近世幾何学よりみた幾何指導内容について〔続〕

―― 実地指導の結果報告 ――

出石　隆　米谷　数子　能崎　克己

（一）概　要

学習指導要領の改訂にともない，図形教材については初等幾何学の大部分が中学に移行され，高校では座標幾何のみの色彩がつよくなった。

その反省として図形教材に近世幾何的な題材をもちいて論証指導を行うのが望ましいと思う。

昨年，その主旨，内容については日本数学教育会誌第43巻第5号及び高校教育研究第12号に発表したので省略する。

その後，実際に生徒に指導してみての結果をここに報告する。

（生　徒）　本校第2学年生徒3クラス（各クラスとも約53名）

これらの生徒は，それまでに数Ⅰ幾何の教科書を終って他に幾何問題集を一冊授業中に指導している。従って現指導要領における幾何指導内容は既に終え，力も相当補充されていると見てよい。

（時間数）　約13時間。1週3時間で約4週間（昭和36年11月上旬より12月上旬まで）数学としてはこれと並行して数Ⅱが1週3時間行われている。（内容は座標幾何のところ）。

（方　法）　大体の要項はプリントして行った。

参考資料　鍋島信太郎著（池田書店）幾何学研究

（テスト）　指導が終了後，生徒の理解程度を知る意味でテストを行った。3クラスに6問ずつ（共通問題一問）従って異なる問題としては総計16問である。これは全部一応指導したものばかり出題した。更に別の日に，指導してない問題を応用力を見る意味で各クラス2問ずつ（共通問題一問）従って異なる問題としては総計4問出題して理解程度をみた。各問題は10点満点で採点した。

（二）プリント内容

Ⅰ　調　和　図　形

§1　調　和　点　列

一直線上にある点の集合を，点列といい，その直線を，点列の台という。

（定義）線分ABが，二点C，Dにて分たれ，二つの比の比 $\dfrac{AC}{CB}\Big/\dfrac{AD}{DB}=-1$ なるとき，C，Dは，ABを，調和に分つという。

$\dfrac{AC}{CB}\Big/\dfrac{AD}{DB}$ を二重比，または，交叉比といい，（AB，CD）と略記する。

〔定 理 1〕　(AB, CD) = (CD, AB) =BA, DC) = (DC, BA)

〔定 理 2〕　(AB, CD) = −1　のとき　$\frac{1}{AC}+\frac{1}{AD}=\frac{2}{AB}$

(Aを規準)

〔定 理 3〕　(AB, CD) = −1　のとき，OをABの中点とすれば　OC・OD=OB^2 である。逆も成立する。

(練 習 問 題)

1. (AB, CD) = −1 で，PがCDの中点のとき，PA，PB=PC^2 である。
2. ABがC，Dで調和に分たれ，かつ，OはABの中点，PはCDの中点なるとき，$OB^2+PC^2=OP^2$ である。
3. (AB, CD) = −1　のとき，Cが

   i) Aに，　ii) ABの中点に，　iii) Bに，　iv) 無限遠点に

近づくとき，Dはどのように動くか。

4. △ABCの内接円の接点をX，Y，Zとし，YZの延長が対辺と交わる点をX′とすれば，XおよびX′はその辺を調和に分つ。また，傍接円のときはどうか。

§2 調 和 線 束

一平面上において，一点を通る直線の集合を，線束といい，その点を線束の心，または台という。

〔定 理 1〕　一つの線束をなす四直線が，一つの直線を調和に分つときは，他のすべての直線を調和に分つ。

(定義) Oを心とする線束OA，OB，OC，ODが調和線束であるとき，O (AB, CD) = −1　と表わす。

〔定 理 2〕　角の内角，外角の二等分線と，角の二辺は調和共役である。

(練 習 問 題)

1. 三角形の二辺に関して，その共通の頂点を通る中線の調和共役線は何か。
2. △ABCの三辺の中点を，P，Q，Rとすると，P (RQ, AC) = −1　である。
3. △ABCの三つの高さの足を D，E，Fとすると，D (EF, AB) = −1 である。
4. △ABCの内接円の接点を，X，Y，Zとすると，X (ZY, AC) = −1　である。
5. (AB, CD) = −1，(A′B′, C′D′) = −1 で，AA′，BB′，CC′が共点Oのとき，O，D，D′は共線である。
6. 四点A，B，C，Dがこの順に共線なるとき，その台上に二点を定めて，ABに関して調和共役であると同時に，CDに関しても，調和共役であるようにせよ。
7. P，Q，Rが△ABCの各辺の中点であって，AP，QRがXで交わるとき，Xを通る一つの直線が，PR，PQ，BCと交わる点を，それぞれY，Z，Wとすれば，(YZ, XW) = −1である。

§3　点列と線束の二重比

(定義) 四つの直線a，b，c，d から成る線束の二重比とは，

$$\frac{\sin(ac)}{\sin(cb)}\Big/\frac{\sin(ad)}{\sin(db)}$$

を意味し，これを，(ab, cd) と表わす。ここに，角は，その向きをも考える。

§2のように，線束の二重比は，O (AB, CD) ともかく。

〔定 理〕　線束の二重比は，その任意の切線による，点列の二重比に等しい。

(練　習　問　題)

1. A, B, C, D, O, Pは同一円周上の点であって, O (AB, CD) = −1 なるとき, P (AB, CD) = −1 である。

2. 一つの円の弦ABと, 直径CDが, 直交するとき, Pをこの円周上の任意の一点とすれば, P (AB, CD) = −1 である。

3. つぎの各場合は, それぞれ, どんな場合か。

(AB, CD) = 1, (AB, CD) = 0, (AB, CD) = ∞

4. (AB, CD) = (AB, C′D′) なるときは, (AB, CC′) = (AB, DD′) である。

§4　等二重比の点列と線束

(定義) 一つの線束を切って, 点列をつくることを, 切断といい, 一つの点列を通って, 線束をつくることを射影という。

〔定 理 1〕 一つの線束を, 他の任意の二直線で切断するときは, 等二重比の点列を得る。
一つの点列を, 他の任意の二点から射影するときは, 等二重比の線束を得る。

〔定 理 2〕 (AB, CD) = (BA, CD) なるときは, A, C, B, D は調和点列である。

〔定 理 3〕 (AB, CD) = (A′B′, C′D′) のとき, AA′, BB′, CC′ が共点ならば, DD′ もまた同じ点を通る。

〔定 理 4〕 (PX, YZ) = (PX′, Y′Z′) のとき, XX′, YY′, ZZ′ は共点である。

(練　習　問　題)

1. (ab, cd) = (a′b′, c′d′) のとき, aa′, bb′, cc′ が共線ならば, dd′ も, また, 同じ直線上にある。

2. (px, yz) = (px′, y′z′) のとき, xx′, yy′, zz′ は共線である。

3. (ab, cd) = (ba, cd) なるときは, a, c, b, d は調和線束である。

4. △ABCの辺ABの中点をX, AXの中点をYとし, ACの中点をY′, Y′C の中点をX′とするとき, YY′, XX′, BC は共点である。

II　極　点　と　極　線

(定義) 円外の一点Pから, この円に二つの接線をひくとき, その接点B, Cを結ぶ弦を, もとの点に関するこの円の接点弦という。直線BCを, その円に関する点Pの極線という。Pを, その円に関する直線BCの極点という。

(定義の拡張) 半径 r の円Oの任意の中心線上の二点を, P, N とし, ON・OP = r^2 のとき, Nを通ってPNにたてた垂線XYを, 点Pの極線, Pを, XYの極点という。

〔定　理〕 任意の点を通って, 一つの円に割線をひくとき, この直線は, 円周, その点, および, その円に関するその点の極線によって, 調和に分かたれる。

(練　習　問　題)

1. 一定点Pから, 一つの円に任意の割線PRSをひくとき, R, S におけるこの円の接線は, この円に関する, Pの極線上で交わる。

2. つぎの各場合に, 極線はどのような位置になるか。

点Pが, i) 円周上にあるとき, ii) 中心Oと一致するとき, iii) 無限遠点にくるとき,

3. 一点Pの, 一円Oに関する極線が, OPと交わる点をNとし, P を通る任意の直線が,

円と交わる点をR，Sとすると，極線は，∠RNSを二等分する。

4. 点Pを通る直線が，円とR，S，その極線とHで交わるとき，RSの中点をMとすれば，PR・PS＝PH・PMである。

5. 一つの円に関して，一点Pの極線が，他の一点Qを通るならば，Qの極線は，またPを通る。

6. 任意の二点をP，Qとし，P，Qの各々の極線の交点をRとするとき，点Rの極線は，直線PQである。

7. 一点Bの一つの円に関する極線上の一点Aから，この円に二つの接線をひくとき，この接線と，Bの極線と，直線ABとは，調和線束をなす。

III 根軸，根心，共軸円

（定義）二円への接線の長さの等しい点の軌跡を，この二円の根軸という。

（練　習　問　題）

1. 二円が与えられたとき，根軸を作図せよ。
2. 直交する円の一つの直径は，他の円によって調和に分かたれる。

〔定　理〕三つの円の，二つずつとって得た三つの根軸は，共点である。

（定義）三つの円の三根軸の交点を，これらの三つの円の根心という。

（練　習　問　題）

1. 三つの円の中心が共線なるときは，それらの根心は，どこにあるか。
2. 鈍角三角形ABCの各辺を直径とする，三つの円の根心は，どのような点か。

（定義）何れの二円をとっても，みな同じ根軸をもつような円の集合を，共軸円という。

（1）相交わる共軸円

二円が，二点P，Qにおいて交わるときは，それらの共軸円は，すべて，P，Qにおいて相交わる。このような円の集合を円束という。

（2）相交わらない共軸円

一つの円と，これに交わらない直線とを与えて，この直線を根軸とする共軸円を作図する。

（練　習　問　題）

一組の共軸円の，根軸上の任意の一点をPとし，Pを中心として，その一円に直交する円をかけ。この円は，その共軸円のすべてと直交する。

IV 反　　転　　法

（定義）定点Oと，他の任意の点Pがあるとき，直線OP上に一点Pをとり，OP，OP′$=k^2$にするとき，P′を，Oを中心とし，kを半径とする円に関し，Pの反転形であるといい，Oを，反転の中心，この円を，反転の円，kを，半転の半径という。

〔定　理〕一つの図形を，まず，一つの円に関して反転し，つぎに，中心を変えず半径を変えた円に関して，再びもとの図形を反転するとき，このようにして得られた二つの反転形は，その中心を相似の中心として，相似であって相似の位置にある。

（練　習　問　題）

1. 一つの円の，その周上の一点に関する反転形を求めよ。
2. 一つの円の，その周上にない一点に関する反転形を求めよ。
3. 相交わる二曲線のなす角は，おのおのの反転形のなす角に等しい。

（定義）与えられた図形から，ある条件に従って導びかれた図形を，その写像といい，特に，

図形のなす角の等しい写像を，等角写像という。

(三) テストの結果

(問 題 1)

(AB，CD)＝－1 のときAを規準にとれば，$\frac{1}{AC}+\frac{1}{AD}=\frac{2}{AB}$ がなり立つ。Bを規準にとったときの等式を書き下せ。

(イ) 正解率　91%

(ロ) 平均点　9.4点　(以下どの問題も10点満点)

(ハ) 所　見　(AB，CD)＝(BA，DC) よりBを規準にするときは $\frac{1}{BD}+\frac{1}{BC}=\frac{2}{BA}$ が出るわけであるが，これを調和点列の定義にもどって出したものが18%いた。正解でない主な原因としては線分の向きを誤って例えば，$\frac{1}{DB}+\frac{1}{BC}=\frac{2}{BA}$，$\frac{1}{DB}+\frac{1}{CB}=\frac{2}{BA}$ 等の解を出したものが約9%いた。

(問 題 2)

(AB，CD)＝－1のときOをABの中点とすれば，OC・OD＝OB^2 であり，逆もまた成り立つ。これを証明せよ。

(イ) 正解率　72%

(ロ) 平均点　8.7点

(ハ) 所　見　前半の証明は殆んど出来ていたが，逆証を書かなかったものが14%，不完全なものが10%程あった。授業の際，逆証の方は，OC・OD＝OB^2 のときABに関するCの調和共役点をD′とすると (AB，CD′)＝－1 故に前半の命題によってOC・OD′＝OB^2 となり条件よりOC・OD＝OC・OD′ からOD＝OD′ 故にDはD′に一致する。すなわち (AB，CD)＝－1であるというように指導していたが，前半の証明に用いた式を逆に辿って逆が成り立つとしたものが27%いた。また，必ずしも成り立たぬ命題を逆にとりあげたもの，すなわち，(AB，CD)＝－1かつOC・OD＝OB^2 のときOがABの中点であることを証明しようとしたものが5%いた。

(問 題 3)

(AB，CD)＝－1のときCがi) Aにii) ABの中点に，iii) Bにiv) 無限遠点に近づくとき，Dはどのように動くか。

(イ) 正解率　96%

(ロ) 平均点　9.8点

(ハ) 所　見　非常によく理解していた。これは指導のときも無限遠点の導入は，はじめてなので相当時間をかけて指導した。CがABの中点にAの側より近づくときDはABの延長上を限りなく遠ざかる。しかしCがABの中点を通りこすと，DはBAの延長上にあらわれること，無限遠点が一つであると考えること，これらはよく理解されていた。残念ながら1名，Dが＋∞または－∞であるとして表現が失敗したものがいた。

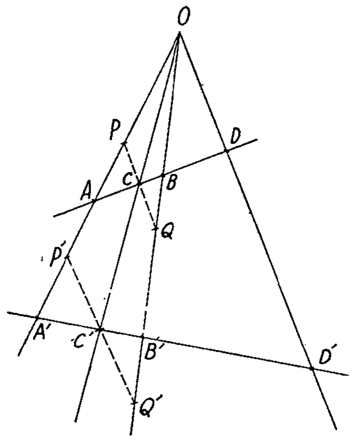
(問 題 4)

一つの線束をなす四直線が一つの直線を調和に分つときは，他のすべての直線を調和に分つ。

(イ) 正解率　78%

（ロ）平 均 点　8.6点

（ハ）所　　見　この定理はC，C′よりODに平行線をひいて証明するように指導していた。後に線束の二重比と結びつけるとき角を用いた指導を行ったのであるが，この一般的な角を用いた解法をしたものが相当いた。直線の向きをとり違えて符号が一致しなかった者，なかにはC，C′より平行線をひくことだけしかおぼえていないで比の形を変えることが出来ないために失敗した者も若干いた。



（オ1図）

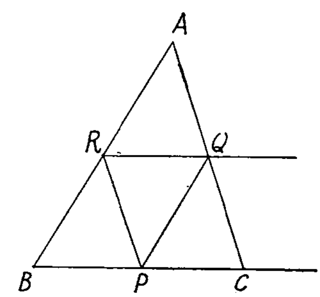
（問 題 5）

△ABCの三辺の中点をそれぞれP，Q，Rとすると　P（RQ，AC）＝−1であることを証明せよ。

（イ）正 解 率　74%

（ロ）平 均 点　8.0点

（ハ）所　　見　射影切断による点列の二重比と線束の二重比との関係をみようとして出題した問題である。大体よく理解されていたと思われるが，無雑作にP（RQ，AC）＝（RQ，AC）としたものが誤りの43%を占めている。全く証明できなかったものは受験者の6%であり他は推論の不十分により正解とはなし難いものである。なおメネラウスの定理を自分で拡張して，つぎのような解答が1名あった。PR//ACだからPRとCAとの交点（無限遠点）をW_∞とするとメネラウスの定理により$\dfrac{BP}{PC}\cdot\dfrac{CW_\infty}{W_\infty A}\cdot\dfrac{AR}{RB}=-1$ ……（1）



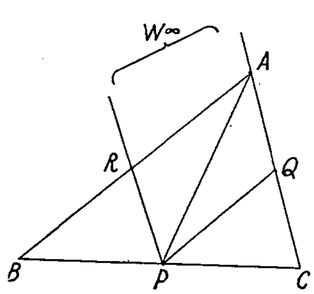
（オ2図）

またP，Q，Rが各辺の中点だから$\dfrac{BP}{PC}\cdot\dfrac{CQ}{QA}\cdot\dfrac{AR}{RB}=1$ ……（2）

（1），（2）を辺々除すれば　$\dfrac{CW_\infty}{W_\infty A}\Big/\dfrac{CQ}{QA}=-1$

$\therefore$ (CA, W_∞Q) ＝ −1

$\therefore$　P（RQ，AC）＝−1



（オ3図）

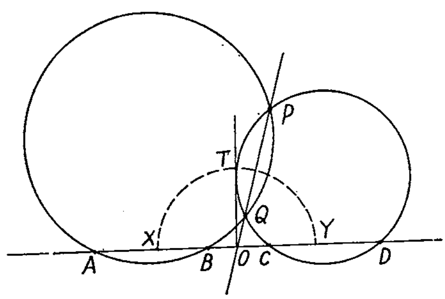
（問 題 6）

四点A，B，C，Dがこの順に共線なるとき，その台上に二点を定めてABに関して調和共役であると同時にCDに関しても調和共役であるようにせよ。

（イ）正 解 率　67%

（ロ）平 均 点　7.8点

（ハ）所　見　本問は難問と思われたがそれでも7割近い正解があった。授業中に指導したのと同じ内容であることにもよると思われるが，一応その意味が理解されたといってもよいであろう。授業中に指導した解答の大略はつぎの通りである。即ちA，Bを通る任意の円と，C，Dを通る任意の円との交点P，Qを結ぶ直線と台との交点Oから接線OTをひき，Oを中心，OT を半径と する円と 台との交点をX，Yとすれば　$OA \cdot OB = OT^2 = OX^2$，$OC \cdot OD = OT^2 = OX^2$である。誤りの内容は全く解答できなかったもの約7%，OとしてBCの中点を用いたもの4%，題意を誤解したもの4%，作図のみで証明されていないもの15%などである。



（オ4図）

（問 題 7）

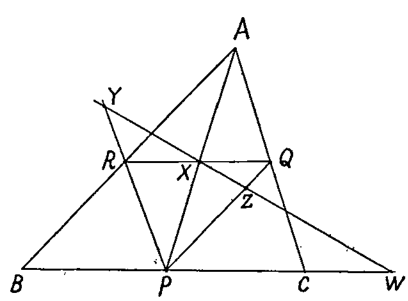
P，Q，Rが△ABCの各辺の中点であって，AP，QRがXで交わるときXを通る一つの直線がPR，PQ，BCと交わる点をそれぞれ，Y，Z，Wとすれば，（YZ，XW）＝－1であることを証明せよ。

（イ）正 解 率　70%

（ロ）平 均 点　8.4点

（ハ）所　見　RX＝XQ，RQ//BCより

P（RQ，XC）＝－1，すなわちPR，PQ，PX，PWは調和線束をなす。すなわちP（YZ，XW）＝－1，これより（YZ，XW）＝－1が出るわけであるが，調和線束の表現を省略してしまったものが13%いた。また表現の方法を誤記したもの，例えば（PQ，XW）＝－1等があったが当人は調和線束のつもりで点列の形式でかつ一直線上にない点を用いているものが9%いた。調和線束と調和点列の表現法の区別が明確に理解できなかったことに原因すると思われる。



（オ5図）

（問 題 8）

A，B，C，D，O，Pは同一円周上の点であって，O（AB，CD）＝－1なるときはP（AB，CD）＝－1であることを証明せよ。

（イ）正 解 率　80%

（ロ）平 均 点　8.4点

（ハ）所　見　本問は線束の二重比の意味と円周角の移動による二重比の移動を意図したものである。概して線束の二重比の意味は受験者の87%まで理解されており，大体において

よい成績を示したといえる。その他A，B，C，Dが共円点であるにもかかわらず線束の二重比O（AB，CD）をあたかも点列のように（AB，CD）と誤解したものが僅かながらいたことは記号の理解が十分でなかったことを示すものであろう。

（問 題 9）

（AB，CD）＝（BA，CD）のときAB，CDは調和点列である。

（イ）正 解 率　78%

（ロ）平 均 点　8.7点

（ハ）所　　見　授業ではつぎのように指導した。与えられた条件から

$$\frac{AC}{CB}\Big/\frac{AD}{DB}=\frac{BC}{CA}\Big/\frac{BD}{DA}=\frac{CB}{AC}\Big/\frac{DB}{AD}=\frac{1}{\dfrac{AC}{CB}\Big/\dfrac{AD}{DB}}$$

$$\therefore\ \left(\frac{AC}{CB}\Big/\frac{AD}{DB}\right)^2=1 \qquad \therefore\ \frac{AC}{CB}\Big/\frac{AD}{DB}=\pm 1$$

ところが（AB，CD）＝1となるのはAとBまたはCとDが一致する場合に限ることは既習であるので，ここでは－1の方をとる 。すらわち（AB，CD）＝－1が成りたつ。

答案の中には，複号の中正号の不適当であることの説明が無いものや不完全なものが5％程あった。また，本質的には変わらないが証明の形式が多少異るもの，例えば，条件から出る最初の等式で内項を交換して$\frac{AC}{CB}\Big/\frac{BC}{CA}=\frac{AD}{DB}\Big/\frac{BD}{DA}$を導き$\left(\frac{AC}{CB}\right)^2=\left(\frac{AD}{DB}\right)^2$より$\frac{AC}{CB}=\pm\frac{AD}{DB}$を出し，前と同じ理由で負号のみをとったもの等があった。

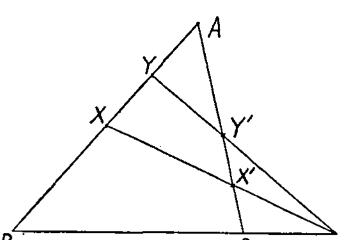
（問 題 10）

△ABCの辺ABの中点をY，ACの中点をY′，Y′Cの中点をX′とするときYY′，XX′，BCは共点である。

（イ）正 解 率　69%

（ロ）平 均 点　8.9点

（ハ）所　　見



（才6図）

$$(AX,\ YB)=\frac{AY}{YX}\Big/\frac{AB}{BX}=-\frac{1}{2}$$

$$(AZ',\ Y'C)=\frac{AY'}{Y'X'}\Big/\frac{AC}{CX'}=-\frac{1}{2}$$

$\therefore$（AX，YB）＝（AX′，Y′C）

故にYY′，XX′，BCは共点である。

二重比が等しいとき共点であるということはよく理解されている。失敗した者の原因はどのようにとった二重比でもよいがその計算が違っている。例えば

（AX，YB）$=\frac{1}{2}$　のように符号をおとした者，ひどいのは（AX，YB）＝－1とした者もいた。これなどは，はじめから調和点列と考えて計算もしてないようである。

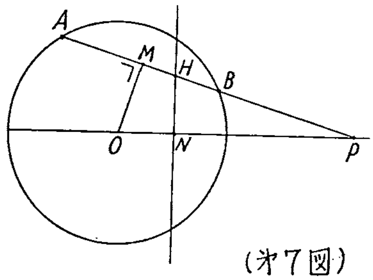
（問 題 11）

任意の点を通って一つの円に割線を引くとき，この直線は円周，その点，およびその円に関するその点の極線によって調和に分かたれることを証明せよ。

（イ）正 解 率　67%

（ロ）平 均 点　8.8点

（ハ）所　　見　MP・MH＝MA² を証明させ，これより（AB，MP）＝－1を導かせようとしたが全く解答がなされていないものが7％，直接に（AB，MP）＝－1を示そうとしたものがごく僅かあった。外は大体において出題の意図通りの解答が試みられていた。誤りの多くは向きの誤り（例えばMPとすべきところをPMとしたもの）であり，これが誤りの約30％を占めている。極，極線の意味が理解されていないと思われるものは全く解答をなされなかったものを含めて約9％とみられその他ほぼ正解に近いが不注意により記号を誤記したと思われるものが少数あった。



(才7図)

（問 題 12）

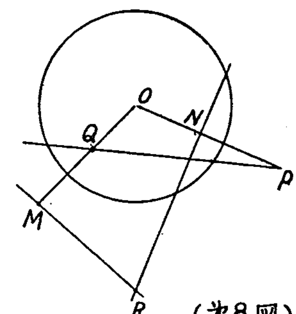
任意の二点をP，Qとし，P，Qの各々の極線の交点をRとするとき，点Rの極線は直線PQである。これを証明せよ。

（イ）正 解 率　83％

（ロ）平 均 点　8.8点

（ハ）所　　見　Pの極線をNR，Qの極線をMRとすると，その交点RはNR上にあるからその極線はNRの極点Pを通る。……（1）またRはMR上の点でもあるからその極線はMRの極点Qを通る……
……（2）

故に（1），（2）よりRの極線はP及びQを通るから直線PQがRの極線である。解答の中に（1），（2）を既習事項として使わずに極線の意味に戻って証明したものが32％にいた。また説明には誤りは無いが図形の間違っている者，すなわち点Pとその極線が共に円外または円内にあるような図を書いたのが4％いた。



(才8図)

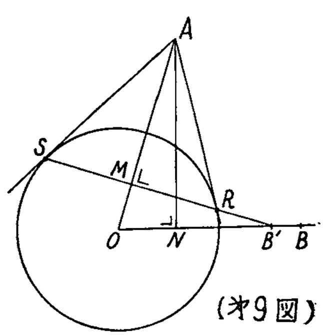
（問 題 13）

一点Bの一つの円に関する極線上の一点Aからこの円に二つの接線をひくとき，この接線とBの極線と直線ABとは調和線束をなす。

（イ）正 解 率　80％

（ロ）平 均 点　8.9点

（ハ）所　　見　Aからひいた接線の接点をS，RとするときAはBの極線上にあるからBはAの極線SR上にあるということ，即ち，S，R，Bが一直線上にあることの証明がぬけているのが失敗したものの原因である。しかし，任意の点を通る一つの円の割線は円周，その点およびその円に関するその点の極線によって調和に分かたれるという定理はよく理解されていた。なお，S，R，Bが一直線上にあることを直接つぎのように証明している者がいた。

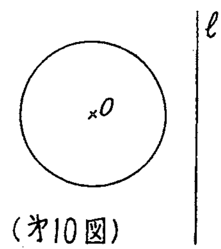


(才9図)

SRがOBと交わる点をB′，OAとSRの交点をM，OBとBの極線との交点をNとする。　ON・OB′＝OM・OA＝r²故にB′はANの極点となりBと一致する。

（問 題 14）

円Oと直線 l が図のように与えられている。円O′をつくり二円O，O′の根軸が l になるようにせよ。



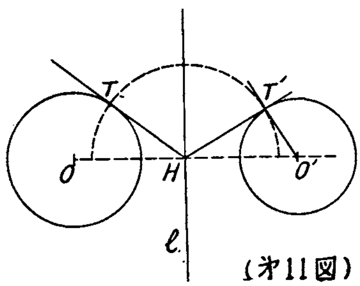
（⽊10図）

（イ）正 解 率　54%

（ロ）平 均 点　7.6点

（ハ）所　見　本問の解答は大別してつぎの三つに分類できた。

A 型（約 53%）

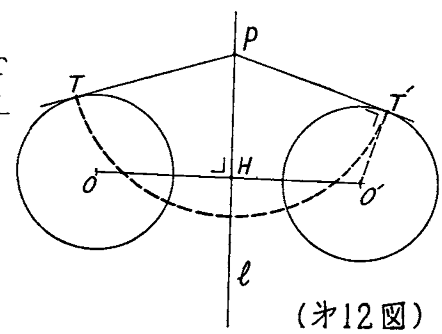


（⽊11図）

Oから l に下した垂線のの足Hを中心とし，Hから円Oへの接線HTを半径とする円周上の任意の点をT′として，HT′⊥O′T′なるO′を直線OH上に定めて解いたものである。

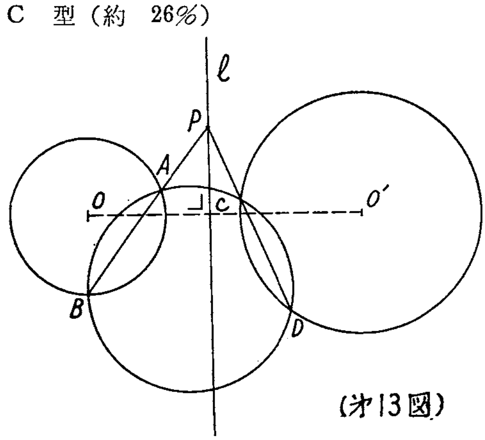
B 型（約 15%）

l 上の任意の点Pを中心としPから円Oへの接線PTを半径とする円周上の任意の点をT′としてPT′⊥O′T′なる点O′を直線OH上に定めて解いたものである。



（⽊12図）

C 型（約 26%）



（⽊13図）

円Oと交わる任意の円Kとの共通弦ABと l との交点Pから円Kに割線PCDをつくりC，Dを通りOH上に中心をもつ円O′を作図したものである。

残りの6%は無解答である。なお教室での指導の際にはA型の方法で指導した。

三つの型を通じて正解でない理由の大きなものは作図のみなされて証明が記されてないもの（正解でないものの32%）および円OとO′とが l に関して反対の側になければならぬとしたもの（正解でないものの36%）である。特に後者については指導の際に一応ふれてあることではあるが，特に強調しておかねばならない点だと感じている。なお，その他，特殊な点について作図しているものが少数あったが，これは，解が無数にあることが十分理解されていないもののようである。

（問 題 15）

一つの図形をまず一つの円に関して反転しつぎに中心を変えず半径を変えた円に関して再びもとの図形を反転するとき，このようにして得た二つの反転形はその中心を相似の中心として

相似であって相似の位置にあることを証明せよ。

（イ）正 解 率　74%

（ロ）平 均 点　8.9点

（ハ）所　　見　反転の半径がk_1のとき図形Ｐの反転形をP_1，半径がk_2のとき同じＰの反転形をP_2とし中心をＯとする。

$OP \cdot OP_1 = k_1^2$，$OP \cdot OP_2 = k_2^2$より$OP_1 : OP_2 = k_1^2 : k_2^2$（一定），定義によってO，$P_1$，$P_2$は一直線上にあり，かつ上の比が一定になることから$P_1$のえがく図形と$P_2$のえがく図形がＯを中心として相似で相似の位置にあることが証明できるわけである。

解答の中に，Ｐのえがく図形を円に限るとしたものが10%いた。またＰの反転形がP_1とP_2に，別の点Ｑの反転形がQ_1，Q_2にくるとし，$\triangle OP_1Q_1$と$\triangle OP_2Q_2$が相似になることを証明したものが５%いた。

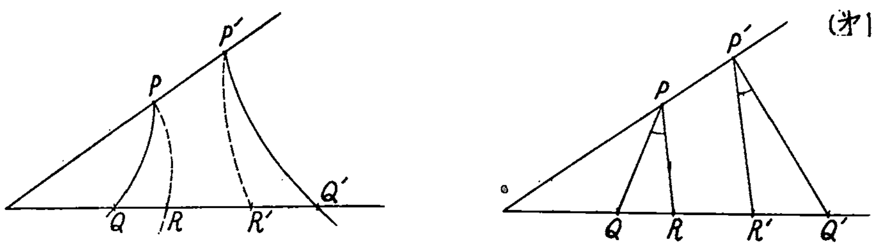
（問 題 16）

相交わる二曲線のなす角は，各々の反転形のなす角に等しい。

（イ）正 解 率　80%

（ロ）平 均 点　8.2点

（ハ）所　　見



(才14図)

$\angle QPR = \angle O'P'R'$ なることを述べＯＱをＯＰの方へ近づけた極限においてＰ，Ｐ′における両曲線の接線のなす角が等しい。この極限的な考え方にふれない答案が若干あった。等角写像という概念は理解困難な点があるようで，０点の者も少しいた。一つの図形を半径を変えた円に関して反転して得た二つの反転形はその中心を相似の中心として相似の位置にあるからと題意をとり違えた者もいた。

（四） 応用問題テスト結果

（問 題 1）

直線ｇ上に４点Ａ，Ｂ，Ｃ，Ｄがこの順に並んでいる。このとき，ｇ外の点Ｐと，この４点を結べば，

$$\frac{\sin\angle APC}{\sin\angle BPC} : \frac{\sin\angle APD}{\sin\angle BPD} = \frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD}$$

であることを証明せよ。また，線分ＡＰのＰを越えての延長上に，任意の一点Ａ′をとり，Ａ′とＢとを結ぶ直線が，ＰＣ，ＰＤと交わる点をそれぞれＣ′，Ｄ′としたとき，

$$\frac{A'C'}{BC'} : \frac{A'D'}{BD'} \quad と \quad \frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD}$$

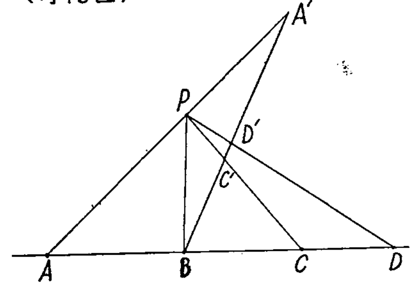
との間の関係を出せ。（大阪大学昭和31年度入学試験問題）

（イ）正 解 率　41%

（ロ）平 均 点　7.3点

(ハ) 所　見　角に向きをつけて指導していたため，後半で sin∠APCと sin∠A'PC および sin∠APDと sin∠A'PD' の結びつきのとき，符号で迷った者が相当数いた。絶対値で証明して，最後に向きを考えて正解した者もたくさんいた。（阪大の出題者は，多分，角の向きまでは要求していないと思うが）前半か後半のどちらかができなった者が7名いた。直線上に，A，C，B，Dの順に並んでいれば，生徒はもっとわかりやすかったと思う。また，△A'AB を直線PC，PDできったと考えて，メネラウスの定理を二度つかって後半を証明したものが2名いた。

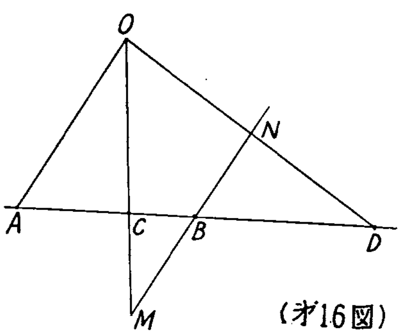
(第15図)



(問 題 2)

C，Dが線分ABを調和に分けるとする。AB外の一点をOとし，Bを通りOAに平行にひいた直線がOC，ODに交わる点をM，Nとすると，BはMNの中点であることを証明せよ。

(大阪大学昭和29年度入学試験問題)



(第16図)

(イ) 正 解 率　98%

(ロ) 平 均 点　9.4点

(ハ) 所　見　調和線束O (AB，MN) に一直線MNが交ったと考えて，AO//MNよりその交点の無限遠点に対する調和共役点Bは当然MNの中点であるとしたものが，全体の54%である。また，平行線の比の移行によって導いたもの，例えば，

AO//MNより

$$\frac{AO}{BN}=\frac{AD}{BD},\qquad \frac{AO}{MB}=\frac{AC}{CB}$$

条件より

$$\frac{AC}{CB}=\frac{AD}{BD}$$

$$\therefore\ \frac{AO}{BN}=\frac{AO}{MB}\qquad \therefore\ BN=MB$$

の形式による解答が42%あった。また，変った解答としては，

△OMNにメネラウスの定理を用いて

$$\frac{NB}{BM},\ \frac{MC}{CO},\ \frac{OD}{DN}=-1\ \cdots\cdots①$$

また，MN//AOより

$$\frac{MC}{CO}=\frac{CB}{AC}\cdots\cdots②,\quad \frac{OD}{ON}=\frac{AD}{DB}\cdots\cdots③$$

②，③より

$$\frac{MC}{CO}\cdot\frac{OD}{DN}=\frac{CB}{AC}\cdot\frac{AD}{DB}=-1\ \cdots\cdots④$$

①，④より

$$\frac{NB}{BM}=1\qquad \therefore\ NB=BM$$

応用問題として課したこの問題の成績から考えて，生徒は，既習の学習内容を自由に活用する力が，かなりついているとみてよいと思う。

（問 題 3）

△ABC内の一点をOとし，AO，BO，COが対辺に交わる点を，それぞれD，E，Fとする。EFがBCの延長に交わる点をGとすれば，B，C，D，Gは調和点列であることを証明せよ。

（イ）正 解 率　87%

（ロ）平 均 点　9.5点

（ハ）所　見　本問は受験参考書からとったものであり，直接，授業中に指導したものではないが，予想以上の好成績だったと思う。本問は，次の問題への発展のための予備的問題とも考えられ，チェバの定理とメネラウスの定理を利用した解答を予想したが，誤りの大部分は，メネラウス，チェバの両定理が十分理解されていないと思われるもの，あるいは，両定理が使われているが，最後まで推論し得なかったものであった。なお，全く証明できなかったものは，2%にすぎなかった。

（問 題 4）

前問において，FG，ADの交点をHとするとき，つぎを証明せよ。

（1）（FE，HG）＝－1，　　（2）（AO，HD）＝－1

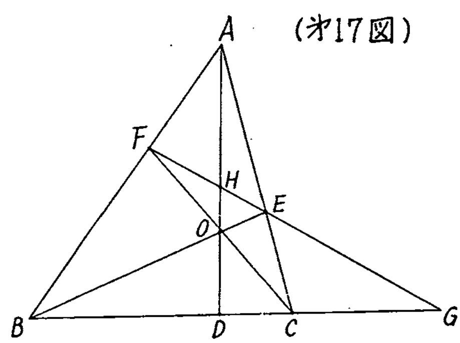
（イ）正 解 率　（1）87%　（2）56%

（ロ）平 均 点　7.3点　〔（1）4.4点　（2）2.9点〕

（ハ）所　見　前問の調和点列を，射影，切断によって，調和線束，調和点列をつくることの理解程度をみようとしたものである。

（1）は，前問の調和点列を，Aから射影して得られる調和線束を，直線FEで切断して得られる。（2）は，さらに，（1）の調和点列を，Bから射影して得られる調和線束を，直線AOで切断して得られるなどの解法が考えられる。（1）では，受験者の約85%，（2）では約47%が，射影，切断を用いて正しい解答をしており，また（1）では約2%，（2）では約9%が，メネラウス，チェバの両定理を用いて，正しい証明がなされている。理解が十分でなくて，完全に誤りと思われる解答は，（1）では受験者の約13%，（2）では約33%であり，このことからも，（2）が（1）に比してやや困難であったことがうかがわれる。（2）の残り約11%は，正しい意図をもっていながら，証明が不十分であったものである。

（才17図）



（五）結　　　論

生徒は授業中非常に熱心かつ積極的であった。丁度，これを指導する前が入学試験の範囲外である立体幾何であったためもあろう。

授業について感じたことは，

1. 無限遠点の導入，一直線上に無限遠点が一つであると考えた方がよいということが興味をひいたようだ。

2. 数Ⅱで極線の式を求めている関係で極点が内部においても同様な式になることに感銘が深かったようである。

3. 根軸については虚の接線を導入すればよいのだが，平面幾何の軌跡の限界で困るので（入学試験のため）あきらめた。従って根心なども存在しない場合ができ残念であった。

4. 更にもう少し指導内容をひろげたかったが時間の関係で一応打切りにした。

テストの結果は非常によかった。全体で86.4点，応用問題のテストは87.3点である。普通のテストの結果に対してもまさるともおとらない成績をおさめている。この応用問題も一部は大阪大学の入試問題であり，指導の効果は十分あったと思う。

勿論生徒が既に幾何の力が相当養われていた上でのことであるから，新課程では必ずしもこれだけの結果は得られないと思う。

しかしながら，ともかく近世幾何的内容を指導内容にとりいれて十分指導できるという確信は得られた。