三角形解法についての一問題点

出 石　隆　米 谷 数 子
能 崎 克 己

〔一〕 序

数学Ⅰ幾何の三角函数の項において，数値を与えて三角形を解く必要が起る。しかしこの数値計算が時には非常に繁雑であるため，とかく計算そのものよりも理論的な計算方法に重点がおかれがちである。実際，生徒に時間中に板書させても，限られた時間内では僅かしか指導できず，又宿題として課する場合でも，主として用いた方法と計算結果に重点がおかれて途中の計算内容は案外等閑に付され勝ちである。ここで二辺と夾角が与えられて三角形を解く問題をとりあげて考察してみたい。

(問題)　$\triangle ABC$ において $b=18$㎝，$c=12$㎝，$A=35°$ のとき a 及び $\angle B$，$\angle C$ を求めよ。

一般的な解法は，正接法則 $\tan\dfrac{B-C}{2}=\dfrac{b-c}{b+c}\cot\dfrac{A}{2}$ を用いて B，C を求め，更に

$$a=\frac{(b+c)\sin\dfrac{A}{2}}{\cos\dfrac{B-C}{2}}$$

によって a を求めるのであるが，正接法則は三角函数の加法定理を利用して導かれ，加法定理以後は数学Ⅱに入っている現在の指導要領によればこれは使用できない。数学Ⅰ幾何のほとんどの教科書が例題にとりあげ，それに与えている解法は次のようなものである。先づ余弦法則 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$ を用いて a を求め，更に正弦法則 $\sin B=\dfrac{b\sin A}{a}$ を用い数表によって B を求める。（実はこの例題では先づ C を求めた方がよいが）最後に 180° から $A+B$ を引いて C を求めている。しかし，ここで今一度同じ手続を繰返し $\sin C=\dfrac{c\sin A}{a}$ によって C を求めてみると大抵の場合さきに求めた C と一致することは殆んどなく，いくらかの誤差を生ずる。即ち正弦法則からそれぞれ B，C を計算して $A+B+C$ を求めると 180°にならないのが普通である。私共はこの原因を数表を用いたときの誤差と考えて深く追求しないで過ぎて来たが，果して数表の利用によるものであろうか。ということをこの例題について検討してみた。

前記の問題は数種類の教科書の例題にあげられている数値の記数法と同じ型式のものである。そこでこの与えられた数値から問題を解くに当ってこの数値を次のように解釈した。数表を利用する場合，生徒の教科書に載っているのは四桁の三角函数表で 6′刻み或は12′，30′刻み等あるが，比例部分の表を利用すれば一応は分の位の角まで読みとれる。一方辺の長さとして与えられた数値は12㎝，18㎝でこれを有効数字二桁の測定値とすると，その誤差は非常に大きくなり，数表を用いて分の位まで角を求めること等，殆んど無意味になる。そこでこの数値は，一応誤差を含まない数値と考えて計算による誤差を考えてみた。

〔二〕 誤差はどこから生ずるか

今この例題について a の値を三通りの数値で出して，同一の数表を用い計算の誤差をしらべてみたら次のようになった。

(例)　AB＝12cm　AC＝18cm　∠A＝35°

（解1）

$$a^2 = 18^2 + 12^2 - 2 \times 18 \times 12 \times \mathrm{cas}35^\circ$$

$$= 468 - 432 \times 0.8192$$

$$= 114.1056 \qquad (\pm 0.03)$$

$$\left\{ \frac{1}{2} \times \frac{1}{10^4} \times 432 < 0.03 \right.$$

$$a = 10.6 \qquad (\pm 0.1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} f(x) = \sqrt{x} \\ f(x) \vartriangle x = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \vartriangle x = \dfrac{1}{2 \times 10.6} \times 0.03 \\ \qquad < 0.002 \\ a = 10.682\cdots\cdots \\ \therefore \quad 0.002 + \underset{\text{切捨の誤差}}{\underset{\downarrow}{0.08\cdots\cdots}} < 0.1 \end{array} \right.$$

$$\sin B = \frac{\sin A}{10.6} \times 18$$

$$= \frac{0.5736}{10.6} \times 18$$

$$= 0.9740 \qquad (\pm 0.01)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \left| \dfrac{\vartriangle(\sin B)}{\sin B} \right| \leqq \dfrac{\vartriangle(10.6)}{10.6} + \dfrac{\vartriangle(0.5736)}{0.5736} \\ \qquad < 0.0095 + 0.0001 < 0.01 \\ |\vartriangle(\sin B)| < 0.9740 \times 0.01 < 0.01 \end{array} \right.$$

$$B = 103^\circ 5' \qquad C = 40^\circ 30'$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 0.9640 < \sin \quad B < 0.9840 \\ 105^\circ 25' > \quad B > 100^\circ 15' \end{array} \right.$$

（解2）

$$a^2 = 114.1056 \qquad (\pm 0.03)$$

$$a = 10.68 \qquad (\pm 0.005)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a = 10.682\cdots\cdots \\ 0.002 + 0.002\cdots\cdots < 0.005 \end{array} \right.$$

$$\sin B = \frac{0.5736}{10.68} \times 18$$

$$= 0.9667 \qquad (\pm 0.0006)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \left| \dfrac{\vartriangle(\sin B)}{\sin B} \right| \leqq \dfrac{\vartriangle(10.68)}{10.68} + \dfrac{\vartriangle(0.5736)}{0.5736} \\ \qquad < 0.0005 + 0.0001 \quad < 0.0006 \\ |\vartriangle(\sin B)| < 0.9667 \times 0.0006 \\ < 0.0006 \end{array} \right.$$

$$B = 104^\circ 49' \qquad C = 40^\circ 7'$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 0.9661 < \sin \quad B < 0.9673 \\ 104^\circ 58' > \quad B > 104^\circ 4' \end{array} \right.$$

（解3）

$$a^2 = 114.1056 \qquad (\pm 0.03)$$

$$a = 10.7 \qquad (\pm 0.03)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a = 10{,}682\cdots\cdots \\ 0.002 + \underset{\text{四捨五入の誤差}}{\underset{\downarrow}{0.02}} < 0.03 \end{array} \right.$$

$$\sin B = \frac{0.5736}{10.7} \times 18$$

$$= 0.9649 \qquad (\pm 0.004)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \left| \dfrac{\vartriangle(\sin B)}{\sin B} \right| \leqq \dfrac{\vartriangle(10.7)}{10.7} + \dfrac{\vartriangle(0.5736)}{0.5736} \\ \qquad < 0.003 + 0.0001 < 0.004 \\ |\vartriangle(\sin B)| < 0.9649 \times 0.004 < 0.004 \end{array} \right.$$

$$B = 105^\circ 13' \qquad C = 40^\circ 2'$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 0.9609 < \sin \quad B < 0.9689 \\ 106^\circ 4' > \quad B > 104^\circ 19' \end{array} \right.$$

解1）では a を求めるとき，小数二位以下を切捨てたもの，解2）では小数三位を四捨五入し解3）では小数二位以下を四捨五入して切上ったものである。四桁の三角函数表から得た cos35° の数値 0.8192 は小数第五位を四捨五入した数値であるから末位の半単位即ち $\frac{1}{2}\times\frac{1}{10^4}$ 以内の誤差とみなせる。従ってこれを開いて a を求めるのに 10.6 まで求めて後を切捨てた場合は誤差の限界が凡そ 0.1 である。この誤差は殆んど a を切捨てたためのものであることがわかる。この a を用いて B を計算すると $\sin B=0.9740$ となり，これについてくる誤差の限界は 0.01 であり一方 $\sin C=0.6494$ となり $C=40°30'$ を求められるから B の範囲は $105°25'>B>100°15'$ となる。この場合の $A+B+C$ は $178°35'$ である。

解2）では $a=10.68$ に対して同様に得た誤差の限界は 0.005 であるからこれを用いた場合は上記のように B の値もより正確になってくるこの場合の $A+B+C$ は $179°56'$ である。

解3）についても同様に 10.7 ± 0.03 には a を四捨五入した誤差が大きく影響していることがわかる。この場合では $A+B+C$ は $180°15'$ である。更に念のために，七桁の三角函数表の数値 $\cos35°=0.8191520$, $\sin35°=0.5735764$ を用い，

$a=10.6829$ として計算してみたら $B=104°53' C=40°7'$ を得た。

以上の結果からみると，解2）の方法が最も誤差が少いことがわかるが，このように誤差の出る理由は，数表の誤差よりもむしろ a を計算するときの処理の仕方に大きく左右されることが推察される。実際に a の長さとしては $a=10.6$ でも 10.7 でも大きい問題ではないが，この値を用いて角を求める途中の計算には大きく影響することになる。なお，$a^2=114.1056\pm0.03$ 代のりに $a^2=114.1\pm0.04$ として a を求めても $a=10.68\pm0.004$ が得られる。故に四桁の対数表を利用して対数計算によって a を求めるなら自然と $a=10.68$ を利用することになるから有効数字の桁数が揃って無駄な計算がなくなり解決されることになる。

これらの誤差計算は三角形の解法が従来のように解析IIに含まれているときは，生徒自身の力でも可能であったが，現在数学Iとして取扱う場合に誤差を伴う数値の計算はどのように指導したらよいかということも大きな問題であろうと思う。

〔三〕 数学I幾何における指導

ここで先づ中学校の数学ではどのように指導されているかをみると，誤差の計算では「正しさ」「くわしさ」という用語のもとに，乗除計算は有効数字の桁数を揃えて用いるということを計算例から経験的に把握する方法で指導されている。それでこの例題についても例えば $\sin B=\dfrac{b\sin A}{a}$ で $\sin A=0.5736$ と有効数字四桁の数値を用いる以上，a も 10.68を用いるべきでしょう。又 a^2 も 114.1 でも $a=10.68$ を得る。従って前にも述べたように対数計算を利用すれば，この点についても無駄なく解決されるわけである。そのためにはこの項を学習する時は代数で対数計算を既習してそれを活用するようにしたい。この点に留意して対数計算による解法を例題にかかげている教科書は殆んど見当らない。近似値の

近似値の計算は中学校での学習についで高校の数学Iにおいても等閑にふすことのできない重要な問題となっている。そこで数学IIIで微分の応用として近似式及び誤差の問題を学習するに先だって数学Iにおいても代数で不等式を学習する際に，不等式の性質を用いて次のような程度のことは考えられよう。

不等式の基本性質，正の数 A, B, C, D について，

$$A<B,\ C<D \text{ ならば } A+C<B+D$$
$$A-D<B-C$$

$$AC<BD$$
$$\frac{A}{D}<\frac{B}{C}$$

を利用して $\cos 35°=0.8192$ に対しては

$0.81915 \leqq \cos 35° < 0.81925$

$114.0840 < a^2 \leqq 114.1272$

$10.67 < a < 10.69$

$0.9657 < \sin B < 0.9678$

$104°34' < B < 105°3'$ は導かれる

又，更に一般的に不等式の性質から近似値の積や商の相対誤差の限界がそれぞれの近似値の相対誤差の限界に等しいこと等も導かれるから，そのような指導を早く数学Iにおいてしてこれを実際に活用するようにした方が有意義ではないかと思う。

〔現行教科書における取扱い方法〕

そこで現在使用されている教科書がこれをどのように扱っているか手許にあった12種類の教科書の例題について検討してみた結果は次のようであった。

(1) 数値計算を全然あげていないもの，又は $\sin 30°$ のように誤差を含まない数値をとっているもの……4

(2) 有効数字の桁数を考えていないもの……7

(3) 有効数字の桁数を揃えて計算しているもの……1

であり，前述のように正弦法則を二度繰返しそれぞれ B, Cを求めているものは皆無である。以上の教科書にあげられている例題について，その解答の数値を使って前の例題と同様に二角を正弦法則で求めて $A+B+C$ を求めて見たら，(3)のものでは $179°59'$ となり僅小の誤差に止まった。(2)では，それぞれ180°からいくらかの誤差が見られ，これらは有効数字を揃えて計算してみると更に小さく僅か $1'$，$2''$ 程度の誤差に止めることができた。これらは教科書に解答を明示してある例題について試みたので，練習問題などのうちには，誤差の大きいものもあろうと思われる。

〔四〕 測定値とみなした場合の誤差

前記の問題に対して与えられた数値12㎝，18㎝35°等を測定値と考えた場合は，前に考えた計算による誤差の他に測定値の誤差も考慮しなければならなくなる。しかし，これを有効数字二桁の測定値とみなすと余りに誤差が大きくなるので，仮に(1.20×10)㎝，(1.80×10)㎝，$(3.50\times10)°$とし，即ち(12.0 ± 0.05)㎝，(18.0 ± 0.05)㎝，$35.0°\pm0.05°$ $(35.0°\pm3')$として計算してみる。

$a^2=18^2+12^2-2\times18.12\times0.8192=114.1056$ についてくる誤差の限界を公式通り $1.9+1.2+2.7 \fallingdotseq 5.8<6$ とすると $a=10.6(\pm0.3)$ から $|\sin B|<0.9740\times0.3<0.3$ となり $0.6740<\sin B\leqq 1$ から

$42°23'<B\leqq 90°$ 又は $90°\leqq B<127°37'$ となり余りに大きな誤差となる。形式的には上のような範囲と考えてよいが，実際は a^2 の誤差はもう少し小さくなる。何故ならこの問題では a^2 の式の第三項目は負になるから誤差は消し合って，実際は上記のような誤差よりは小さくなる。そこで実際の誤差の限界がどれ程になるかを次のように考えてみた。

12㎝，18㎝の測定誤差 x㎝ $(x>0)$ とするとき，a^2 の誤差を$f(x)$とすると

$f_1(x)=(12+x)^2+(18+x)^2-2(12+x)(18+x)\cos35^\circ$

$-(12^2+18^2-2\times12\times18\cos35^\circ)=2(1-\cos35^\circ)(x^2+30x)$

$f_2(x)=(12-x)^2+(18+x)^2-2(12-x)(18+x)\cos35^\circ$

$-(12^2+18^2-2\times12\times18\cos35^\circ)=2(1+\cos35^\circ)(x^2+6x)$

$f_3(x)=(12+x)^2+(18-x)^2-2(12+x)(18-x)\cos35^\circ$

$-(12^2+18^2-2\times12\cdot18\cdot\cos35^\circ)=2(1+\cos35^\circ)(x^2-6x)$

$f_4(x)=(12-x)^2+(18-x)^2-2(12-x)(18-x)\cos35^\circ$

$-(12^2+18^2-2\times12\cdot18\cdot\cos35^\circ)$

$=2(1-\cos35^\circ)(x^2-30x)$

この中の $|f(x)|$ 最大値が a^2 の誤差の限界と考えて差しつかえがない。

この中の $|f_k(x)|$ の最大値が a^2 の誤差の限界と考えて差しつかえがない。

$o\leqq x\leqq0.05$ より $f_1(x)>0$, $f_2(x)>0$, $f_3(x)<0$, $f_4(x)<0$ $|f_1(x)|-|f_2(x)|=f_1(x)-f_2(x)=24(2-3\cos35^\circ)x-4x^2\cos35^\circ<0$

$(\because\ 2-3\cos35^\circ<0)$

$\therefore\ |f_1(x)|<|f_2(x)|$

$|f_2(x)|-|f_3(x)|=2(1+\cos35^\circ)(x^2+6x)-2(1+\cos35^\circ)(6x-x^2)=4x^2(1+\cos35^\circ)>o$

$\therefore\ |f_2(x)|>|f_3(x)|$

又, $|f_2(x)|-|f_4(x)|=2(1+\cos35^\circ)(x^2+6x)-2(1-\cos35^\circ)(30x-x^2)$

$=4\{x^2+6(3\cos35^\circ-2)x\}>0$

$\therefore|f_2(x)|>|f_4(x)|$

即ち, $f_2(x)$ が最大になることがわかるから更に $f_2(x)$ の最大値を考える。

$f'_2(x)=2(1+\cos35^\circ)(2x+6)>o$ より $f_2(x)$は

単調増加函数後 x の最大値 0.05 のとき最大値をとる。

即ち, $f_2(0.05)=2(1+\cos35^\circ)(0.05^2+0.05\times6)$

$35^\circ\pm3'$ $\quad\cos35^\circ3'=0.81865$

$\cos34^\circ57'=0.81965$ より

$f_2(0.05)\fallingdotseq2\times(1+0.82)\times0.3\fallingdotseq1.092<1.1$

即ち $|\triangle a^2|<1.1$ とみなせるから。

$|\triangle a|\fallingdotseq\dfrac{1.1}{2\times10.6}\fallingdotseq0.05$

$\therefore\ a=10.7$ を利用するとすると

10.7 ± 0.05

$$\therefore\left|\frac{\triangle(\sin B)}{\sin B}\right|\leqq\frac{\triangle(0.5736)}{0.5736}+\frac{\triangle(10.7)}{10.7}+\frac{\triangle(18.0)}{18.0}$$

$$<\frac{0.0001}{0.5736}+\frac{0.05}{10.7}+\frac{0.05}{18.0}$$

$$<0.0001+0.0047+0.0028=0.0076$$

$\therefore\ \sin B=0.9649\pm0.0076$

$0.9573<\sin B<0.9725$

$106^\circ48'>B>103^\circ27'$

の範囲にBの値があることとなる。

〔五〕 調査による考察

前記の例題を，そのまま生徒に与えた場合実際に生徒はどのような種類の解答を実際にするかをみるために次のような調査をしてみた。

◇三角形解法についての問題解答調査◇

(一) 調査年月日 34年10月14日（水）
34年10月19日（月）

調査対象 本校2年A組生徒 49人
同 2年C組生徒 51人
計100人

所要時間 約 40分

(二) 出題型式 「$\triangle ABC$ において $AB=12$cm, $AC=18$cm, $\angle A=35°$ のとき BC及び$\angle B$, $\angle C$の大きさを次の順序で求めよ。

(1) $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$ を利用して a の長さを求めよ。

(2) $\sin B=\dfrac{b\sin A}{a}$ を利用して B を求めよ。

(3) $\sin C=\dfrac{c\sin A}{a}$ を利用して Cを求めよ。

(4) 計算結果より得た $A+B+C$ の大きさを求めよ。」

各自に三角函数表（6′刻み4桁の数表，且つ比例部分の表付）

(三) 解答種類別人数

1. a の 値

		A組	C組	計
①	10.6	6	9	15
②	10.68	25	25	50
③	10.7	2	6	8
④	その他	16	11	27
	計	49	51	100(人)

3. C の 値

		A組	C組	計
①	40°30′	7	10	17
②	40°7′	19	15	34
③	40°2′	4	10	14
④	その他	19	16	35
	計	49	51	100

2. B の 値

		A組	C組	計
①	103°5′	3	3	6
②	104°49′	14	15	29
③	105°13′	2	12	14
④	75°11′	20	15	35
⑤	その他	10	6	16
	計	49	51	100

4. A＋B＋Cの値

		A組	C組	計
①	178°35′	3	4	7
②	179°56′	11	12	23
③	180°15′	7	11	18
④	150°18′	19	16	35
⑤	その他	9	8	17
	計	49	51	100

（ただし，B，C及びA＋B＋Cの値に対しては±2′程度の誤差あるものも許容して人数に含めた）

結果は予測通り種々の解答が出たのであるが，aに対して10.68をとったものは50%はあった。対数計算をしてもよいと指示したのであったが，対数計算でしたものは5%に止まった。aの値の表中のその他の人数27人の中の13人は11cmと二桁の数値を出していた。

$A+B+C$の値の人数は，B, Cの値のそれぞれの項目の人数と必ずしも一致していない。$\pm 2'$程度の誤差を許容した人数であり，B, Cそれぞれに多少誤差があって，しかも和としては大体該当する数値の出た者等もあったためである。又，$\angle B$が鋭角の数値を出したものが35%もあったことからこの問題を通してその指導の仕方にも見逃せない留意点のあることを再確認したわけである。この例題では$\angle B$を仮に鋭角の数値 $75°11'$ で出したとしても最大角になり，又三角形の概形をかいても（分度器を使用して正確にかけば別であるが）直に鈍角三角形とは摑みにくい例の一つのようである。従って，はじめから鋭角であることが定まっているCの方を先づ求めて，$180°-(C+A)$より$B>90°$を予めたしかめておいて後，Bの数値を求めるように指導したい。尤もこの場合，更に余弦法則を利用してBを出せば$\cos B$が負の数値になることから明らかになるが，加減算法が入るし正弦法則を用いる場合は乗除計算のみであるため対数計算その他計算尺や計算器を利用するにも便利である点等から考えてこの方法を利用するのが妥当であろうと思う。

〔六〕 結　論

以上の考察の結果は，三角形解法の問題の中の一断面であって，更に広い角度からの研究調査が残されているわけであるが，以上の私共の研究から得た結論をまとめてみると，三角形解法等のように近似値を含む計算を伴うものでは，先づ問題の与え方において，もっと統一ある明確なものとしてゆきたい。即ち測定値であるならその有効数字を明示する記数法を使用したい，計算をする場合に用いた近似値の中の最も大きい相対誤差を含むものに影響されるから一応有効数字を揃えて行うことが大切であることを指導したい。

又，三角形の解法で四桁程度の数表を使う場合二角を得て180°から減じて残りの角を出す場合には危険性があること等であり，以上の点について特に留意しているとみなせる教科書は現行のものでは既述のように殆んど見当らないことを強調したい。又現在のように三角形解法が数学Ⅰでまとめられているために二辺夾角を与えられた場合の解法が実際問題に活用する場合とは異なり単に理論的なものになって，直に実社会において役立つものからは縁遠くなりがちであることは遺憾に思う。