投影図を利用した共面図表 (つづき)

―― 共線図表の空間への拡張 ――

能　崎　克　己

§7　例5　$M=P(1+\frac{r}{100})^n$　(その1)

複利法において，元金 P 円，一期の利率 r %，期間 n のときの元利合計をM円とすれば，

$$M=P\left(1+\frac{r}{100}\right)^n \tag{46}$$

である。(46)の両辺の常用対数をとれば，

$$\log M=\log P+n\log\left(1+\frac{r}{100}\right),$$

$$\log M-\log P-n\log\left(1+\frac{r}{100}\right)=0 \tag{47}$$

となる。式(47)は，行列式

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & \log\frac{10}{P} & 1 \\ 0 & 0 & \log\left(1+\frac{r}{100}\right) & 1 \\ \frac{1}{n} & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \log\frac{10}{M} & 1 \end{vmatrix}=0 \tag{48}$$

で表わすことができる。従って，四直線P，r，n，Mを，

$$\left.\begin{array}{lllll} (P) & : & x_1=0, & y_1=1, & z_1=\log\frac{10}{P} \quad ; \\ (r) & : & x_2=0, & y_2=0, & z_2=\log\left(1+\frac{r}{100}\right) \quad ; \\ (n) & : & x_3=\frac{1}{n}, & y_3=0, & z_3=0 \quad ; \\ (M) & : & x_4=1, & y_4=1, & z_4=\log\frac{10}{M} \end{array}\right\} \tag{49}$$

によって定義すれば，付図21に示すような四直線が得られ，これらの直線上に，(49)に従って，それぞれ，目盛P，r，n，Mをつける。

P，r，n，が与えられたとき，Mを求めるには，三直線P，r，n上に，それぞれ，目盛(P)，(r)，(n)なる三点をとり，この三点を通る平面と，直線Mとの交点に付されている目盛(M)を読めば，このMが求める元利合計である。

付図22は，直角投影法による，付図21の投影図である。図中の数字は，P，r，n を与えて，元利合計Mを求めるときの手順を示したものである。即ち，二直線P，r上に，それぞ

れ，目盛(P)，(r)なる二点をとり，この二点を直線（番号１の直線）で結び，この直線と基線（y軸）との交点と，直線n（平面図）上の目盛（n）なる点とを結ぶ（番号２の直線)。次に，直線Mの水平跡を通り，番号２の直線に平行な直線（番号３の直線）をひき，基線（y軸）との交点において，基線（y軸）に垂直な直線（番号４の直線）を立て，番号１の直線との交点から，基線（y軸）に平行線（番号５の直線）をひき，直線Mとの交点に付されている目盛（M）を読めば，このMが求めるものである。この場合には，立面図と平面図のみを必要とし，側面図は不要である。なお，この手順を，番号１，５，４，３，２の順に行えば，逆計算の一つ，P，r，Mを与えてnを求める計算を行うことができる。この場合も，立面図と平面図のみを用いて可能で，側面図を必要としない。また，他の逆計算には，側面図をも必要とする。例えば，r，n，Mを与えてPを求めるには，直線r及び直線n（側面図）上に，それぞれ，目盛(r)，(n)なる二点をとり，この二点を結ぶ（番号１′の直線)。次に，直線M（側面図）上の，目盛（M）なる点から，番号１′の直線に平行線（番号２′の直線)をひき，これと基線（x軸）との交点から，基線（y軸）に平行線（番号３′の直線）をひき，直線M（立面図）の延長との交点をとる。この点と，直線n（平面図）上の目盛（n）なる点を結び（番号２の直線)，基線（y軸）との交点と，直線r上の目盛（r）なる点を結び（番号１の直線)，直線Pとの交点に付されている目盛（P）を読めば，これが求めるPである。また，P，n，Mを与えてrを求める場合も同様に，番号１′，２′，３′，２，１の順に行えばよい。即ち，番号２の直線をつくるまでは，上と全く同様であって，それと基線との交点と，直線P上の目盛（P）なる点を結び（番号１の直線)，直線rとの交点に付されている目盛（r）を読めば，このrが求めるものである。

計算上の便利，また，紙面の節減から考えれば，直線n，及び，直線Mの水平跡を，基線を対称軸として対称移動し，平面図を立面図に一致させておけば，図を混乱させることなく，更に好都合であろう。（付図23）

付図24は，以上のことを考慮して作成された，実際に用いるための，式(46)の計算図で，図中の実線の例は，

$P=20000,$

$r=50,$

$n=3$

を与えて，

$M=69500$

を求める計算を示したものであり，また，点線の例は，

$r=70,$

$n=2,$

$M=80000$

を与えて，

$P=27700$

を求める計算を示したものである。

一つの式が与えられたとき，その共面図表の型は，ただ一つとは限らない。その一例として，ここで，式(46)について，更に，今一つ，上記と異った形での共面図表化を試みる。

式(46)は，また，行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & \dfrac{1}{\log P} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dfrac{1}{\log\left(1+\dfrac{r}{100}\right)} & 1 \\ \dfrac{n}{n-1} & 0 & 0 & 1 \\ 1 & \dfrac{1}{\log M} & \dfrac{1}{\log M} & 1 \end{vmatrix} = 0 \tag{50}$$

で表わすことができる。従って，四直線P，r，n，Mを，次のように定める。

$$\left.\begin{array}{llll} (P): & x_1 = 1, & y_1 = \dfrac{1}{\log P}, & z_1 = 0 \quad ; \\ (r): & x_2 = 0, & y_2 = 0, & z_2 = \dfrac{1}{\log\left(1+\dfrac{r}{100}\right)} \quad ; \\ (n): & x_3 = \dfrac{n}{n-1}, & y_3 = 0, & z_3 = 0 \quad ; \\ (M): & x_4 = 1, & y_4 = \dfrac{1}{\log M}, & z_4 = \dfrac{1}{\log M} \end{array}\right\} \tag{51}$$

(51) に示した四直線の位置は，付図25で表わされる通りで，これらの直線上に，(51)に従って，それぞれ，目盛P，r，n，Mをつける。

P，r，n が与えられたとき，Mを求めるには，三直線P，r，n 上に，それぞれ，目盛(P)，(r)，(n) なる三点をとり，この三点を通る平面と直線Mとの交点に付せられた目盛 (M) を読めば，求める元利合計 $M=P\left(1+\dfrac{r}{100}\right)^n$を得る。

付図26は，付図25の図形を，直角投影法によって投影した図である。P，r，nが与えられたとき，三直線P，r，n上に，それぞれ，目盛 (P)，(r)，(n) なる三点をとり，二点(P)，(n)を結ぶ直線(番号1の直線)と基線との交点と，点(r)を結ぶ(番号2の直線)。点(P)から基線に垂線（番号3の直線）を下し，その足から，番号2の直線に平行な直線（番号4の直線)をつくり，直線Mとの交点を(M)とすれば，求める元利合計Mが得られる。この場合には，平面図，立面図のみを要し，側面図を必要としない。図中に付した番号は，計算する手順を示したものであるが，この順序を変更すれば，次のような逆計算も行うことができる。

1）M，P，r を与えてnを求める計算　番号3，4，2，1の順に行う。

2）M，P，n を与えてrを求める計算　番号3，4，1，2の順に行う。

以上の1），2）の場合も，さきの場合と同様に，平面図，立面図のみで行うことができ，側面図は不要である。

3）M，r，uを与えてPを求める計算

この第三の場合に限り，側面図をも必要とする。直線nは，平面図を用いないで，側面図を用い，付図25または付図26に示した番号1′，2′，3′（あるいは4），3の順序に行う。即ち，二直線n（側面図）及びr上に，それぞれ，目盛 (n)，(r) なる二点をとり，この二点を結ぶ（番号1′の直線）。この直線と直線M（側面図――この直線には目盛を必要としない）との交点から，基線（x軸――側面図）に平行線（番号2′の直線）をひき，直線rとの交点と，直線M（立面図）上の目盛 (M) なる点とを結ぶ（番号3′の直線――これは番号4の直線と一致する）。この直線と基線（y軸）との交点において，基線（y軸）に垂線

（番号3の直線）を立て，これと直線Pとの交点に付されている目盛（P）を読めば，このPが求めるものである。なお，直線Pの目盛と同一の目盛を，基線（y軸）にも目盛っておけば，側面図と立面図のみを用いて計算することができ，手順を一つ減らすことができる。この考え方は，前の三種類の計算の場合にも，有効に利用される。

付図27は，以上のことを考慮して作成された，実際に用いるための，式(46)の計算図である。図中の例は，

$$P=15000,$$
$$r=3,$$
$$n=3$$

が与えられて，元利合計

$$M=16400$$

を得る計算を示したものである。なお，付図27では，紙面の都合上，側面図は省いてあるが，必要に応じて，つけ加えることができる。また，右上方の共線図表は，P，Mの比例計算に用いるための補助図表であるが，この目的あるいは利用については後述する。

さて，ここで，本節にあげた二つの計算図表，即ち，付図24及び付図27について，専ら実用の点から比較検討し，それらの長短並びに対策について考えてみよう。

先ず，P尺及びM尺については，付図24では一応すべての範囲で利用可能であるが，付図27では目盛が1.15から10までであり，1.15未満の値では利用不可能である。しかも，3.0以上の目盛は間隔がせまく，実際上殆んど利用することができない。従って，付図27においては，実際に利用できるのは1.15から3.0ぐらいまでである。この範囲は極めて小さいものであり，実用の点からいえば殆んどその価値が失われる。この不便を解消するためには，付図27の右上方に示したような補助共線図表を用いればよい。これは，P，Mの単なる比例計算

$$\frac{P}{P'}=\frac{M}{M'} \qquad (52)$$

のための共線図表であって，その意味及び使用法は次のようである。式(46)において，r，nの二数が定まっておれば，$\left(1+\frac{r}{100}\right)^n$は一定で，このとき$P$，$M$は互に正比例する。従って，適当な定数$K$を用いて，

$$P=KP', \quad M=KM'$$

とおけば，式(46)は，

$$KM'=KP'\left(1+\frac{r}{100}\right)^n \qquad \therefore \ M'=P'\left(1+\frac{r}{100}\right)^n$$

となり，このP'，M'は，前述のように付図27を用いて計算することができる。

$$\frac{P}{P'}=\frac{M}{M'}=K$$

であるから，補助図表の中央の直線にはKの目盛をつければよいのであるが，Kの値そのものは必要ではないので，この直線には目盛を付けるを要しない。実際にこれを用いるには，P'，M'として1.15から3.0程度の数値となるようにすればよい。この型の共線図表は，付図9においても用いたものであり，最もよく用いられる型の一つであるから使用法は述べるまでもなく周知と思われるが，例えば，

$$P=75000,$$
$$r=3,$$
$$n=3$$

が与えられてMを求めるには，先ず，

$$P'=15000$$

と定め，付図27によって，

$$M'=16400$$

を求め，補助図表によって，

$$M=82000$$

を得る。図中には，この計算の計算例を示してある。

r尺については，付図24においては0から100までが目盛られているが，その間隔は広くなく，高々1の位のrまでしか利用できない。まして，小数第1位まで必要とするとき（例えば$r=6.7$のとき）には計算できない。このような利用には，付図27の方が便利であろう。しかし，付図27では1.6未満のrでは利用できず，また，12を超えるrの目盛も付されていない。この不便は，これらの図を用いる限りでは解消されない。しかし，実用上，極めて小さいrは殆んど用いられないとしてよいであろう。何故なら，利率 1.5%未満という低利率は殆んどないからである。従って，理論的には大きな欠点かもしれないが，実用の点からいえばさほど大きい問題ではない。むしろ，10以上のrをもっと利用しやすくする方が重要な課題であろう。しかし，付図24のようにあまりにも大きいrの目盛をつけることは決して必要ではない。

nの値は連続変量ではなく整数値しかとらないから，n尺は間隔は問題にされない。整数値の目盛さえはっきりしておれば十分である。付図27のn尺では，5から10までの目盛は利用に不便であり，甚しくは10より大きい目盛は実用上殆んど利用されないであろう。また，付図24では5より大きい目盛が，目盛10を除いて用いられない。この不便を解消するには，例えば，$n=13$のときには，

$$M=P\left(1+\frac{r}{100}\right)^{13}=P\left(1+\frac{r}{100}\right)^{10}\left(1+\frac{r}{100}\right)^{3}$$

とし，先ず，

$$M_1=P\left(1+\frac{r}{100}\right)^{10}$$

を求めて，更に，

$$M=M_1\left(1+\frac{r}{100}\right)^{3}$$

を求めればよい。これらの計算は，付図24，付図27の何れを用いても可能である。なお，付図27では1の目盛は付けることができない。

また，付図24のn尺，及び，付図27のすべての尺は，いずれも逆数目盛が付されている。計算図表の作成においては原則として逆数目盛を用いるものではないことは周知の事実であるが，これも実用の便利のためである。逆数目盛では必然的に，目盛の数値の大きいところでは目盛の間隔がせまくなり，実用上殆んど意味がない。或いは，精度を甚しく減ずる結果となる。

以上に述べた不便を解消するための一方法として，以下の節において，共面図表の射影変換を研究する。最後に，実際の例として，上述の例のうち最も欠点の多いと思われる上記の付図27について，これを射影変換した共面図表を作成し，実際の計算への利用について考察する。

§8 共線図表の射影変換

§1で述べたように，三変数z_1，z_2，z_3の共線図表において，共線なる三点の座標(x_1, y_1)，(x_2, y_2)，(x_3, y_3)については，行列式

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \tag{53}$$

が成立しなければならない。いま，この図表に，射影変換

$$X_i = \frac{a_{11}x_i + a_{12}y_i + a_{13}}{a_{31}x_i + a_{32}y_i + a_{33}}\ , \quad Y = \frac{a_{21}x_i + a_{22}y_i + a_{23}}{a_{31}x_i + a_{32}y_i + a_{33}}\ , \quad i = 1,\ 2,\ 3 \tag{54}$$

を施す。但し，

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0 \tag{55}$$

とする。このとき，点$(x_i,\ y_i)$が点$(X_i,\ Y_i)$に写像されるとすれば，

$$\begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & 1 \\ X_2 & Y_2 & 1 \\ X_3 & Y_3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{a_{11}x_1 + a_{12}y_1 + a_{13}}{a_{31}x_1 + a_{32}y_1 + a_{33}} & \dfrac{a_{21}x_1 + a_{22}y_1 + a_{23}}{a_{31}x_1 + a_{32}y_1 + a_{33}} & 1 \\ \dfrac{a_{11}x_2 + a_{12}y_2 + a_{13}}{a_{31}x_2 + a_{32}y_2 + a_{33}} & \dfrac{a_{21}x_2 + a_{22}y_2 + a_{23}}{a_{31}x_2 + a_{32}y_2 + a_{33}} & 1 \\ \dfrac{a_{11}x_3 + a_{12}y_3 + a_{13}}{a_{31}x_3 + a_{32}y_3 + a_{33}} & \dfrac{a_{21}x_3 + a_{22}y_3 + a_{23}}{a_{31}x_3 + a_{32}y_3 + a_{33}} & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}y_1 + a_{13} & a_{21}x_1 + a_{22}y_1 + a_{23} & a_{31}x_1 + a_{32}y_1 + a_{33} \\ a_{11}x_2 + a_{12}y_2 + a_{13} & a_{21}x_2 + a_{22}y_2 + a_{23} & a_{31}x_2 + a_{32}y_2 + a_{33} \\ a_{11}x_3 + a_{12}y_3 + a_{13} & a_{21}x_3 + a_{22}y_3 + a_{23} & a_{31}x_3 + a_{32}y_2 + a_{33} \end{vmatrix} \times \prod_{i=1}^{3} \frac{1}{a_{31}x_i + a_{32}y_i + a_{33}}$$

$$= \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \times \prod_{i=1}^{3} \frac{1}{a_{31}x_i + a_{32}y_i + a_{33}} = 0 \tag{56}$$

を得る。この式(56)において，最後の行列式は条件(55)によって0ではないから，式(53)が成立すれば必ず(56)が成立し，逆に，(56)が成立すれば必ず(53)が成立する。即ち，三点$(x_1,\ y_1)$，$(x_2,\ y_2)$，$(x_3,\ y_3)$が共線であるとき，この三点に射影変換(54)を施して得られる三点$(X_1,\ Y_1)$，$(X_2,\ Y_2)$，$(X_3,\ Y_3)$もまた共線である。

従って，一般に，三変数z_1，z_2，z_3の方程式

$$\begin{vmatrix} f_1(z_1) & g_1(z_1) & 1 \\ f_2(z_2) & g_2(z_2) & 1 \\ f_3(z_3) & g_3(z_3) & 1 \end{vmatrix} = 0 \tag{57}$$

の共線図表に，射影変換

$$\left.\begin{aligned} X_i &= \frac{a_{11}f_i(z_i) + a_{12}g_i(z_i) + a_{13}}{a_{31}f_i(z_i) + a_{32}g_i(z_i) + a_{33}} = F_i(z_i), \\ Y_i &= \frac{a_{21}f_i(z_i) + a_{22}g_i(z_i) + a_{23}}{a_{31}f_i(z_i) + a_{32}g_i(z_i) + a_{33}} = G_i(z_i) \end{aligned}\right\} \quad i = 1,\ 2,\ 3 \tag{58}$$

$$但し，\quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0 \tag{59}$$

を施せば，

$$\begin{vmatrix} F_1(z_1) & G_1(z_1) & 1 \\ F_2(z_2) & G_2(z_2) & 1 \\ F_3(z_3) & G_3(z_3) & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{a_{11}f_1(z_1)+a_{12}g_1(z_1)+a_{13}}{a_{31}f_1(z_1)+a_{32}g_1(z_1)+a_{33}} & \dfrac{a_{21}f_1(z_1)+a_{22}g_1(z_1)+a_{23}}{a_{31}f_1(z_1)+a_{32}g_1(z_1)+a_{33}} & 1 \\ \dfrac{a_{11}f_2(z_2)+a_{12}g_2(z_2)+a_{13}}{a_{31}f_2(z_2)+a_{32}g_2(z_2)+a_{33}} & \dfrac{a_{21}f_2(z_2)+a_{22}g_2(z_2)+a_{23}}{a_{31}f_2(z_2)+a_{32}g_2(z_2)+a_{33}} & 1 \\ \dfrac{a_{11}f_3(z_3)+a_{12}g_3(z_3)+a_{13}}{a_{31}f_3(z_3)+a_{32}g_3(z_3)+a_{33}} & \dfrac{a_{21}f_3(z_3)+a_{22}g_3(z_3)+a_{23}}{a_{31}f_3(z_3)+a_{32}g_3(z_3)+a_{33}} & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11}f_1(z_1)+a_{12}g_1(z_1)+a_{13} & a_{21}f_1(z_1)+a_{22}g_1(z_1)+a_{23} & a_{31}f_1(z_1)+a_{32}g_1(z_1)+a_{33} \\ a_{11}f_2(z_2)+a_{12}g_2(z_2)+a_{13} & a_{21}f_2(z_2)+a_{22}g_2(z_2)+a_{23} & a_{31}f_2(z_2)+a_{32}g_2(z_2)+a_{33} \\ a_{11}f_3(z_3)+a_{12}g_3(z_3)+a_{13} & a_{21}f_3(z_3)+a_{22}g_3(z_3)+a_{23} & a_{31}f_3(z_3)+a_{32}g_3(z_3)+a_{33} \end{vmatrix}$$

$$\times \prod_{i=1}^{3} \frac{1}{a_{31}f_i(z_i)+a_{32}g_i(z_i)+a_{33}}$$

$$= \begin{vmatrix} f_1(z_1) & g_1(z_1) & 1 \\ f_2(z_2) & g_2(z_2) & 1 \\ f_3(z_3) & g_3(z_3) & 1 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \times \prod_{i=1}^{3} \frac{1}{a_{31}f_i(z_i)+a_{32}g_i(z_i)+a_{33}} = 0 \qquad (60)$$

となり，やはり共線図表が得られる。なお，このとき三つの曲線z_1，z_2，z_3は，

$$\left.\begin{array}{llll} (z_1): & X_1=F_1(z_1), & Y_1=G_1(z_1); \\ (z_2): & X_2=F_2(z_2), & Y_2=G_2(z_2); \\ (z_3): & X_3=F_3(z_3), & Y_3=G_3(z_3) \end{array}\right\} \qquad (61)$$

で定義される。また，上記の射影変換 (58) の際に用いた係数a_{11}，a_{12}，a_{13}；a_{21}，a_{22}，a_{23}；a_{31}，a_{32}，a_{33}は，式(59) の条件を満足する以外は他に何らの条件もなく，任意に定めることができるから，これらの係数は，その用途に応じて，便利な図表を得るように適当に定めることができる。

図表の作成，及び，計算法は，§1 に述べたものと全く同様である。

§9 空間への拡張――共面図表の射影変換――

前節の所論を空間に拡張する。

§2 で述べたように，四変数u_1，u_2，u_3，u_4の共面図表において，共面である四点の座標(x_1, y_1, z_1)，(x_2, y_2, z_2)，(x_3, y_3, z_3)，(x_4, y_4, z_4)については，行列式

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad (62)$$

が成立しなければならない。いま，この図表に，射影変換

$$\left.\begin{array}{ll} X_i=\dfrac{a_{11}x_i+a_{12}y_i+a_{13}z_i+a_{14}}{a_{41}x_i+a_{42}y_i+a_{43}z_i+a_{44}}, & Y_i=\dfrac{a_{21}x_i+a_{22}y_i+a_{23}z_i+a_{24}}{a_{41}x_i+a_{42}y_i+a_{43}z_i+a_{44}}, \\ Z_i=\dfrac{a_{31}x_i+a_{32}y_i+a_{33}z_i+a_{34}}{a_{41}x_i+a_{42}y_i+a_{43}z_i+a_{44}}, & i=1,\ 2,\ 3,\ 4 \end{array}\right\} \qquad (63)$$

を施す。但し，

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \neq 0 \qquad (64)$$

とする。このとき，点 (x_i, y_i, z_i)が点(X_i, Y_i, Z_i)に写像されるとすれば，

$$\begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 & 1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 & 1 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 & 1 \\ X_4 & Y_4 & Z_4 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{a_{11}x_1+a_{12}y_1+a_{13}z_1+a_{14}}{a_{41}x_1+a_{42}y_1+a_{43}z_1+a_{44}} & \frac{a_{21}x_1+a_{22}y_1+a_{23}z_1+a_{24}}{a_{41}x_1+a_{42}y_1+a_{43}z_1+a_{44}} & \frac{a_{31}x_1+a_{32}y_1+a_{33}z_1+a_{34}}{a_{41}x_1+a_{42}y_1+a_{43}z_1+a_{44}} & 1 \\ \frac{a_{11}x_2+a_{12}y_2+a_{13}z_2+a_{14}}{a_{41}x_2+a_{42}y_2+a_{43}z_2+a_{44}} & \frac{a_{21}x_2+a_{22}y_2+a_{23}z_2+a_{24}}{a_{41}x_2+a_{42}y_2+a_{43}z_2+a_{44}} & \frac{a_{31}x_2+a_{32}y_2+a_{33}z_2+a_{34}}{a_{41}x_2+a_{42}y_2+a_{43}z_2+a_{44}} & 1 \\ \frac{a_{11}x_3+a_{12}y_3+a_{13}z_3+a_{14}}{a_{41}x_3+a_{42}y_3+a_{43}z_3+a_{44}} & \frac{a_{21}x_3+a_{22}y_3+a_{23}z_3+a_{24}}{a_{41}x_3+a_{42}y_3+a_{43}z_3+a_{44}} & \frac{a_{31}x_3+a_{32}y_3+a_{33}z_3+a_{34}}{a_{41}x_3+a_{42}y_3+a_{43}z_3+a_{44}} & 1 \\ \frac{a_{11}x_4+a_{12}y_4+a_{13}z_4+a_{14}}{a_{41}x_4+a_{42}y_4+a_{43}z_4+a_{44}} & \frac{a_{21}x_4+a_{22}y_4+a_{23}z_4+a_{24}}{a_{41}x_4+a_{42}y_4+a_{43}z_4+a_{44}} & \frac{a_{31}x_4+a_{32}y_4+a_{33}z_4+a_{34}}{a_{41}x_4+a_{42}y_4+a_{43}z_4+a_{44}} & 1 \end{vmatrix}$$

$$=A \begin{vmatrix} a_{11}x_1+a_{12}y_1+a_{13}z_1+a_{14} & a_{21}x_1+a_{22}y_1+a_{23}z_1+a_{24} & a_{31}x_1+a_{32}y_1+a_{33}z_1+a_{34} & a_{41}x_1+a_{42}y_1+a_{43}z_1+a_{44} \\ a_{11}x_2+a_{12}y_2+a_{13}z_2+a_{14} & a_{21}x_2+a_{22}y_2+a_{23}z_2+a_{24} & a_{31}x_2+a_{32}y_2+a_{33}z_2+a_{34} & a_{41}x_2+a_{42}y_2+a_{43}z_2+a_{44} \\ a_{11}x_3+a_{12}y_3+a_{13}z_3+a_{14} & a_{21}x_3+a_{22}y_3+a_{23}z_3+a_{24} & a_{31}x_3+a_{32}y_3+a_{33}z_3+a_{34} & a_{41}x_3+a_{42}y_3+a_{43}z_3+a_{44} \\ a_{11}x_4+a_{12}y_4+a_{13}z_4+a_{14} & a_{21}x_4+a_{22}y_4+a_{23}z_4+a_{24} & a_{31}x_4+a_{32}y_4+a_{33}z_4+a_{34} & a_{41}x_4+a_{42}y_4+a_{43}z_4+a_{44} \end{vmatrix}$$

$$=A \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = 0 \tag{65}$$

を得る。ここに，

$$A = \prod_{i=1}^{4} \frac{1}{a_{41}x_i+a_{42}y_i+a_{43}z_i+a_{44}}$$

である。この式(65)において，最後の行列式は，条件(64)によって0ではないから，式(62)が成立すれば必ず(65)が成立し，逆に，(65)が成立すれば必ず(62)が成立する。即ち，四点(x_1, y_1, z_1)，(x_2, y_2, z_2)，(x_3, y_3, z_3)，(x_4, y_4, z_4)が共面なるとき，この四点に射影変換 (63) を施して得られる四点(X_1, Y_1, Z_1)，(X_2, Y_2, Z_2)，(X_3, Y_3, Z_3)，(X_4, Y_4, Z_4)もまた共面である。

従って，一般に，四変数u_1，u_2，u_3，u_4の方程式

$$\begin{vmatrix} f_1(u_1) & g_1(u_1) & h_1(u_1) & 1 \\ f_2(u_2) & g_2(u_2) & h_2(u_2) & 1 \\ f_3(u_3) & g_3(u_3) & h_3(u_3) & 1 \\ f_4(u_4) & g_4(u_4) & h_4(u_4) & 1 \end{vmatrix} = 0 \tag{66}$$

の共面図表に，射影変換

$$
\begin{aligned}
X_i &= \frac{a_{11}f_i(u_i)+a_{12}g_i(u_i)+a_{13}h_i(u_i)+a_{14}}{a_{41}f_i(u_i)+a_{42}g_i(u_i)+a_{43}h_i(u_i)+a_{44}} = F_i(u_i)\ ;\\
Y_i &= \frac{a_{21}f_i(u_i)+a_{22}g_i(u_i)+a_{23}h_i(u_i)+a_{24}}{a_{41}f_i(u_i)+a_{42}g_i(u_i)+a_{43}h_i(u_i)+a_{44}} = G_i(u_i)\ ;\\
Z_i &= \frac{a_{31}f_i(u_i)+a_{32}g_i(u_i)+a_{33}h_i(u_i)+a_{34}}{a_{41}f_i(u_i)+a_{42}g_i(u_i)+a_{43}h_i(u_i)+a_{44}} = H_i(u_i)\ ;\quad i=1,\ 2,\ 3,\ 4
\end{aligned}
\tag{67}
$$

但し，

$$
\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14}\\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24}\\
a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34}\\
a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44}
\end{vmatrix} \neq 0, \tag{68}
$$

を施せば，

$$
\begin{vmatrix}
F_1(u_1) & G_1(u_1) & H_1(u_1) & 1\\
F_2(u_2) & G_2(u_2) & H_2(u_2) & 1\\
F_3(u_3) & G_3(u_3) & H_3(u_3) & 1\\
F_4(u_4) & G_4(u_4) & H_4(u_4) & 1
\end{vmatrix}
$$

$$
=\begin{vmatrix}
\frac{a_{11}f_1(u_1)+a_{12}g_1(u_1)+a_{13}h_1(u_1)+a_{14}}{a_{41}f_1(u_1)+a_{42}g_1(u_1)+a_{43}h_1(u_1)+a_{44}} & \frac{a_{21}f_1(u_1)+a_{22}g_1(u_1)+a_{23}h_1(u_1)+a_{24}}{a_{41}f_1(u_1)+a_{42}g_1(u_1)+a_{43}h_1(u_1)+a_{44}} & \frac{a_{31}f_1(u_1)+a_{32}g_1(u_1)+a_{33}h_1(u_1)+a_{34}}{a_{41}f_1(u_1)+a_{42}g_1(u_1)+a_{43}h_1(u_1)+a_{44}} & 1\\
\frac{a_{11}f_2(u_2)+a_{12}g_2(u_2)+a_{13}h_2(u_2)+a_{14}}{a_{41}f_2(u_2)+a_{42}g_2(u_2)+a_{43}h_2(u_2)+a_{44}} & \frac{a_{21}f_2(u_2)+a_{22}g_2(u_2)+a_{23}h_2(u_2)+a_{24}}{a_{41}f_2(u_2)+a_{42}g_2(u_2)+a_{43}h_2(u_2)+a_{44}} & \frac{a_{31}f_2(u_2)+a_{32}g_2(u_2)+a_{33}h_2(u_2)+a_{34}}{a_{41}f_2(u_2)+a_{42}g_2(u_2)+a_{43}h_2(u_2)+a_{44}} & 1\\
\frac{a_{11}f_3(u_2)+a_{12}g_3(u_3)+a_{13}h_3(u_3)+a_{14}}{a_{41}f_3(u_3)+a_{42}g_3(u_3)+a_{43}h_3(u_3)+a_{44}} & \frac{a_{21}f_3(u_3)+a_{22}g_3(u_3)+a_{23}h_3(u_3)+a_{24}}{a_{41}f_3(u_3)+a_{42}g_3(u_3)+a_{43}h_3(u_3)+a_{44}} & \frac{a_{31}f_3(u_3)+a_{32}g_3(u_3)+a_{33}h_3(u_3)+a_{34}}{a_{41}f_3(u_3)+a_{42}g_3(u_3)+a_{43}h_3(u_3)+a_{44}} & 1\\
\frac{a_{11}f_4(u_4)+a_{12}g_4(u_4)+a_{13}h_4(u_4)+a_{14}}{a_{41}f_4(u_4)+a_{42}g_4(u_4)+a_{43}h_4(u_4)+a_{44}} & \frac{a_{21}f_4(u_4)+a_{22}g_4(u_4)+a_{23}h_4(u_4)+a_{24}}{a_{41}f_4(u_4)+a_{42}g_4(u_1)+a_{43}h_4(u_4)+a_{44}} & \frac{a_{31}f_4(u_4)+a_{32}g_4(u_4)+a_{33}h_4(u_4)+a_{34}}{a_{41}f_4(u_4)+a_{42}g_4(u_4)+a_{43}h_4(u_4)+a_{44}} & 1
\end{vmatrix}
$$

$$
=A\begin{vmatrix}
a_{11}f_1(u_1)+a_{12}g_1(u_1)+a_{13}h_1(u_1)+a_{14} & a_{21}f_1(u_1)+a_{22}g_1(u_1)+a_{23}h_1(u_1)+a_{24} & a_{31}f_1(u_1)+a_{32}g_1(u_1)+a_{33}h_1(u_1)+a_{34} & a_{41}f_1(u_1)+a_{42}g_1(u_1)+a_{43}h_1(u_1)+a_{44}\\
a_{11}f_2(u_2)+a_{12}g_2(u_2)+a_{13}h_2(u_2)+a_{14} & a_{21}f_2(u_2)+a_{22}g_2(u_2)+a_{23}h_2(u_2)+a_{24} & a_{31}f_2(u_2)+a_{32}g_2(u_2)+a_{33}h_2(u_2)+a_{34} & a_{41}f_2(u_2)+a_{42}g_2(u_2)+a_{43}h_2(u_2)+a_{44}\\
a_{11}f_3(u_3)+a_{12}g_3(u_3)+a_{13}h_3(u_3)+a_{14} & a_{21}f_3(u_3)+a_{22}g_3(u_3)+a_{23}h_3(u_3)+a_{24} & a_{31}f_3(u_3)+a_{32}g_3(u_3)+a_{33}h_3(u_3)+a_{34} & a_{41}f_3(u_3)+a_{42}g_3(u_3)+a_{43}h_3(u_3)+a_{44}\\
a_{11}f_4(u_4)+a_{12}g_4(u_4)+a_{13}h_4(u_4)+a_{14} & a_{21}f_4(u_4)+a_{22}g_4(u_4)+a_{23}h_4(u_4)+a_{24} & a_{31}f_4(u_4)+a_{32}g_4(u_4)+a_{33}h_4(u_4)+a_{34} & a_{41}f_4(u_4)+a_{42}g_4(u_4)+a_{43}h_4(u_4)+a_{44}
\end{vmatrix}
$$

$$
=A\begin{vmatrix}
f_1(u_1) & g_1(u_1) & h_1(u_1) & 1\\
f_2(u_2) & g_2(u_2) & h_2(u_2) & 1\\
f_3(u_3) & g_3(u_3) & h_3(u_3) & 1\\
f_4(u_4) & g_4(u_4) & h_4(u_4) & 1
\end{vmatrix}\times\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14}\\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24}\\
a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34}\\
a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44}
\end{vmatrix}=0 \tag{69}
$$

ここに，　$A=\prod_{i=1}^{4}\dfrac{1}{a_{41}f_i(u_i)+a_{42}g_i(u_i)+a_{43}h_i(u_i)+a_{44}}$，

となり，やはり共面図表が得られる。なお，このとき，四つの曲線u_1，u_2，u_3，u_4は，

$$\left.\begin{array}{llll}(u_1):& X_1=F_1(u_1), & Y_1=G_1(u_1), & Z_1=H_1(u_1);\\(u_2):& X_2=F_2(u_2), & Y_2=G_2(u_2), & Z_2=H_2(u_2);\\(u_3):& X_3=F_3(u_3), & Y_3=G_3(u_3), & Z_3=H_3(u_3);\\(u_4):& X_4=F_4(u_4), & Y_4=G_4(u_4), & Z_4=H_4(u_4)\end{array}\right\} \tag{70}$$

で定義される。また，上記の射影変換(67)の際に用いた係数 a_{11}，a_{12}，a_{13}，a_{14}；a_{21}，a_{22}，a_{23}，a_{24}；a_{31}，a_{32}，a_{33}，a_{34}；a_{41}，a_{42}，a_{43}，a_{44} は，式(68)の条件を満足する以外は他に何らの条件もなく，任意に定めることができるから，これらの係数は，その用途に応じて便利な図表を得るように適当に定めることができる。

図表の作成，及び，計算法は，§2で述べたものと全く同様であって，直角投影法による投影図を利用する。

§10 例6 $M=P\left(1+\dfrac{r}{100}\right)^n$ （その2）

§7において，方程式(46)の共面図表として，付図24及び付図27の両者を作成し，それらの欠点を考察し，その対策について述べた。それによれば，P，M，nについては，一応その欠点を補うことができたが，r についての欠点を補うことができなかった。そこで，本節においては，rの利用を更に便利にすることに重点をおいて，射影変換による考察を進める。

§7によれば，方程式(46)は行列式(50)で表わされ，四直線(51)によって共面図表化された。これらの四直線に対して，次の射影変換を行う。

$$\left.\begin{array}{ll}X_i=\dfrac{20x_i}{-880x_i+27z_i+1080}, & Y_i=\dfrac{200y_i}{-880x_i+27z_i+1080},\\ Z_i=\dfrac{4860z_i}{-880x_i+27z_i+1080}, & i=1,\ 2,\ 3,\ 4\end{array}\right\} \tag{71}$$

ここに，x_i，y_i，z_i は、式(51)における x_i，y_i，z_i を表わす。また、この射影変換(71)における係数の作る行列式

$$\begin{vmatrix}20 & 0 & 0 & 0\\0 & 200 & 0 & 0\\0 & 0 & 4860 & 0\\-880 & 0 & 27 & 1080\end{vmatrix}=20\times200\times4860\times1080\neq0$$

であるから、前節の条件式(68)を満足する。この射影変換(71)によって，式(51)における四直線P，r，n，M は，それぞれ，次のように変換される。

直線 P :　$x_1=1$，　$y_1=\dfrac{1}{\log P}$，　$z_1=0$　であるから，

$$\left.\begin{array}{ll}X_1=\dfrac{20}{-880+1080}=0.1, & Y_1=\dfrac{200\times\dfrac{1}{\log P}}{-880+1080}=\dfrac{1}{\log P}\\ Z_1=0 & \end{array}\right\} \tag{72}$$

直線 r :　$x_2=0$,　$y_2=0$,　$z_2=\dfrac{1}{\log\left(1+\dfrac{r}{100}\right)}$　であるから,

$$\left.\begin{aligned} &X_2=0,\quad Y_2=0,\\ &Z_2=\frac{\dfrac{4860}{\log\left(1+\dfrac{r}{100}\right)}}{\dfrac{27}{\log\left(1+\dfrac{r}{100}\right)}+1080}=\frac{180}{40\log\left(1+\dfrac{r}{100}\right)+1}\end{aligned}\right\}\tag{73}$$

直線 n :　$x_3=\dfrac{n}{n-1}$,　$y_3=0$,　$z_3=0$　であるから,

$$\left.\begin{aligned} &X_3=\frac{\dfrac{20n}{n-1}}{-\dfrac{880n}{n-1}+1080}=\frac{n}{10n-54},\\ &Y_3=0\ ,\quad Z_3=0\end{aligned}\right\}\tag{74}$$

直線 M :　$x_4=1$,　$y_4=\dfrac{1}{\log M}$,　$z_4=\dfrac{1}{\log M}$　であるから,

$$\left.\begin{aligned} &X_4=\frac{20}{-880+\dfrac{27}{\log M}+1080}=\frac{20\log M}{200\log M+27},\\ &Y_4=\frac{\dfrac{200}{\log M}}{200+\dfrac{27}{\log M}}=\frac{200}{200\log M+27}\\ &Z_4=\frac{\dfrac{4860}{\log M}}{200+\dfrac{27}{\log M}}=\frac{4860}{200\log M+27}\end{aligned}\right\}\tag{75}$$

これらの四直線の位置は，付図28の見取図に示される通りで，これらの直線上に，上式に従って，それぞれ，目盛P, r, n, Mをつける。図中の直線lは，後述するように，計算のための補助直線であるが，これには目盛をつけるを要しない。

P, n, rが与えられたときMを求めるには，三直線P, n, r 上に，それぞれ，目盛(P), (n), (r)なる三点をとり，この三点を通る平面と直線 M との交点に付されている目盛(M)を読めば，求める元利合計Mを得る。

付図29は，直角投影法による付図28 の投影図である。P, n, r が与えられてMを求めるには次のようにすればよい。先ず，直線n（側面図）及び直線r上に，それぞれ，目盛(n), (r)なる二点をとり，この二点を結ぶ直線（番号1の直線）と補助線 l との交点から基線に平行線（番号2の直線）を引き，z 軸との交点をとる（この点を A とする）。次に，直線n（平面図）及び直線P上に，それぞれ，目盛(n), (P)なる二点をとり，この二点を結ぶ直線（番号3の直線）と直線M（平面図）との交点から基線に垂線（番号4の直線）を下し，その足と，さきの点Aとを結ぶ直線（番号5の直線）と直線M（立面図）との交点に付されている目盛（M）を読めば，このMが求める元利合計である。図中に付した番号は，計算するための手順を示したものであるが，この順序を変更すると，次のような逆計算も行うことができる。

M, P, nを与えてrを求める計算　　番号3，4，5，2，1の順に行う。

M, r, nを与えてPを求める計算　番号1，2，5，4，3の順に行う。
また，P, M, rを与えてnを求める計算では，上のように直接には求められない。しかし，nは連続量ではないから，適当なnについて試みれば，nを得ることができる。

以上の計算では，前の例のように，平行線を作図する必要はない。平行線は，理論的には美しいものであるが，実用上はさほど便利なものではない。その代りに，平面図，立面図，側面図の三つを，共に必要とするが，これは，例えば，側面図を，z軸を軸として回転移動し，立面図に一致させるようにすれば，紙面を節約することができる。

付図30は，これらを考慮して作成された，実際に用いるための，式(46)の計算図である。補助直線は，直線rの両側に一つずつあるが，これは，4以下のnについては左の補助線を，5以上のnについては右の補助線を用いる。また，補助図表は，P, Mの比例計算に用いるためのもで，目的，作成，使用法については，§7における付図27の場合と全く同一である。図中の実線の例は，

$$P=15000\ ,\quad r=5.0\ ,\quad n=6$$

を与えて，

$$M=20000$$

を求める計算を示し，あるいは

$$P=70000\ ,\quad r=5.0\ ,\quad n=6$$

が与えられたとき，先ず，補助図表によって，

$$P'=15000$$

とし，前と同様に，

$$M'=20000$$

を求め，再び補助図表によって，

$$M=94000$$

を求める計算を示したものである。また，点線の例は，

$$P=20000\ ,\quad r=8.0\ ,\quad n=4$$

を与えて，

$$M=27000$$

を得る計算を示している。

以上，共面図表の原理と利用について，数種の例によって論述した。いろいろと誤りや不備な点もあろうと思われるので，御指導を頂ければ幸である。

最後に，文献の提供その他，いろいろな助言をいただいた，金沢大学工学部助教授理学博士守田勝彦先生に深甚の謝意を表する。

参 考 文 献

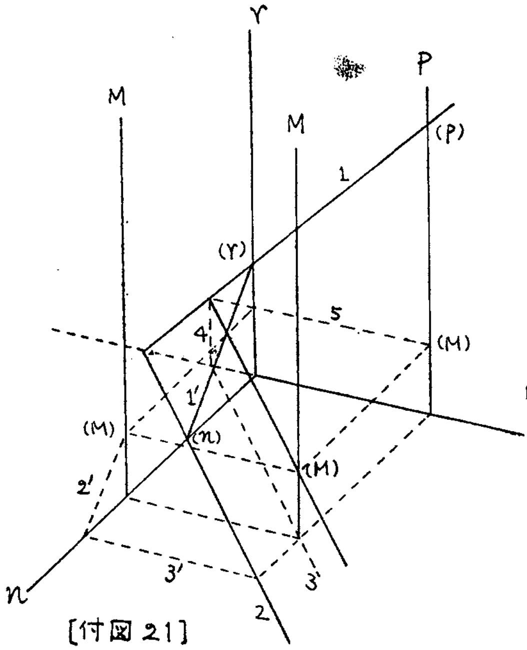
1 Josef Sutor ; Stereonomogramme, Mitteilungen der Deutchen Gesellschaft für Photogrammetrie, Jan. 1940, Ht. 4, S. 158—171. (航空文献集 No.11=立体計算図表，大日本航空株式会社航測所刊，昭和17年)

2 Douglas P. Adams ; Three Dimensional Nomograms. (Presented to the American Society for Engineering Education, Drawing Division, Winter Session, held at Univ. of Pennsylvania, Philadelphia, Pennsylvania, Jan. 1954)

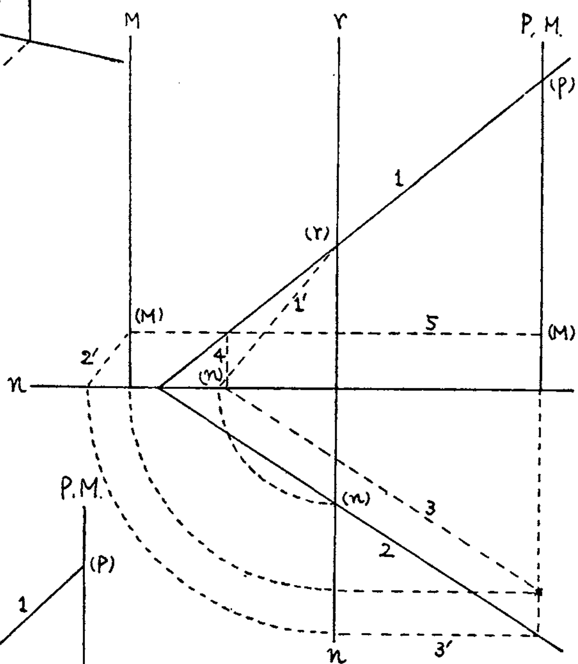
3 小倉金之助：計算図表（岩波全書），岩波書店，昭和23年，144—148ページ。

4 谷村豊太郎：計算図表学，丸善出版株式会社，昭和23年，140—143ページ。

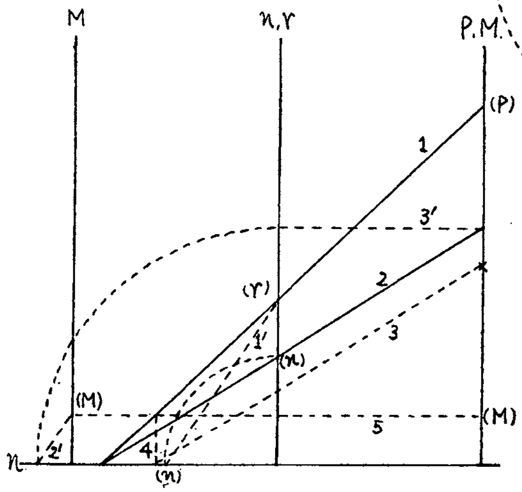
5 渡辺義勝：計算図表学（佐々木，志賀：計算機械と共に，応用数学第10巻），河出書房，昭和22年，191—194ページ，221—228ページ，243—252ページ。



[付図 21]

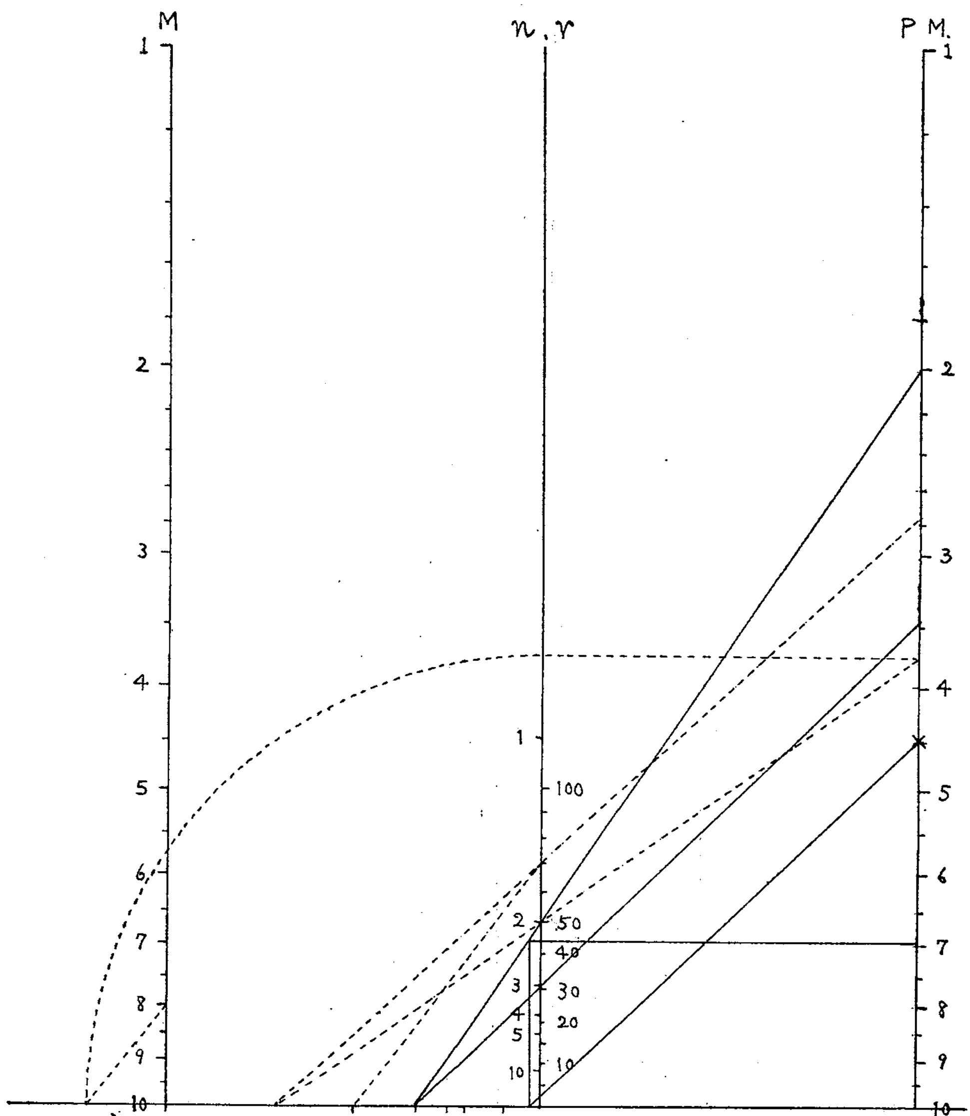


[付図 22]

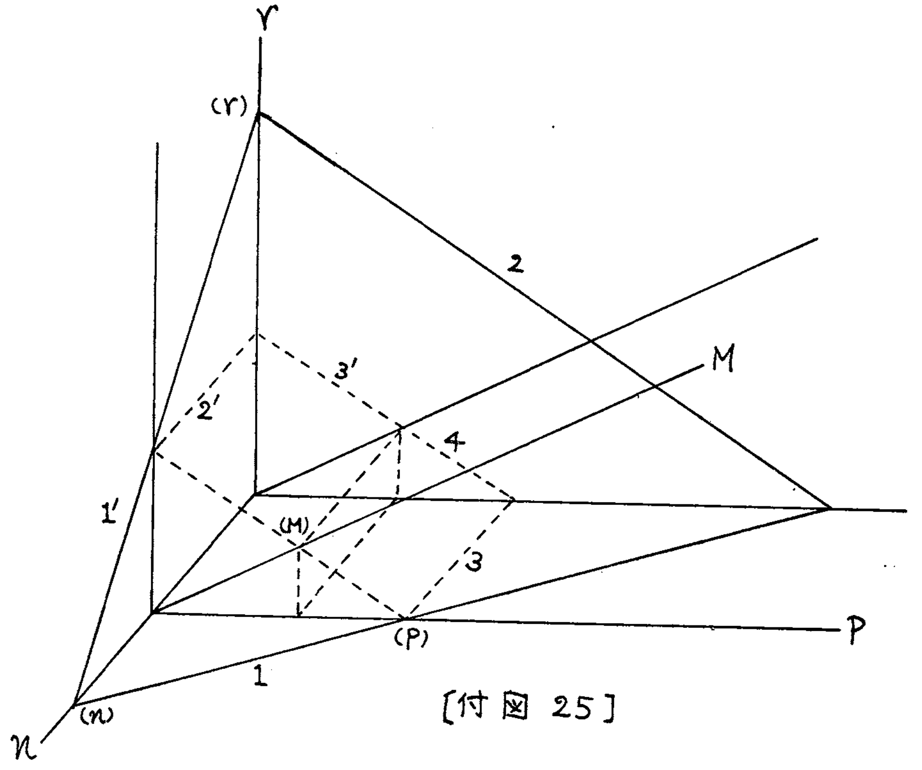


[付図 23]

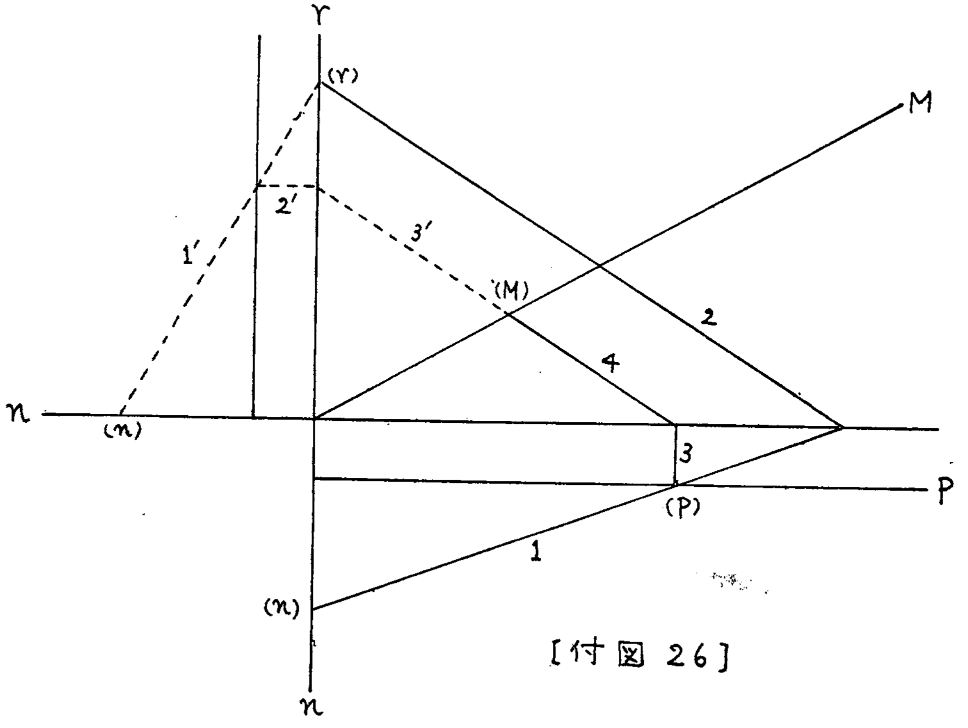
$$M = P\left(1 + \frac{r}{100}\right)^n$$



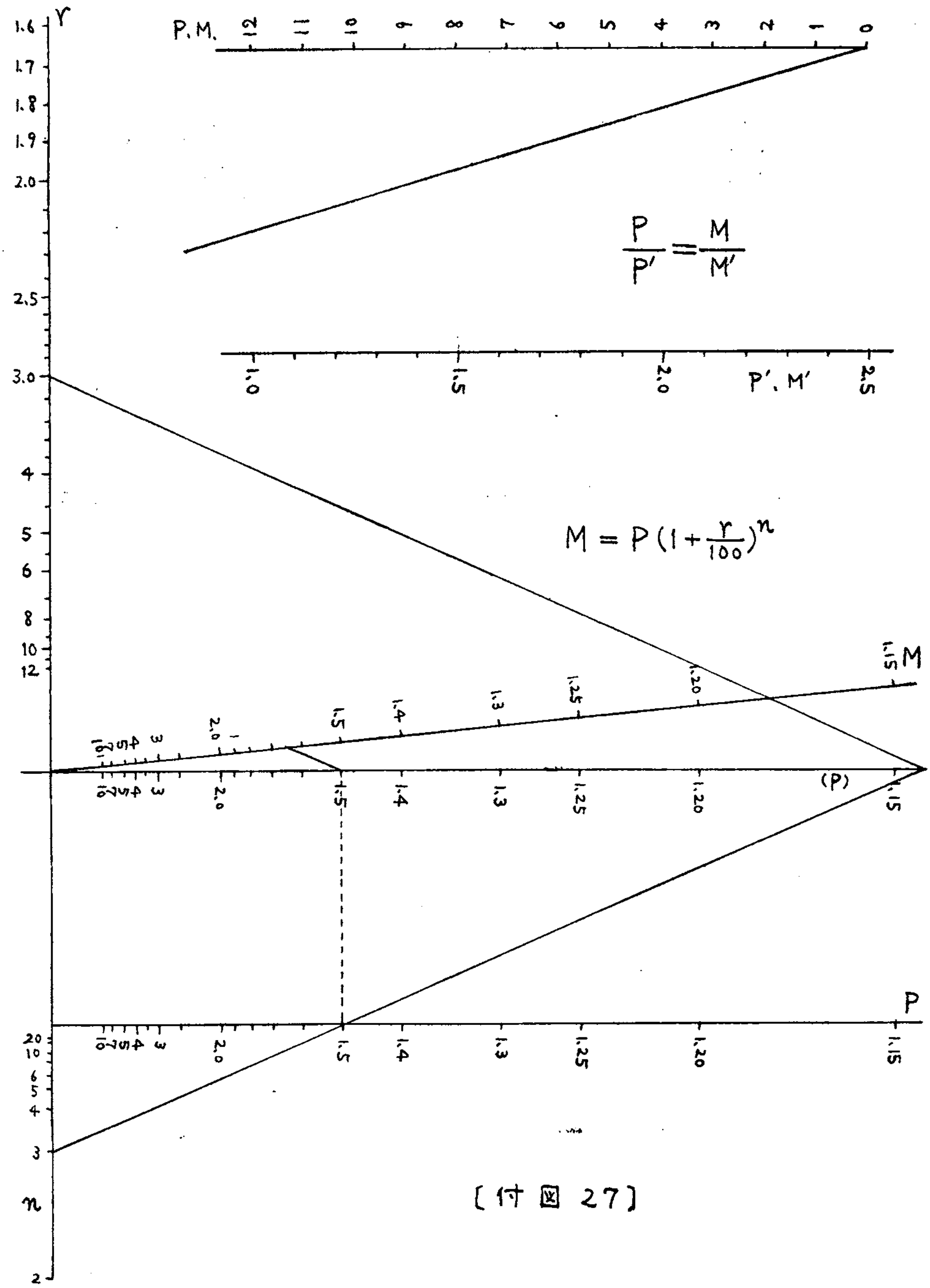
［付図 24］



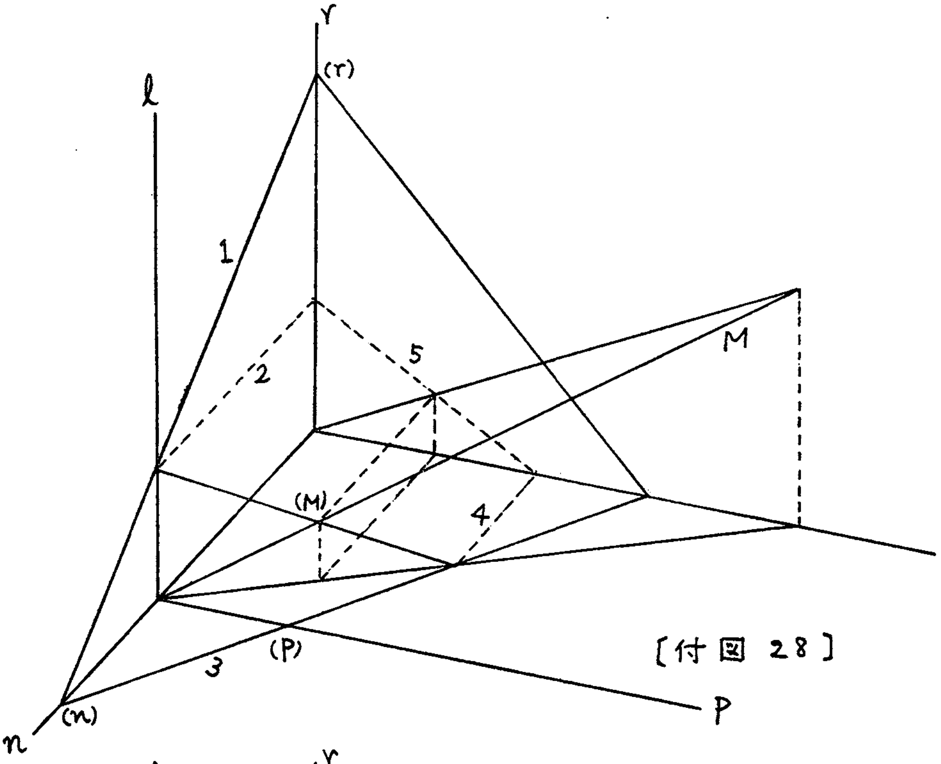
[付図 25]



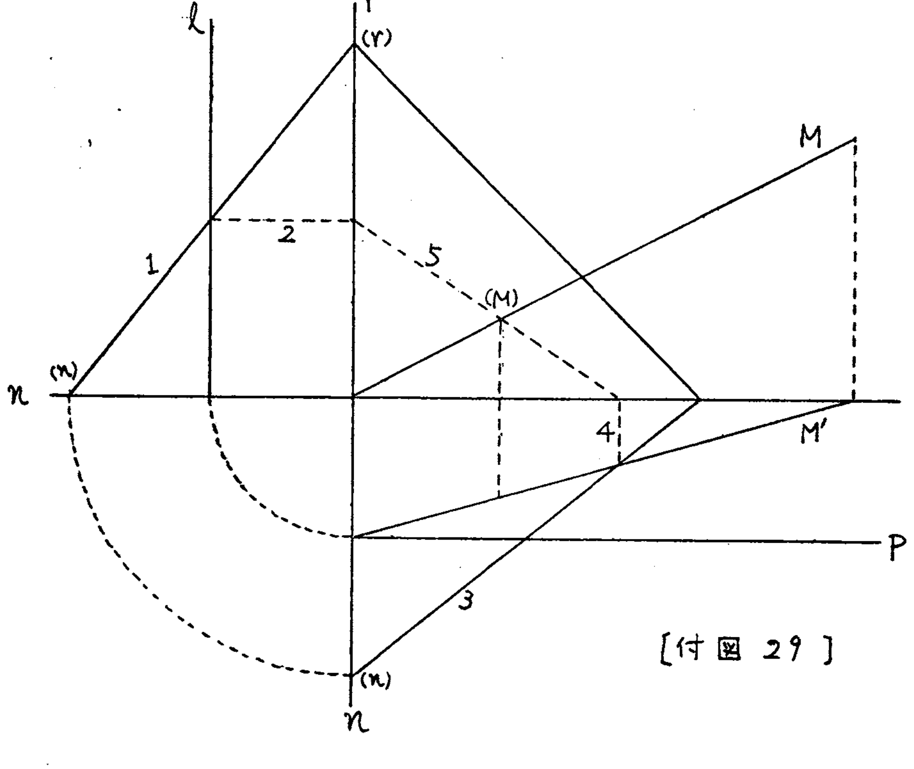
[付図 26]



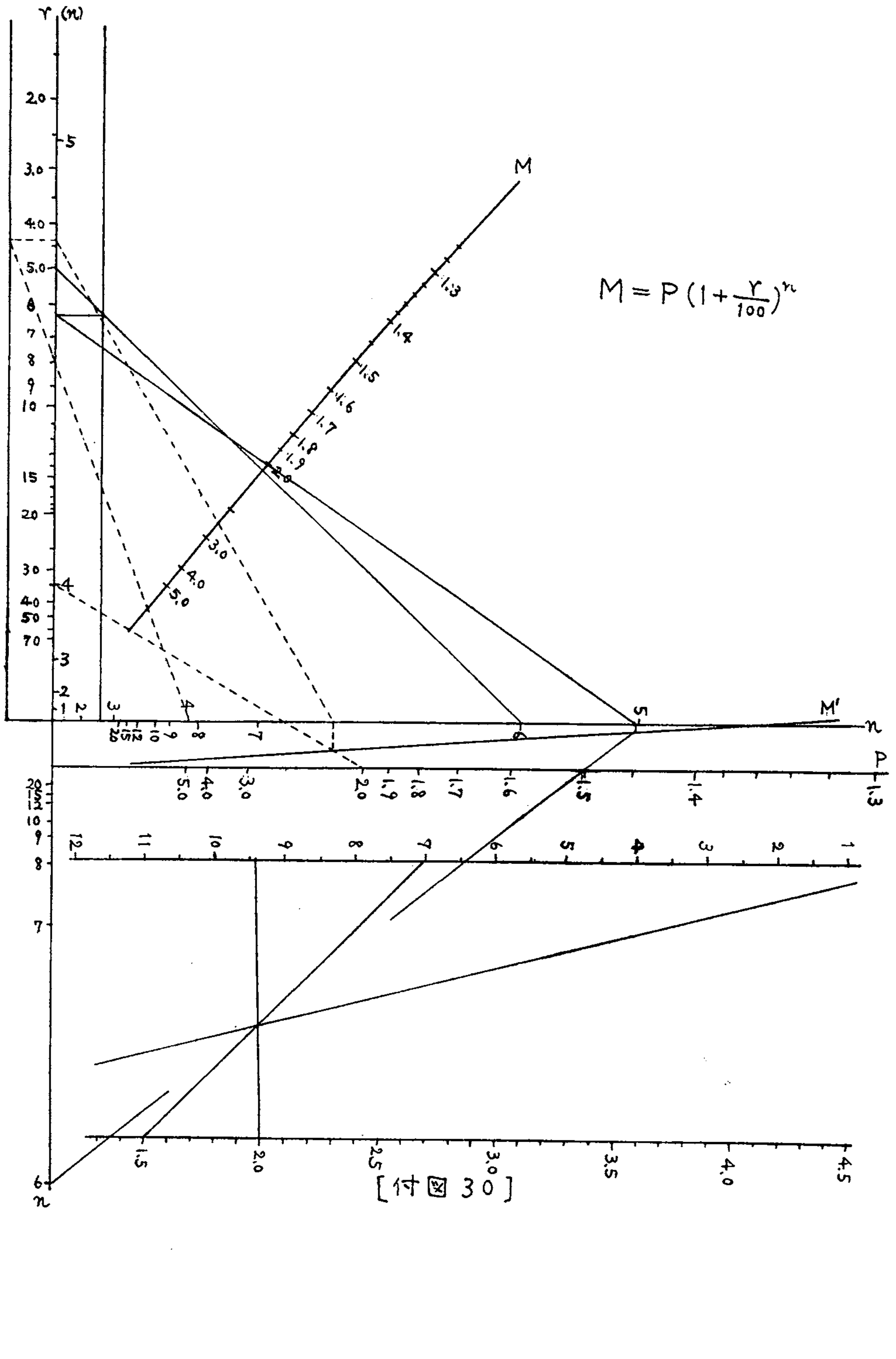
〔付図 27〕



[付図 28]



[付図 29]



［付図３０］