と他の２外角の２等分線は１点で交わる。この点を傍心という。傍心は３辺から等距離にある。すなわち傍心は一辺と他の二辺の延長に接する円（傍接円）の中心である。従って，三角形には３つの傍心がある。

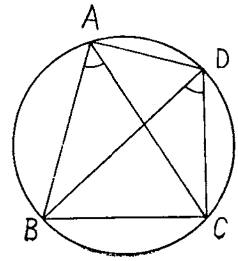
（問　　題）以上の定理43，44を証明せよ。

（三角形の五心）前に定理19のつぎの問題２であげた三角形の重心と，定理41～44までにあげた外心，垂心，内心，傍心をあわせて，三角形の五心という。

【定 理 45】 四角形 ABCD が円に内接するための必要十分条件はつぎのどれかがなりたつことである。







(1)　1組の対角の和が $2\angle R$ である。

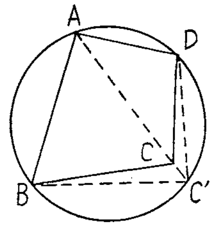
(2)　外角とその内対角が等しい。

(3)　$\angle BAC=\angle BDC$

（証　明）(1)　〔定理37〕によって $\angle A=\frac{1}{2}$（$\overset{\frown}{BCD}$に対する中心角）

$\angle C=\frac{1}{2}$（$\overset{\frown}{BAD}$に対する中心角）

$\therefore\ \angle A+\angle C=\frac{1}{2}\cdot 4\angle R=2\angle R$

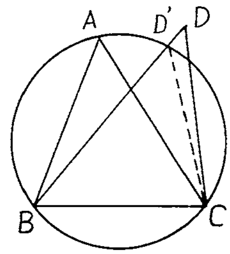


逆に四角形 ABCD において $\angle BAD+\angle BCD=2\angle R$ とする。三点 A，B，D を通る円と AC またはその延長との交点を C′ とすれば$\angle BAD+\angle BC'D=2\angle R$ であるから $\angle BCD=\angle BC'D$もし C と C′ が一致しなければ定理5の（問題3）によって$\angle BCD<\angle BC'D$ または $\angle BCD>\angle BC'D$ となって不合理である。よってCと C′ は一致する。ゆえに ABCD は円に内接する。

(2)　外角 $\angle DCE$ に対する内対角は $\angle A$四角形 ABCD が円に内接すれば，　$\angle A+\angle BCD=2\angle R$

$\angle BCD+\angle DCE=2\angle R$

$\therefore\ \angle A=\angle DCE$　　逆も成り立つ



(3)　定理37の系1によってABCDが円に内接すれば$\angle BAC=\angle BDC$は明らか。

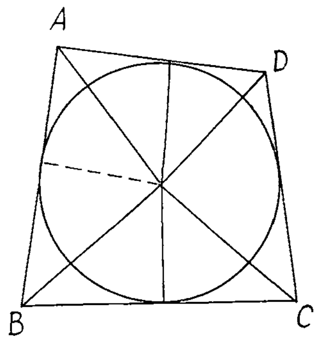
逆に $\angle BAC=\angle BDC$ のとき，$\triangle ABC$ の外接円と BD またはその延長との交点を　D′　とすれば，$\angle BAC=\angle BD'C$　ゆえに$\angle BDC=\angle BD'C$ となる一方この二角は外角と内対角の関係によって $\angle BD'C>\angle BDC$ または $\angle BD'C<BDC$ これは不合理，故に D と D′ は一致しなければならない。

【定 理 46】 四角形 ABCD が円に外接するための必要十分条件は対辺の和が等しいことである。

すなわち $AB+CD=BC+AD$

（問　題）定理40を証明せよ。

（2円の位置関係）



【定 理 47】 2円 O，O′ の半径を r，r' 中心距離を d とするとき，

(1)　2円が互に外部にあるとき　$d>r+r'$

(2)　2円の外接するとき　$d=r+r'$

(3)　2円が交わるとき　$r+r'>d>r\sim r'$

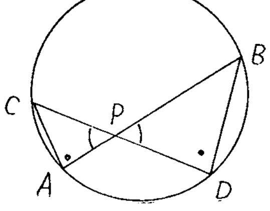
(4)　2円が内接するとき　$d=r\sim r'$

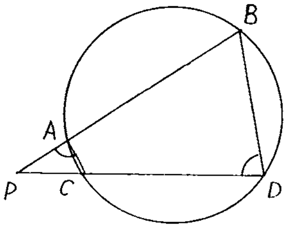
(5)　一方の円が他方の内部にあるとき　$d<r\sim r'$

これらの逆も成り立つ。

【定 理 48】 交わる2円の共通弦はその中心線によって垂直に2等分される。

【定 理 49】 2円が接するとき接点は中心線上にある。





（問　題）以上の定理を証明せよ。

（方べきの定理（円積定理））

【定 理 50】 円の2弦AB，CDまたはそれらの延長の交点をPとすれば，$PA\cdot PB=PC\cdot PD$

$\triangle PAC$，PDB において

$\angle APC = \angle DPB$（対頂角または共通）

$\angle PAC = \angle PDB$（定理37系1，定理45の(2)）

$\therefore\ \triangle PAC \backsim \triangle PDB$

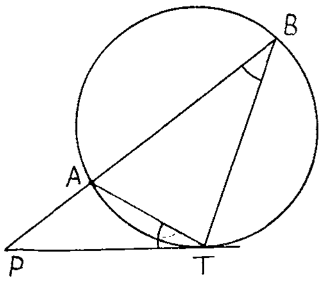
$\therefore\ PA : PC = PD : PB$

$\therefore\ PA \cdot PB = PC \cdot PD$

【系】この定理の逆もまた成り立つ。すなわち，2つの線分 AB，CD または AB の延長と CD の延長とが P で交わるとき，$PA \cdot PB = PC \cdot PD$ ならば4点 A，B，C，D は同一円周上にある。

【定理 51】円 O の外部の点 P を通り，円 O に引いた接線の接点をTとする。P を通る任意の割線とが円交わる点を A，B とすれば，

$PT^2 = PA \cdot PB$



（証　明）PT は接線であるから

$\angle PTA = \angle ABP$（定理40）

また $\angle P$ は共通　$\therefore\ \triangle PTA \backsim \triangle PBT$

$\therefore\ PT : PB = PA : PT$

$\therefore\ PT^2 = PA \cdot PB$

（問　題）（この定理46の逆）1直線上にない3点 A，B，T および線分 AB の延長上に1点 P が与えられているとき，$PT^2 = PA \cdot PB$ ならば，PTはA，B，T を通る円に接する。これを証明せよ。

【定理 52】$\triangle ABC$ の外接円の周上の一点 P から対辺 BC，CA，AB またはその延長に下した垂線の足 D，E，F は同一直線上にある。逆に一点 P から $\triangle ABC$ の各辺またはその延長に下した垂線の足が同一直線上にあれば点 P は $\triangle ABC$ の外接円周上にある。直線 DEF を点 P のシムソン線という。

（問　題）この定理を証明せよ。

【おわりに】

平面幾何の基本的な部分で，是非これだけの内容は知識としても必修させたい，と思うことを一つの体系としてまとめてみたつもりである。なお，この後，軌跡や作図に対してどのような指導があるべきかも残されているが，これについては，現行の高校で一般に取扱っている程度に，解析幾何的な解法もとり入れて綜合的に指導した方がよいようにも思われるので，別にまた検討したいと思っている。また，立体幾何は一応別にしたが，このように殊更切り離さずできるだけ空間の中において統合的に理解させるような指導の仕方もあると思う。現在，解析幾何で，或はベクトル，複素数を利用して図形的指導内容を扱っているが，それらですべての問題が解決出来るか。或は，それらで同じ内容を別々に重複してたしかめ合っているきらいがあるが，何か有機的な関連を持たせるか，お互いにこの指導内容はこの方法が最適であるというような見透しがつけられれば素晴らしいと思うが難かしい問題として残されていると思う。兎に角，現在，寸断された知識として扱われている図形教材の一部に，本来の論証指導で筋を通すというねらいのもとに，試みた指導例の一つであるが，諸先生方の御指導をお願いする。

（参考文献）

1. Geometry part 1 School Mathematios studyGroup Yale University Press
2. G. D. Birkhoff : A sot of postulate for plane Geometry based on scal and protrator.
3. 数学基礎論　竹内外史　現代数学講座（共立出版）
4. 幾何入門　佐々木重夫著　岩波全書 209