微分方程式の指導について

能　崎　克　己

新課程の数学Ⅲにおける微積分は，旧課程とくらべて取扱う関数の範囲が広げられ，微分方程式が新しくとりあげられている。学習指導要領によれば，微分方程式の指導は，つぎのようになっている。

数　　学 III

3　内　　容

(2)　積分法とその応用

イ　積分の応用

(ｲ)　微分方程式の意味

微分方程式については「指導計画作成および指導上の留意事項」の(1)に，自然現象や図形の性質などが，微分方程式に表わされることおよびこれを解いて，問題の解決ができることを知らせる程度とし，取り扱う微分方程式は，$\dfrac{dy}{dx}=ky$（k は定数）の程度となっている。

単に既知の関数を微分したり積分したりするだけでなく，未知の関数の導関数を含む方程式を満足する関数を求めること，すなわち微分方程式を解くことが重要であり，それがまた新しい型の問題であることを認識させる。実際に微分方程式を解くことは $\dfrac{dy}{dx}=ky$ の程度にとどめ，複雑なもの，抽象的，形式的なものは避ける。しかし，たとえば，$e^{ax}\sin bx$ が第2階線形微分方程式を満足することを注意して振動の性質を説明したりすることは有意義であろう。

4　指導計画作成および指導上の留意事項

(1)　微分方程式の指導

「数学Ⅲ」に微分方程式を取り入れた趣旨は，いろいろな自然現象や図形の性質などが微分方程式に表わされること，またその微分方程式を解くことによって自然現象や図形に関する問題が解明されることを知らせることにある。したがって，取り扱われる方程式も，複雑なもの，抽象的，形式的なものは避ける。「取り扱う微分方程式は，$\dfrac{dy}{dx}=ky$（kは定数）の程度とする。」というのも，この趣旨からである。

一方，応用数学における微分方程式の扱いについては，学習指導要領に，次のように述べられている。

応 用 数 学

3 内　　容

(6) 積 分 法

ウ 積分の応用

(エ) 簡単な微分方程式

「数学Ⅲ」で取り扱う微分方程式は $\frac{dy}{dx}=ky$ の程度である。ここでは学科の必要に応じて，さらに変数分離法，簡単な第一階線形微分方程式や，$a\frac{d^2y}{dx^2}+b\frac{dy}{dx}+cy=0$ の程度の第二階線形微分方程式およびその応用を扱う。

上に記したように，応用数学においては，「$a\frac{d^2y}{dx^2}+b\frac{dy}{dx}+cy=0$ の程度の第二階線形微分方程式」まで「およびその応用を扱う」ことになっており，これに対して数学Ⅲでは「$\frac{dy}{dx}=ky$ （kは定数）の程度」までであって，両者の扱い方には明らかに差異がつけられている。また，微分方程式を取り扱う目的は，「いろいろな自然現象や図形の性質などが微分方程式に表わされること，またその微分方程式を解くことによって，自然現象や図形に関する問題が解明されることを知らせることにある」が，$\frac{dy}{dx}=ky$ 程度ではその意味が極度に制限される。従って，数学Ⅲにおいても，少くとも応用数学におけると同様に，$a\frac{d^2y}{dx^2}+b\frac{dy}{dx}+cy=0$ 程度までを扱うべきであると考える。

上のような意味から，現在の3年生（旧課程の数学Ⅲの履習者）を対象として61ページ――67ページの指導内容Bによって授業を行ない，その結果を評価してみた。対象が旧課程の生徒であるため，事前に55ページ――60ページの指導内容Aを指導した。

これらの指導内容は，日本書院の教科書を中心として適宜改編したものである。（現在本校3年生は日本書院の教科書を使用してきたため，同じ著者によるものを中心として編成した。）内容は，特に基本的なものに限り，複雑なものはつとめて避け，具体的な例をなるべくとり入れるように配慮したつもりである。

対象となった生徒は91名で，そのうち男子79名，女子12名である。また，進学志望（大学）学部別にみると

理 科 系　79名

（工 学 35，医 学 30，理 学 11，薬 学 3）

文 科 系　8名

（法 学 4，経済学，文 学 各2）

その他　2名（家政学，芸術各1）

未 定　2名

となっている。概して，理科系学部志望者は入学試験において数学Ⅲを必要とする生徒であり，他は数学Ⅲを必要としない生徒である。

なお，この計画の実施に要した時限は

指導内容A　3時限

指導内容B　4時限　（1時限は50分）

テ ス ト　1時限

で，計8時限であり，実施の時期は11月下旬から12月上旬である。

指 導 内 容 A

§1　指数関数および対数関数の導関数

nが正の整数のとき

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \tag{1}$$

において，$n=1,\ 10,\ 100\cdots\cdots$とすれば，

$$\left(1+\frac{1}{1}\right)^1=2, \qquad \left(1+\frac{1}{10}\right)^{10}=2{,}5937\cdots$$

$$\left(1+\frac{1}{100}\right)^{100}=2{,}7048\cdots, \qquad \left(1+\frac{1}{1000}\right)^{1000}=2{,}7169\cdots$$

$$\left(1+\frac{1}{10000}\right)^{10000}=2{,}7181\cdots$$

このようにして，(1)の値はnを限りなく大きくすると，一定の値に近づくことが知られている。この値をeで表わす。くわしく計算すると，

$$e=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=2{,}718281828\cdots$$

一般にtが実数のとき，

$$\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t=e, \qquad \lim_{t\to-\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t=e$$

であることが知られている。

このeを底とする対数

$$\log_e x$$

をxの自然対数という。

これから自然対数の底eを省いて $\log x$ と書くことにする。自然対数と常用対数の間には次の関係がある。

$$\log_e x=\frac{\log_{10}x}{\log_{10}e}\fallingdotseq 2{,}3026\ \log_{10}x$$

$$\log_{10}x=\frac{\log_e x}{\log_e 10}\fallingdotseq 0{,}4343\ \log_e x$$

次に，関数

$$y=\log x$$

の導関数を求めよう。

$$\frac{\triangle y}{\triangle x}=\frac{\log(x+\triangle x)-\log x}{\triangle x}$$

$$=\frac{1}{\triangle x}\log\left(1+\frac{\triangle x}{x}\right)=\frac{1}{x}\cdot\frac{x}{\triangle x}\log\left(1+\frac{\triangle x}{x}\right)$$

いま，$\dfrac{x}{\triangle x}=t$　とおけば

$$\frac{\triangle y}{\triangle x}=\frac{1}{x}t\ \log\left(1+\frac{1}{t}\right)=\frac{1}{x}\log\left(1+\frac{1}{t}\right)^t$$

$\triangle x\to 0$　のとき，$|t|\to\infty$であるから

$$\frac{dy}{dx}=\lim_{\triangle x\to 0}\frac{\triangle y}{\triangle x}=\frac{1}{x}\lim_{|t|\to\infty}\log\left(1+\frac{1}{t}\right)^t$$

$$=\frac{1}{x}\log e$$

$\log e=1$　であるから，

$$\frac{d}{dx}\log x=\frac{1}{x}$$

これを用いると，一般に a を底とする対数関数の導関数を求めることができる。すなわち，

$$(\log_a x)'=\left(\frac{\log x}{\log a}\right)'=\frac{1}{\log a}(\log x)'=\frac{1}{x\log a}$$

$$\therefore\ (\log_a x)'=\frac{1}{x\log a}$$

例 1　$y=\log(1+x^2)$ の導関数を求めよ。

解　　$u=1+x^2$　とおけば，$y=\log u$

$$\therefore\ \frac{dy}{dx}=\frac{d(\log u)}{du}\cdot\frac{du}{dx}=\frac{1}{u}\cdot 2x=\frac{2x}{1+x^2}$$

問 1　次の関数の導関数を求めよ。

1)　$\log 2x$	2)　$\log x^2$	3)　$\log\sqrt{x}$	4)　$\log_{10} x$
5)　$\log(2x-1)$	6)　$\log(1-x)$	7)　$(\log x)^2$	8)　$\log(s^2+2s+1)$
9)　$t\log t$	10)　$\log\frac{x+a}{x-a}$	11)　$\log\sqrt{1-x^2}$	12)　$\log\sin\theta$

例 2　関数　$y=\log f(x)$，$y=\log\{-f(x)\}$

を微分せよ。

解　$u=f(x)$　とおけば，$y=\log u$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}=\frac{1}{u}\cdot f'(x)=\frac{f'(x)}{f(x)}$$

同様にして，$u=-f(x)$　とおけば，$y=\log u$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{u}\cdot\{-f'(x)\}=\frac{-f'(x)}{-f(x)}=\frac{f'(x)}{f(x)}$$

例 3　関数　$y=\dfrac{(x-1)^3(x+2)^2}{(x+1)^4}$　を微分せよ。

解　　両辺の自然対数をとれば，

$$\log y=3\log(x-1)+2\log(x+2)-4\log(x+1)$$

それぞれを x で微分すると，

$$\frac{1}{y}\cdot y'=\frac{3}{x-1}+\frac{2}{x+2}-\frac{4}{x+1}$$

$$\therefore\ y'=\frac{(x-1)^3(x+2)^2}{(x+1)^4}\left(\frac{3}{x-1}+\frac{2}{x+2}-\frac{4}{x+1}\right)$$

次に，指数関数

$$y=e^x$$

の導関数を求めよう。両辺の自然対数をとれば，

$$\log y=x$$

両辺を x で微分すると，

$$\frac{1}{y}y'=1 \qquad \therefore\ y'=y$$

すなわち，　$\dfrac{d}{dx}e^x=e^x$

例 4　次の関数の導関数を求めよ。

1)　e^{kx}　　　　2)　a^x

解　1）$y=e^{kx}$，$kx=u$　とおけば，$y=e^u$

$$\therefore\quad y'=\frac{d}{du}e^u\cdot\frac{du}{dx}=e^u\cdot k=ke^{kx}$$

2）$y=a^x$　とおき，両辺の自然対数をとれば，

$$\log y=x\log a$$

この両辺を x で微分して，

$$\frac{1}{y}y'=\log a\qquad\therefore\quad y'=a^x\log a$$

すなわち，　$(a^x)'=a^x\log a$

問2　次の関数の導関数を求めよ。

1）e^{4x}　　2）e^{-x}　　3）$\dfrac{1}{e^{2x}}$　　4）10^x

5）e^{x^2+1}　　6）$\sqrt{1+e^x}$　　7）$e^x\sin x$　　8）$e^{x^2}\log 3x$

問3　一般に n が実数のとき，次の式が成立することを証明せよ。

$$\frac{d}{dx}x^n=nx^{n-1}$$

問4　次の関数の導関数を求めよ。

1）$x^2\log x$　　2）$\dfrac{\log x}{x}$　　3）$\log(x+\sqrt{x^2+1})$

4）x^2e^{-2x}　　5）$\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$　　6）$\log(e^x+e^{-x})$

問5　次の関数の第二次導関数を求めよ。

1）$\log x$　　2）e^{kx}　　3）a^x　　4）$x\log x$

問6　次の関数の極大・極小を求めよ。

1）$y=xe^x$　　2）$y=e^{-x}\sin x\,(0<x<2\pi)$

問7　次の不等式を証明せよ。ただし，$x>0$　とする。

1）$x-\dfrac{x^2}{2}<\log(1+x)<x$

2）$e^x>1+x+\dfrac{x^2}{2}$

§2　置換積分法

微分の場合と同様に，積分するときに変数を他の変数におきかえると便利なことが多い。

合成関数の微分法の結果から，一般に

$x=g(t)$　とおけば，

$$\int f(x)dx=\int f\{g(t)\}g'(t)dt$$

この方法を置換積分法という。これは次のようにして証明される。

$F(x)=\int f(x)dx$　とおけば，$F'(x)=f(x)$

$$\frac{d}{dt}F(x)=\frac{d}{dx}F(x)\frac{dx}{dt}$$
$$=f(x)g'(t)=f\{g(t)\}g'(t)$$

よって　$F(x)=\int f\{g(t)\}g'(t)dt$

例 1　不定積分 $\int \sin x \cos 2x\,dx$ を求めよ。

解　$\int \sin x \cos 2x\,dx = \int (2\cos^2 x - 1)\sin x\,dx$

$\cos x = t$ とおけば，

$$-\sin x \frac{dx}{dt} = 1 \qquad \frac{dx}{dt} = -\frac{1}{\sin x}$$

$$\therefore \int \sin x \cos 2x\,dx = -\int (2t^2 - 1)dt = -\frac{2}{3}t^3 + t + C$$

$$= -\frac{2}{3}\cos^3 x + \cos x + C$$

置換積分法を用いて定積分を求めることができる。たとえば，$\int_1^2 (2x-1)^2 dx$ を求めるのに $2x-1=t$ とおけば　$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{2}$

よって　$\int (2x-1)^2 dx = \frac{1}{2}\int t^2 dt = \frac{1}{6}t^3 + c = \frac{1}{6}(2x-1)^3 + c$

$$\therefore \int_1^2 (2x-1)^2 dx = \left[\frac{1}{6}(2x-1)^3\right]_1^2 = \frac{13}{3}$$

これは，また次のように t についての定積分としても計算できる。すなわち，$x=1$ のとき $t=1$，$x=2$ のとき $t=3$ であるから，

$$\int_1^2 (2x-1)^3 dx = \frac{1}{2}\int_1^3 t^2 dt = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}t^3\right]_1^3 = \frac{13}{3}$$

一般に，$\int_a^b f(x)dx$ を $x=g(t)$ とおき，t についての定積分として求めるには，次のようにすればよい。

$x=g(t)$ を t について解き，$t=h(x)$ が得られたとする。$x=a$ のとき $t=t_1$，$x=b$ のとき $t=t_2$ とすれば，

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{t_1}^{t_2} f\{g(t)\}g'(t)dt$$

これは次のようにして証明できる。

$$F(x) = \int f(x)dx$$

とおくと，

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = F\{g(t_2)\} - F\{g(t_1)\}$$

$$= \Big[F\{g(t)\}\Big]_{t_1}^{t_2} = \int_{t_1}^{t_2} f\{g(t)\}g'(t)dt$$

例 2　半径 r の円の面積を定積分で求めよ。

解　円の方程式を $x^2+y^2=r^2$ とし，第一象限にある四分円を考える。$y=\sqrt{r^2-x^2}$ から，求める円の面積は定積分 $S = 4\int_0^r \sqrt{r^2-x^2}\,dx$ で与えられる。

いま，$x=r\sin\theta \left(0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}\right)$ とおけば，$\frac{dx}{d\theta} = r\cos\theta$ また，$x=0$，r のときそれぞれ $\theta=0$，$\frac{\pi}{2}$ であるから，

$$S=4\int_0^r \sqrt{r^2-x^2}\,dx=4\int_0^{\frac{\pi}{2}} r\sqrt{1-\sin^2\theta}\quad r\cos\theta\,d\theta$$

$$=2r^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos 2\theta+1)d\theta=2r^2\left[\frac{\sin 2\theta}{2}+\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\pi r^2$$

答　πr^2

問 1　次の不定積分を求めよ。

1)　$\int \sec^2(\alpha x+\beta)dx\quad(\alpha\neq 0)$　　　2)　$\int \sin^2 x\cos x\,dx$

問 2　次の定積分の値を求めよ。

1)　$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x\cos 2x\,dx$　　　2)　$\int_1^2 \frac{dx}{(2x-1)^3}$

問 3　楕円　$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$　の面積はπabであることを証明せよ。

§ 3　指数関数，対数関数に関する積分

§1 で学んだように，e を自然対数の底とすれば，

$$(e^x)'=e^x$$

であるから，

$$\int e^x dx=e^x+C$$

問 1　次の不定積分を求めよ。

1)　$\int e^{2x}dx$　　　2)　$\int e^{-x}dx$　　　3)　$\int e^{-\frac{x}{2}}dx$

また，対数の微分法について

$$\frac{d}{dx}\log x=\frac{1}{x}$$

であるから，

$$\int\frac{dx}{x}=\log x+C$$

問 2　次の不定積分を求めよ。

1)　$\int\frac{dx}{2x}$　　　2)　$\int\frac{dx}{x+1}$　　　3)　$\int\frac{dx}{2x-1}$

次に，分数式を部分分数に分解して積分する場合がある。たとえば，

$$\frac{1}{x(x+1)}=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}$$

であるから，

$$\int\frac{dx}{x(x+1)}=\int\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)dx=\log x-\log(x+1)+C=\log\frac{x}{x+1}+C$$

問 3　次の不定積分を求めよ。

1)　$\int\frac{dx}{(x+1)(x+3)}$　　　2)　$\int\frac{dx}{x^2-1}$　　　3)　$\int\frac{dx}{x(x-1)^2}$

§ 4　部分積分法

次に，二つの関数の積の積分や，三角関数指数関数などを含む関数の積分で，よく用いられるものを説明しよう。

u，v を x の関数とすれば，

$$(uv)'=u'v+uv'$$

よって，

$$uv=\int (u'v+uv')dx=\int u'vdx+\int uv'dx$$

$$\therefore\ \int uv'dx=uv-\int u'vdx \qquad (1)$$

特に，$v=x$ のときは，$v'=1$ であるから，

$$\int udx=ux-\int u'xdx \qquad (2)$$

また，定積分については，

$$\int_a^b uv'dx=\Big[uv\Big]_a^b-\int_a^b u'vdx \qquad (1')$$

$$\int_a^b udx=\Big[ux\Big]_a^b-\int_a^b u'xdx \qquad (2')$$

これらの公式を用いて積分する方法を部分積分法という。

例　次の不定積分を求めよ。

1）$\int xe^x dx$　　　　2）$\int \log x\, dx$

解1）$u=x$，$v=e^x$ とおくと(1)によって

$$\int xe^x dx=xe^x-\int e^x dx=xe^x-e^x+C$$

2）$u=\log x$ とおくと(2)によって

$$\int \log x\, dx=x\log x-\int x\cdot\frac{1}{x}dx=x\log x-x+C$$

問1　次の不定積分を求めよ。

1）$\int xe^{2x}dx$　　　　2）$\int t\log t\, dt$

3）$\int \theta\cos\theta\, d\theta$　　　　4）$\int (x+1)\log x\, dx$

問2　次の定積分の値を求めよ。

1）$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x\, dx$　　　　2）$\int_0^1 x^2e^x\, dx$

指 導 内 容 B

§ 1 微 分 方 程 式

原点を中心とする円の方程式

$$x^2+y^2=C \qquad (C>0) \tag{1}$$

の両辺を x について微分すれば，

$$x+y\frac{dy}{dx}=0 \tag{2}$$

(2)は，　x，y，$\frac{dy}{dx}$ についての等式である。

また，y が x の関数のとき，

$$\frac{d^2y}{dx^2}-3\frac{dy}{dx}+2y=0 \tag{3}$$

は，　y，$\frac{dy}{dx}$，$\frac{d^2y}{dx^2}$ についての等式である。

y が x の関数のとき，(2)，(3)のように，y，y，$\frac{dy}{dx}$，$\frac{d^2y}{dx^2}$，……についての等式を微分方程式という。

(2)のように，第一次導関数までを含む微分方程式を第一階微分方程式，また，(3)のように，第二次導関数までを含む微分方程式を第二階微分方程式という。

微分方程式が与えられたとき，これを満足する関数をその解といい，解を求めることを微分方程式を解くという。

例　$y=A\cos mx+B\sin mx$　は微分方程式 $\frac{d^2y}{dx^2}+m^2y=0$ の解であることを示せ。ただし A，B，m は定数である。

解　$\frac{dy}{dx}=-mA\sin mx+mB\cos mx$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-m^2(A\cos mx+B\sin mx)=-m^2y$$

$$\therefore\ \frac{d^2y}{dx^2}+m^2y=0$$

問 1　$y^2=2Cx+C^2$（Cは定数）より C を消去せよ。

いま，微分方程式

$$y\frac{dy}{dx}=-x,\ \text{すなわち，}\ \frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y} \tag{4}$$

が与えられたとき，左の式の両辺を x について積分すれば，

$$\int y\frac{dy}{dx}dx=-\int x\,dx$$

ところで，$\frac{d}{dx}y^2=2y\frac{dy}{dx}$　であるから，

$$\frac{y^2}{2}=-\frac{x^2}{2}+C_1,$$

$$\therefore\ x^2+y^2=C \quad (2C_1=C) \tag{5}$$

ここに，C は任意の正の定数である。

微分方程式(4)の解(5)において，C をいろいろに変えれば，原点を中心とする円の群が得られる。

これらの解のうちで，$x=3$ のとき $y=4$ となる条件を満たすものを考えると，$C=25$ であるから，

$$x^2+y^2=25 \tag{6}$$

(5)のように，任意定数を含む解を一般解といい，(6)のように，任意定数に一定値を与えたときの解を特殊解という。また，任意定数を定めるときの上のような条件を初期条件という。

微分方程式(4)は $\dfrac{y}{x}\cdot\dfrac{dy}{dx}=-1$ と書けるから，曲線上の任意の点P $(x,\ y)$ と原点0を結ぶ直線OPが，つねに点Pにおける曲線の接線に垂直であることを示し，その解(5)は，このような性質をもつ曲線が円であることを示している。

問2　$y=e^{-kx}\ (A\cos mx+B\sin mx)$ は次の微分方程式を満足することを示せ。ただし，$A,\ B,\ k,\ m$ は定数である。

$$\frac{d^2y}{dx^2}+2k\frac{dy}{dx}+(k^2+m^2)y=0$$

§ 2　$\dfrac{dy}{dx}=f(x)$，$\dfrac{dy}{dx}=ay$ の解法

$\dfrac{dy}{dx}=f(x)$ の解は $y=\displaystyle\int f(x)\,dx$ である。

例1　初速度 v_0 で0から真上に投げられた物体の時刻 t における速度 v および0からの高さ s を求めよ。ただし，空気の抵抗は考えないものとする。

解　$v=\dfrac{ds}{dt}$，$\dfrac{dv}{dt}=-g$ (加速度)

$$\therefore\ v=\int(-g)dt=-gt+C$$

$t=o$ のとき $v=v_0$ であるから $v_0=C$

$$\therefore\ v=-gt+v_0$$

よって　$\dfrac{ds}{dt}=-gt+v_0$

$$\therefore\ s=\int(-gt+v_0)dt=-\frac{1}{2}gt^2+v_0t+C_1$$

$t=0$ のとき $s=0$ であるから $0=C_1$

$$\therefore\ s=-\frac{1}{2}gt^2+v_0t$$

問1　次の微分方程式を解け。

1)　$\dfrac{dy}{dx}=2x-1$　　2)　$\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{1}{x^2}$

3)　$\dfrac{dy}{dx}+\cos x=0$　　4)　$\dfrac{d^2y}{dx^2}+e^x=0$

5)　$x\dfrac{dy}{dx}=x^2+x+1$　　6)　$e^x\dfrac{dy}{dx}=2xe^x+5$

7)　$\dfrac{dy}{dx}=x\sin x+\cos x$

問 2　関数 $y=f(x)$ のグラフは原点を通り，かつ，グラフ上の点 (x, y) における接線の傾きが $3x^2$ である。関数 $f(x)$ を求めよ。

次に，$\dfrac{dy}{dx}=ay$ の解き方を考えよ。

両辺を y で割って $\dfrac{1}{y}\cdot\dfrac{dy}{dx}=a$ となるから

$$\int\frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx}dx=\int adx \qquad \therefore\ \log y=ax+C_1$$

$$\therefore\ y=e^{ax+C_1}=e^{C_1}e^{ax}=Ce^{ax} \quad (e^{C_1}=C)$$

よって，C を任意定数とするとき，解は，
$y=Ce^{ax}$ である。

例 2　質量 m である放射性物質の，時刻 t における崩壊速度 $\dfrac{dm}{dt}$ がその質量に比例するものとすれば，

$$\frac{dm}{dt}=-km \qquad (k \text{は正の定数})$$

である。$t=0$ のとき $m=M$ として，この微分方程式を解け。

解　上の説明のようにして，

$$m=Ce^{-kt}$$

$t=0$ のとき $m=M$ であるから $C=M$

$$\therefore\ m=Me^{-kt}$$

問 3　培養しはじめから t 時間後のバクテリヤの数を n とするとき，

$$\frac{dn}{dt}=0.2n$$

ならば，n は t のどんな関数か。また，n が 2 倍になるのに何時間かかるか。ただし，$t=0$ のとき，$n=N$ とする。

§ 3　変 数 分 離 形

微 分 方 程 式

$$\frac{dy}{dx}=\frac{f(x)}{g(y)} \tag{1}$$

を解くには，

$$g(y)\frac{dy}{dx}=f(x)$$

$$\therefore\ \int g(y)\frac{dy}{dx}dx=\int f(x)dx \tag{2}$$

(2)より(1)の解が得られる。

この結果は，また，(1)を

$$g(y)dy=f(x)dx$$

と書き直して，

$$\int g(y)dy=\int f(x)dx \tag{3}$$

としたときと同じである。普通には，(1)の解は，(3)の方法で求められる。このようにして解く方法を変数分離法という。

例　微分方程式　$(1+x^2)\dfrac{dy}{dx}=2xy$　を解け。

解　与えられた微分方程式を変形して

$$\frac{dy}{y}=\frac{2x}{1+x^2}dx \qquad \therefore \int\frac{dy}{y}=\int\frac{2x}{1+x^2}dx$$

$$\log y=\log(1+x^2)+C_1$$

$$\therefore\ y=C(1+x^2) \qquad (C_1=\log C)$$

問1　微分方程式　$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x}{y}$　を解け。

問2　次の微分方程式を解け。

1）$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1+y}{1-x}$　　　2）$(x^2-1)\dfrac{dy}{dx}=2xy$

問3　電流が回路内を流れるとき，時刻 t における電流の強さを i，回路内の起電力を E，インダクタンスを L，抵抗を R とすれば，

$$L\frac{di}{dt}+\mathrm{R}i=E$$

である。L，R，E は正の定数で，$t=0$　のとき　$i=0$　として，この微分方程式を解け。

§4　第一階線形微分方程式

$P(x)$，$Q(x)$が x の関数のとき，微分方程式

$$y'+P(x)y=Q(x)$$

を第一階線形微分方程式という。この解法について考えよう。

たとえば，微分方程式

$$y'-2xy=x \tag{1}$$

において，まず，$y'-2xy=0$　を解くと，

$$y'=\frac{dy}{dx}=2xy, \qquad \int\frac{dy}{y}=\int 2xdx$$

$$\therefore\ \log y=x^2+C' \qquad \therefore\ y=Ce^{x^2}\quad (C=e^{c'})$$

ここで，C のかわりに x の関数 $C(x)$ をとって，

$$y=C(x)e^{x^2} \tag{2}$$

が(1)を満足するように $C(x)$ を定めよう。

$$y'=C'(x)e^{x^2}+2x\cdot C(x)e^{x^2} \tag{3}$$

(2)，(3)を(1)へ代入すると，

$$C'(x)e^{x^2}+2xC(x)e^{x^2}-2xC(x)e^{x^2}=x$$

$$C'(x)e^{x^2}=x \qquad \therefore\ C'(x)=xe^{-x^2}$$

$$\therefore\ C(x)=\int xe^{-x^2}dx=-\frac{1}{2}e^{-x^2}+C$$

$$\therefore\ y=C(x)e^{x^2}=\left(-\frac{1}{2}e^{-x^2}+C\right)e^{x^2}$$

よって　$y=-\dfrac{1}{2}+Ce^{x^2}$　（C は任意の定数）

これが求める(1)の解である。

一般に，　　$y'+P(x)y=Q(x)$

の解が，次の式で与えられることは，同様にしてしらべることができる。

$$y=e^{-\int P(x)dx}\left\{\int e^{\int P(x)dx}\cdot Q(x)dx\right\}$$

ただし，$\int P(x)\,dx$ は一つの不定積分をとるものとする。

例　微分方程式 $y'-\frac{1}{x}y=x^3$ を解け。

解　$P(x)=-\frac{1}{x}$, $Q(x)=x^3$ である。

$\int P(x)dx=-\int\frac{1}{x}dx=-\log x$ であるから

$$y=e^{\log x}\left\{\int e^{-\log x}x^3\,dx\right\}=x\int x^2dx=x\left(\frac{1}{3}x^3+C\right)=\frac{1}{3}x^4+Cx$$

これが，求める解である。

問　次の微分方程式を解け。

1）$y'+3x^2y=x^2$　　　　2）$y'-y=e^x$

§ 5　第二階線形微分方程式

$P(x)$，$Q(x)$，$R(x)$ が x の関数のとき，微分方程式

$$y''+P(x)y'+Q(x)y=R(x) \tag{1}$$

を第二階線形微分方程式という。(1)の一般的解法はむずかしいので，ここでは特に $R(x)=0$ で，かつ係数 $P(x)$，$Q(x)$ が定数の第二階線形微分方程式

$$y''+ay'+by=0 \tag{2}$$

の解き方を考えよう。たとえば，微分方程式

$$y''-3y'+2y=0 \tag{3}$$

において，$y=e^{mx}$ とおけば

$$y'=me^{mx},\qquad y''=m^2e^{mx}$$

これらを(3)に代入すると，

$$e^{mx}(m^2-3m+2)=0$$

$e^{mx}\neq 0$ だから $m^2-3m+2=0$　$\therefore$ $m=1$，$m=2$

ゆえに　$y=e^x$，$y=e^{2x}$ は(3)の特殊解で，求める一般解は

$$y=C_1e^x+C_2e^{2x}$$

である。ただし，C_1，C_2 は任意の定数である。

このように，第二階線形微分方程式の一般解は，二つの任意定数を含む。

一般に，(2)の一般解は，二次方程式

$$m^2+am+b=0 \tag{4}$$

の根の性質によって，次の三つの場合に分けて考えられる。

〔1〕$a^2-4b>0$ のとき，(4)の二根を α，β とすれば，上のように

$$y=C_1e^{\alpha x}+C_2e^{\beta x}$$

〔2〕$a^2-4b=0$ のとき，(4)の根（重根）を α とすれば，$y=e^{\alpha x}$ は(2)の特殊解である。

(2)において，$y=e^{\alpha x}u$（u は x の関数）とおけば

$$y'=\alpha e^{\alpha x}u+e^{\alpha x}u'$$

$$y''=\alpha^2 e^{\alpha x}u+2\alpha e^{\alpha x}u'+e^{\alpha x}u''$$

$$\therefore\quad e^{\alpha x}\{u''+(2\alpha+a)u'+(\alpha^2+a\alpha+b)u\}=0$$

ところで，$2\alpha+a=0$，$\alpha^2+a\alpha+b=0$

従って，$u''=0$ $\qquad\therefore\quad u=C_1x+C_2$

故に，(2)の一般解は

$$y=(C_1x+C_2)e^{\alpha x}$$

である。

〔3〕 $a^2-4b<0$ のとき，(4)の二つの虚根を $\gamma\pm\delta i$ とし，〔2〕と同様に $y=e^{\gamma x}u$ とおけば，同様の計算により，

$$e^{\gamma x}\{u''+(2\gamma+a)u'+(\gamma^2+a\gamma+b)u\}=0$$

ところで，$\gamma=-\dfrac{a}{2}$, $\qquad\delta=\dfrac{1}{2}\sqrt{4b-a^2}$ であるから，

$$2\gamma+a=0,\quad \gamma^2+a\gamma+b=\frac{1}{4}(4b-a^2)=\delta^2$$

従って， $\qquad u''+\delta^2 u=0$

§1 例より

$$u=C_1\sin\delta x+C_2\cos\delta x$$

故に，(2)の一般解は，

$$y=e^{\gamma x}(C_1\sin\delta x+C_2\cos\delta x)$$

である。

方程式(4)を，微分方程式(2)の補助方程式という。

例1 微分方程式 $y''-6y'+9y=0$ を解け。

解 補助方程式 $m^2-6m+9=0$ を解いて $m=3$（重根）だから，求める解は，

$$y=(C_1x+C_2)e^{3x}$$

問1 $y=xe^{3x}$ が $y''-6y'+9y=0$ の解であることを確かめよ。

問2 次の微分方程式を解け。

1) $y''+y'-12y=0$ $\qquad$ 2) $y''-10y'+25y=0$ $\qquad$ 3) $y''-2y'+2y=0$

例2 数直線上を動く点 P の加速度の方向が，つねに原点に向かい，その大きさが点 P の座標 x に比例するとき，微分方程式

$$\frac{d^2x}{dt^2}=-kx \qquad (k\text{ は正の定数})$$

が成り立つ。原点から出発し，初速度を k としてこの微分方程式を解け。

解 補助方程式 $m^2=-k$ を解いて $m=\pm\sqrt{k}\,i$

よって，一般解は，

$$x=C_1\sin\sqrt{k}\,t+C_2\cos\sqrt{k}\,t$$

ところで，

$$\frac{dx}{dt}=\sqrt{k}\,(C_1\cos\sqrt{k}\,t-C_2\sin\sqrt{k}\,t)$$

$t=0$　のとき　$x=0$，$\dfrac{dx}{dt}=k$　であるから

$$0=C_2,\ k=\sqrt{k}\,C_1 \qquad \therefore\ C_2=0,\ C_1=\sqrt{k},$$

故に求める解は，

$$x=\sqrt{k}\ \sin\sqrt{k}\ t$$

である。これは，単振動を示す。

問3　物体が自然に落下するとき，落ちはじめてから t 秒後までの落下距離を xm とする。空気の抵抗が物体の速度 $\dfrac{dx}{dt}$ m/秒 に比例するとき，鉛直下方を正の方向にとれば，微分方程式

$$\frac{d^2x}{dt^2}=g-k\frac{dx}{dt} \qquad \left(\begin{array}{l} g\text{ は重力の加速度} \\ k\text{ は正の定数} \end{array}\right)$$

が成り立つ。時刻 t 秒における速度と落下距離を求めよ。

問　　題

1　次の微分方程式を解け。

1）$\dfrac{dy}{dx}=-2y+3$　　2）$x\dfrac{dy}{dx}=y$

3）$y'+y=x+1$　　4）$xy'+y=x^2$

2　次の微分方程式を解け。

1）$y''-a^2y=0$　　2）$y''+a^2y'=0$

3）$2y''+y'-3y=0$　　4）$y''+6y'+9y=0$

3　微分方程式　$\dfrac{d^2q}{dt^2}-2\dfrac{dq}{dt}+(2k+1)q=0$　の一般解が，$q=(C_1\sin t+C_2\cos t)e^t$　であるように定数 k を定めよ。

4　関数 $f(x)$ の導関数が，e^{-2x} に等しく，$f(o)=1$　である。この関数を求めよ。

5　ある曲線上の任意の点 $P(x,\ y)$ における接線が両座標軸と交わる点を $M,\ N$ とすれば，接点 P はつねに線分 MN の中点であるという。この曲線の方程式を求めよ。

6　空気中に置かれた湯が冷却する速さは，湯の温度と空気の温度の差に比例するという。いま，空気の温度 T_0 が一定のとき，t 秒後の湯の温度を T とすると

$$T-T_0=(T_1-T_0)e^{-kt} \qquad (k\text{ は正の定数})$$

であることを証明せよ。ただし，$t=0$　のとき　$T=T_1$　とする。

7　次の微分方程式を解け。

1）$y'-y=xe^x$

2）$y'+\dfrac{y}{x}=\cos x$

3）$y''+4y'=0$

4）$4y''-12y'+9y=0$　　ただし，$x=0$　のとき　$y=0$，　$y'=1$

5）$2y''+4y'+3y=0$　　ただし，$x=0$　のとき　$y=1$，　$y'=-\dfrac{1}{2}$

8　曲線上の点 P における接線と x 軸の交点を T とし，P から x 軸に下した垂線の足を M とするとき，線分 TM の長さがつねに一定であるならば，もとの曲線はどんな曲線か。ただし，その曲線は点（0，1）を通るものとする。

指導内容A，Bの授業を終えた後，次のような問題でテストを行なった。（時間は50分）

1　次の微分方程式を解け。

1）$\frac{dy}{dx}=x\sin x+\cos x$　　2）$\frac{dy}{dx}=x^2e^{x^3}$

3）$(1+x^2)\frac{dy}{dx}=2xy$　　4）$\frac{dy}{dx}-y=e^x$

5）$\frac{d^2y}{dx^2}-a^2y=0$　　6）$y'+y=x+1$

7）$4y''-12y'+9y=0$　　8）$y''-4y'+13y=0$

2　微分方程式　$\frac{d^2y}{dx^2}+2k\frac{dy}{dx}+(\qquad)y=0$　の一般解は　$y=e^{-kx}(A\cos mx+B\sin mx)$ である。ここに，A，B，k，m　は定数である。

（　　　）内へ適当な定数を入れよ。

3　ある曲線上の任意の点 $P(x,\ y)$ における接線が両座標軸と交わる点を M，N とする。（ただし，M は x 軸上，N は y 軸上）接点 P がつねに線分 MN の 2 : 1 の内分点であるとき，この曲線の方程式を求めよ。

4　数直線上を運動する点 P の加速度の方向がつねに原点に向かい，その大きさが点 P の座標 x に比例する。x は時間 t の関数として，この関数の満たす微分方程式をかけ。また，$t=0$　のとき　$x=0$　として，この微分方程式を解け。

以下に各問題についての解答状況を記す。

1　1）正解　$y=-x\cos x+2\sin x+C$　　58名

定数なし　$y=-x\cos x+2\sin x$　　7名

部分積分の誤り

$\int x\sin x\,dx=x\cos x+\int\cos x\,dx$　　5名

$\int x\sin x\,dx=-x\cos x-\int\cos x\,dx$　　11名

$\int x\sin x\,dx=x\cos x-\int\cos x\,dx$　　2名

部分積分は正しくできたが，軽い誤をおかしたもの　　3名

部分積分ができなかったもの　　3名

全く解答できなかったもの　　2名

平均点　8.4/10　　正解率　63.7%

大体においてよくできていた。誤答は大部分が部分積分に原因している。部分積分が十分できれば90%を越える正解率も期待できよう。

2）正解　$y=\frac{1}{3}e^{x^3}+C$　　53名

定数なし　$y=\frac{1}{3}e^{x^3}$　　8名

$y=e^{x^3}$，$y=\frac{1}{3}e^{3x}$　などの不注意　　2名

$x^3=t$　と置換したが積分での誤　　4名

$x^3=t$　以外の置換をして誤ったもの　　2名

置換積分が全然できなかったもの　21名
全く解答できなかったもの　1名

平均点　7.4/10　正解率　58.2%

前問と同じくよくできている。誤の大部分は置換積分による。

3) 正解　$y=C(1+x^2)$　78名

ほぼ正解　$\log y=\log(1+x^2)+\log C$　3名
定数なし　$y=x^2+1$　4名
変数分離した上での積分の誤　5名
変数分離までできたもの　1名

平均点　9.4/10　正解率　85.7%

変数分離形の解法は完全に理解されている。誤は積分計算であり，非常によくできていた。

4) 正解　$y=e^x(x+c)$　74名

$y=e^x\cdot x$　としたもの　3名
$y=e^x\cdot x+C$　としたもの　2名

$y=e^{\int dx}\left\{\int e^{-\int dx}e^x dx\right\}$　は正しく，その後の積分計算における誤　4名

$y=e^{-\int dx}\left\{\int e^{\int dx}e^x dx\right\}$　としたもの　3名

全く解答できなかったもの　5名

平均点　8.8/10　正解率　81.3%

誤りやすい形であるがよくできていた。この形は，

公式　$y=e^{-\int p(x)dx}\int e^{\int p(x)dx}Q(x)dx$　を導く計算は複雑で理解しにくいように思われたが，公式を用いて解く限りにおいては好成績であった。

5) 正解　$a\neq 0$　のとき　$y=C_1e^{ax}+C_2e^{-ax}$
$a=0$　のとき　$y=C_1x+C_2$　48名

$a=0$　のときの誤　7名
$a=0$　の場合に全くふれていないもの　20名
補助方程式を正解しながらその後を誤ったもの　6名
補助方程式解法の誤　3名
その他軽微な誤　1名
全く解答できなかったもの　6名

平均点　7.7/10　正解率　52.7%

期待した程できていなかった。誤の大部分は　$a=0$　を考えなかったものである。もし，問題に　$a\neq 0$　なる条件を明記しておけば，正解率は約 80 %に上ったことと思われる。

6) 正解　$y=x+Ce^{-x}$　60名

$y=x$　6名

部分積分　$\int e^x(x+1)dx$　において

符号を誤ったもの 11名
計算できなかったもの 3名
その他，不注意による誤 7名
全く解答できなかったもの 4名

平均点 8.2/10 正解率 65.9%

誤の多くは部分積分によるものであることは1）と同様である。問題の形式は4）と同じである。

7） 正解 $y=e^{\frac{3}{2}x}(C_1x+C_2)$ 84名

不注意による誤 $y=e^{\frac{3}{2}}(C_1x+C_2)$ 2名
補助方程式の解の誤 4名
全く解答できなかったもの 1名

平均点 4.8/5 正解率 92.3%

8） 正解 $y=e^{2x}(C_1\sin 3x+C_2\cos 3x)$ 79名

補助方程式の解 $m=2\pm 3i$ を得て
$y=e^{-2x}(C_1\sin 3x+C_2\cos 3x)$ としたもの 2名
$y=e^{3x}(C_1\sin 3x+C_2\cos 3x)$ としたもの 1名
解が出ていないもの 3名
補助方程式の解の誤 4名
全く解答できなかったもの 2名

平均点 4.6/5 正解率 86.8%

前2問は，公式を直接利用する程度のもので，計算は二次方程式を解くくらいであり，予想通り極めてよい成績を示している。誤りの多くは不注意によるものといってよいと思う。

2 正解 k^2+m^2 69名

y'，y'' の計算における誤 3名
根と係数の関係利用上の誤 2名
$m+k^2$，k^2-m^2，m^2-k^2，k^2-m，$\pm\sqrt{k^2-m^2}$ などの計算誤あるいは不注意による誤 13名
全く解答できなかったもの 4名

平均点 8.9/10 正解率 75.8%

本問の解答には，直接 y'，y'' を計算して代入する方法（方法Ⅰ）と，補助方程式の根と係数の関係を利用した方法（方法Ⅱ）がとられていた。方法Ⅱの方が僅かに多かったようである。誤答の多くは方法Ⅰによったものであり，計算上の誤が目立つ。

3 正解 $xy^2=C$ 48名

P が1：2の内分点と誤解したもの（1：2としては正解のもの） 4名
変数分離形に変形した上で，積分計算を誤ったもの 20名
微分方程式作成までには至らないが，僅かにできているもの 16名
全く解答できなかったもの 3名

平均点 7.0/10 正解率 52.7%

曲線 $y=f(x)$ 上の点 P における接線の方程式 $Y-f(x)=f'(x)(X-x)$ を求め，こ

れと両軸との交点 M, N の座標を求め，線分 MN の 2 : 1 の内分点が (x, y) であるとして微分方程式をつくったものと，線分 MN の傾きから $\frac{dy}{dx}=-\frac{y}{2x}$ をつくったものの 二通りの 解法が見られた。一部を除いて， 微分方程式は正しく つくられており，誤の多くは，積分計算の誤であった。微分方程式作成の段階まででは約77%が正しく答えている。本問は，全問中最も平均点が悪くなった。

4　正解　$x=C_1\sin\sqrt{k}\,t$　54名

微分方程式　$\frac{d^2x}{dt^2}=-kx$　を正しく答えた上で，

$x=C_1\sin\sqrt{k}\,t+C_2\cos\sqrt{k}\,t$　とし定数を決定していないもの　9名

余分な条件を加えたもの　5名

方程式を作成するまでのもの　7名

僅かに解答してあるが，微分方程式が正しく答えられていないもの　8名

全く解答できなかったもの　8名

平均点　7.6/10　　正解率　59.3%

微分方程式を正しくつくることができたものは約82%である。余分な条件をつけ加えたのは，授業中にそのような問題を一応指導しており， その点で問題文を十分理解しておらず，不注意といえるだろう。

以上，問題別に解答状況を述べてみたが，全問を通じての平均点は 82.5点 であり，得点分布は次の通りである。

得　点	—39	40—49	50—59	60—69	70—79	80—89	90—99	100
人　数	3	3	4	5	11	24	30	11

最低点は18点で，50点未満の者は，入学試験に数学Ⅲを必要としない生徒であり，学習意欲の乏しかったものと考えられ， 一応期待した通りの， あるいはそれ以上の 結果を 得たものと 思う。

なお，参考までに，本計画実施前に行なった予備テストの問題とその結果を記しておく。

1　関数 $y=f(x)$ のグラフにおいて，接線の傾きが常にその接点の x 座標に等しい。この関数を求めよ。

正解　62.8%　　無解　23.1%

2　曲線 $y=g(x)$ 上の任意の点 P における法線（P における接線と P で直交する直線）と y 軸との交点を Q とし，P から y 軸に下した垂線の足を R とするとき QR の長さが一定である。$y=g(x)$ を求めよ。ただし，この曲線は（0， 1），（1， 0）を通るものとする。

正解　48.7%　　無解　20.5%

さきに述べたように， この計画には僅か 8 時間という非常に少ない時間しかかけることができず，従って十分な演習もできなかったのは残念である。にも拘らず，相当な成果をあげることができた。更に数時間をかけることができれば，もっとよい成果を得ることができたと信じている。また，テストの結果からみて，誤りの大部分は積分計算の未熟と， いろいろな不注意によるものと考えられ，微分方程式そのものの理解に起因するものではない。従って，これら

の欠点を十分に是正すれば，微分方程式をかなりな程度まで学習することは決して無理ではないと思われる。一方，この計画の対象は，主として理科系大学部進学希望者であることに注意しなければならない。しかし，数学Ⅲにおける微分方程式は，$\dfrac{dy}{dx}=ky$（kは定数）の程度に止まらず，少なくとも第二階線形微分方程式のうち $ay''+by'+cy=0$（a, b, c は定数）の程度までを指導することは十分可能であろう。