近世幾何学よりみた幾何指導内容について

出　石　　　隆

（一）　学習指導要領改訂に対して

学習指導要領の改訂に対し，昨年6月に文部省より改訂草案が発表され，さらに10月に正式のものが発表された。6月のものと若干の変化はあるようだが大体は同一のものである。

図形に関するものでは

〔数学Ⅰ〕の内容　　(4)　平面図形と式
　　　　　　　　　　(5)　空間図形
　　　　　　　　　　(6)　数学と論証
〔数学ⅡB〕の内容　(4)　図形と座標

などにはいっている。

図形教材については初等幾何学の大部分が中学に移行され，高校では座標幾何学のみの色彩が非常に強くなった。

現在の中学のみで初等幾何が十分指導できるかどうか，この反省は必ずや近き将来になされると思う。

歴史上から考えても，ギリシヤ時代全盛であった幾何学はその後殆んど発展せず代数のみが進歩していたが，17世紀に入って解析幾何学の出現により一時は古代ギリシヤの幾何学は世の人から葬り去られてしまったかの様に見えた。しかし他方では解析幾何学の研究法が全く代数的で何等図形的興味を感ぜられないことに不満を抱いた幾何学者は古代幾何学をしたって新らしい思想の下に古代幾何学が復活した，即ち Desargues, Pascal, Carnot, Brianchon, Poncelet などによって研究され射影，切断という近代思想の下に新らしい近世幾何学が生れた。

今度の改訂は丁度近世幾何学が生れる以前の解析幾何全盛の頃に対応するような感じがする。

入学試験のために作られた様な難問を指導するのは反対であるが，もっと平易で，かつ数学的に進歩しに近世幾何的色彩をとり入れるべき反省がなされてよかろう。

（二）　望ましい射影的性質について

文部省とは別に日数教を始めとして，種々の研究団体から色々な案が発表され，それらの間にはかなりのくいちがいもある。

それらのなかで射影的性質のものに関しては次の様なものがある。

東京都高校数学研究会

　XV　図形の射影的性質

(1) 線分，角の分割比と複比

(2) 平面図形の射影

(3) 完全四辺形

(4) 円の射影的性質

東京教育大付高

II 4　射影的性質，透視図，双対性の原理，パップスの定理，調和図形，パスカルの定理

これだけのものを今すぐ指導内容にいれることは一寸困難の様に思われる。指導のしかたにもよるがパップスの定理，パスカルの定理は除いた方がよいと思う。双対性の原理についても，射影空間でこのようなことがなり立つ美しさを指導するのはよいが，内容的に深くたち入ることは空間概念の指導にまつことになり困難だと思う。

表題に示す近世幾何学という意味は色々に解釈されるが，ここで述べるのは古典幾何学から射影幾何学へ移行する中間的な幾何学をさしている。

文芸復興期以後におこった近世幾何学は，古典幾何学の静的に対して動的な内容をもっている。また，古典幾何学が個々の図形を考えるに対し，図形の集団を考えている。これらの例としては無限遠点の導入，調和点列，調和線束などがある。

無限遠要素を導入し射影幾何学を指導する必要はないと思う。ただ問題を解く考えとして利用することは指導上重要なことと思う。これについては以前に日数教で発表したことがありここではばくが生徒に無限遠要素から出発して射影空間が如何なるものであるかを知らせることは意味のないことではないと思う。

さて，近世幾何学の内容として，調和図形（調和点列，調和線束），極点と極線，反転，二重比，根軸と共軸円，共点，共線，完全四角形などがあげられるが，ここでは一二の例として調和図形と極線についてのみ述べよう。

（三）　調和図形について

(1) 調　和　点　列

調和点列の性質は多少はあるが，現在のどの教科書にもとりあつかわれている。即ち

（定　義）　$(AB,\ CD)=\dfrac{AC}{CB}\Big/\dfrac{AD}{DB}=-1$

（定　理）

（i）　$(AB,\ CD)=(CD,\ AB)=(BA,\ DC)=(DC,\ BA)$

（ii）　$(AB,\ CD)=-1$　のとき

$$\frac{1}{AC}+\frac{1}{AD}=\frac{2}{AB}\qquad (A\text{を基準})$$

（iii）　$(AB,\ CD)=-1$　でOをABの中点とするとき

$OC\cdot OD=OB^2$

およびその逆

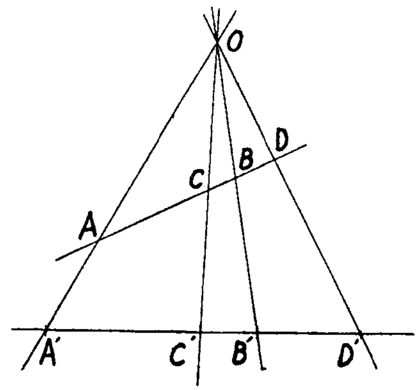
これらは改訂された後にも種々の教科書にやはりとりあつかわれると思う。

(2) 調　和　線　束

それに対し片手落ちとして調和線束が現在の教科書にはあまり見られない。これは是非とも指導されるべき性質のものである。その意図で出題されたのかどうかは知らないが，29年

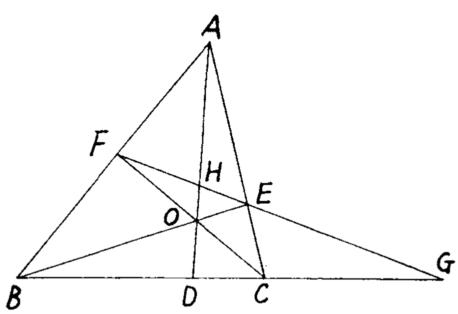
に大阪大学に内容的に同じことが出題されている。証明はごく簡単であり，数学的には非常な進歩がある。

（定理）一つの線束をなす四直線が，一つの直線を調和に分つときは，他のすべての直線を調和に分つ。



（大阪大学29年）C，Dが線分ABを調和に分けるとする。AB外の一点をOとしBを通りOAに平行にひいた直線がOC，ODに交わる点をM，NとするとBはMNの中点である。

（問題）$\triangle ABC$内の一点をOとし，AO，BO，COが対辺に交わる点をそれぞれD，E，Fとする。EFがBCの延長に交わる点をGとすればB，C，D，Gは調和点列である。



上の問題はメネラウス，チェバの定理の応用としてたいていの教科書にもあるが，メネラウス，チェバの定理も共線，共点の問題として近世幾何学の領域である。

上の問題に付加して，FG，ADの交点をHとするとき

$$(FE,\ HG)=-1,\ (AO,\ HD)=-1$$

を要求する問題がある。これをメネラウス，チェバの定理を用いて直接やるにはどの三角形を考えたらよいか，どの直線できったらよいかを見つけるのが困難である。しかし，上の定理を利用すればごく簡単に

Aからとも，Oからとも考えて$(FE,\ HG)=-1$

Eからとも，Fからとも考えて$(AO,\ HD)=-1$

は一目で解決できる。

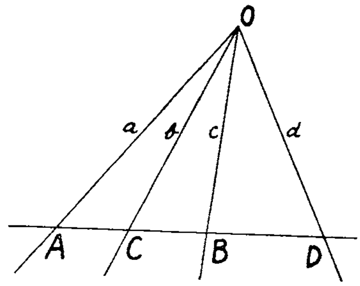
さらに一歩進めて等二重比の点列と線束まで考慮すべきだろう。内容的には全く同じことである。

（定　義）Oを心とする四直線a，b，c，dからなる線束の二重比とは

$$\frac{\sin(ac)}{\sin(cb)}\Big/\frac{\sin(ad)}{\sin(db)}\quad \text{を意味し}$$

$(ab,\ cd)$で表わす。または$O(AB,\ CD)$で表わす。角はその向きをも考える。

（定理）線束の二重比はその任意の切線による点列の二重比に等しい。



この定理から出発して共点に関するつぎの定理がある。

（定理）（ｉ）(AB, CD)，$(A'B', C'D')$は二つの等二重比の点列であって，AA'，BB'，CC'が共点なるときは，DD'もまた同じ点を通る。

（ii）　二つの等二重比の点列(PX, YZ)，$(PX', Y'Z')$が一対応点Pを共有するときは直線XX'，YY'，ZZ'は共点である。

勿論，以上の定理は無限遠要素を入れて射影空間で考えるなら双対が成立する。

（四）　極点と極線について

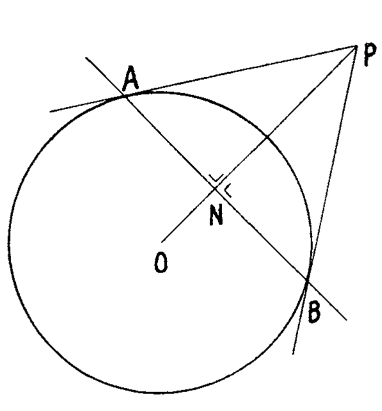
現在，極点と極線についてはどの教科書にもその名称は示さないが解析幾何の問題としてあげている。即ち，円外の点Pから円Oに接線PA，PBをひくときその二接点ABを結ぶ直線が点Pのこの円に関する極線である。座標を用いれば円が $x+y=\gamma^2$，点Pが(x_1, y_1)なら極線の式は $x^1x+y_1y=\gamma^2$ である。

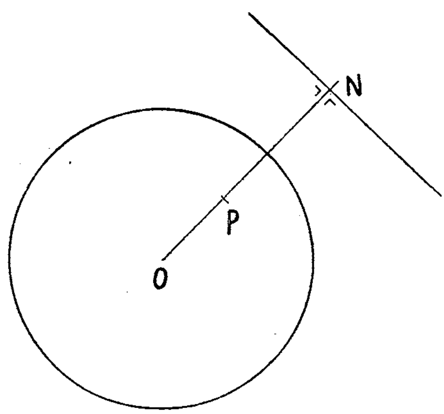
しかし，この定義ではPが円内にあるときは極線は存在しなくなる。

Desargues のまとめた近世幾何学においてはこの極点と極線の定義をもつと拡張している。即ち，半径 γ の円の中心Oを通る半直線上にN，Pをとり

$$ON \cdot OP = r^2$$

の関係を満足するとき，Nを通ってONに垂直にひいた直線をPの極線と定義している。



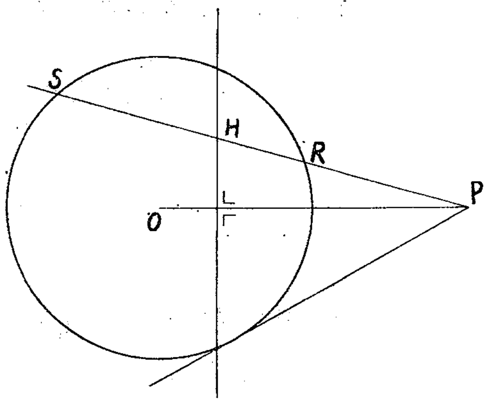


このように定義すれば点Pが円内，周上，円外にあろうとつねに極線は存在する。しかもこの極線の方程式はつねに $x_1x+y_1y=r^2$ となる。

これは初等幾何としてでなく，解析幾何としても面白いものである。

この極点と極線に関しては，いままでの調和図形と関連してつぎの重要な定理がある。

（定理）任意の点を通って一つの円に割線をひくときこの直線は円周，その点，およびその円に関するその点の極線によって調和に分かたれる。



（五） 結　　論

今度の改訂により指導のしかたによっては平面幾何は古典的なやり方を全然行わないで座標を用いてのみのとりあつかいができる。

この様な状態ですますことは決してよいとは思われない。二定点からの距離の比が一定な点の軌跡であるアポロニウスの円なども古典的なやり方をするからこの円の特徴が明瞭につかめるのであって座標にのみたよるときはあまりきれいなものではない。中学で完全に履修されれば問題はないが，前にも述べたごとく果して十分履修できるかどうかの反省は必ずや数年後に問題となろう。

しかしながら，また中学のある程度の履修の上にたつものだからといってひねくれた難かしい問題をやるのではなく，上に例としてあげた様な近世幾何的な題材をもちいて論証指導を行ってほしい。