Renyi-Gal の不等式の拡張について

本　部　　　均
出　石　　　隆

概　　要

Oval の面積を A，内接円の半径を ρ，幅 $m\rho$ $(0 \leqq m < 1)$ の internal parallel curve の長さを $P\ (m\rho)$ とするとき

$\frac{1}{2} \leqq m < 1$ ならば

$$A \leqq \frac{\rho}{2(1-m)} P(m\rho)$$ である。

$0 \leqq m < \frac{1}{2}$ ならば

このままでは成立しないが両辺の差を評価することができる。

また，Gal の方法によって

$$\frac{\rho}{2} P \leqq A$$

を証明する。

参　考　文　献

Integral formulae in the theory of Convex curves
By Alfred Renyi in Budapest. (1946)

A theorem on convex curves.
By I. S. Gal in Budapest. (1946)

F. Riesz ; Sur les functions subharmonicques
et leur rapport a la theorie du pontentiel, II. Acta Math. (1930)

(Lemma　1)

多角形 $AB \cdots\cdots EF \cdots\cdots$ が円 0 の外部にあって相隣る二つの接点のはさむ弧が半円より小なるときは，少くとも相つらなる三辺に接する一つの傍接円で半径が円 0 の半径より小なるものが存在する。

（証明） AB と EF の交わりを S とする。円 0 をはじめの位置とし，中心を OS をたどらせ最初の辺 AB と最後の辺 EF とに接する円を考え，はじめて $BC \cdots\cdots E$ の辺に接するときを考える。この円は明らかに円 0 より小さい。たとえばその接点を G とし G が CD 上にあれば，つぎに AB と DC との交点を S' とする。円 O' の中心 O' を $O'S$ 上をたどらせる。かようにして最後に傍接円はえられるがこの円の半径は明らかに円 0 の半径より小さい。

(Lemma　2)

convex な多角形の相つらなる三辺に接する傍接円の最小な円 0 を考える。すべての辺は必ずその円の外部にある。

(証明) 多角形 LMN……の傍接円 0 が最小とし，これに交わる辺があるとし，その N から最初のものを XY とすれば X は円の外にある。XY に平行に $X'Y'$ を円の接線にとる。そのときは (Lemma　1) より LMN…… $X'Y'$ の最小の傍接円は円 0 の半径より小である。従って LMN……XY の最小の傍接円の半径は円 0 より小，これは円 0 が最小の傍接円であることに矛盾する。

(注意 1)

相隣る三辺に接する傍接円の半径が $r \leqq m\rho$ なるときは辺 PQ を頂点 R にまでのばした多角形を考える。そうすると面積 A は増加するが $\frac{\rho}{2(1-m)}P(m\rho)$ には変化なし。故に

$$\Phi = \frac{\rho}{2(1-m)}P(m\rho) - A$$

とおけば Φ は減少する。

従ってどこにおいても $r \leqq m\rho$ のところはない。即ち常に $r > m\rho$ と考える。

【I】 $\frac{1}{2} \leqq m < 1$ の場合

(注意 1) より多角形のどこにおいても $r > m\rho$ としておく。

(Lemma　3)

convex な多角形…… $BCDE$ ……が辺 BC と DE をそれらが O で出合うまで延長することによって増加されるなら Φ は増加しない。

(即ち Φ は変化しないか又は減少する。)

(証明)　$\triangle P(m\rho) = C'0' + 0'D' - C'D'$

$$\triangle A = (C0 + 0D - CD) \times \frac{r}{2}$$

$$C0 + 0D - CD = \frac{r}{r - m\rho}(C'0' + 0'D' - C'D')$$

$$\therefore \quad \triangle A = \frac{r^2}{2(r - m\rho)}\triangle P(m\rho)$$

従って

$$\triangle \Phi = \frac{\rho}{2(1-m)}\triangle P(m\rho) - \triangle A$$

$$= \left[\frac{\rho}{2(1-m)} - \frac{r^2}{2(r-m\rho)}\right]\triangle P(m\rho)$$

$$= \frac{\triangle P(m\rho)}{2(1-m)(r-m\rho)}\left[\rho(r-m\rho) - (1-m)r^2\right]$$

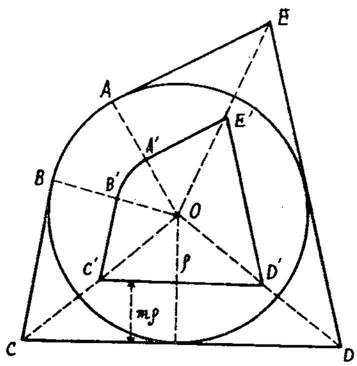
$$= -\frac{\triangle P(m\rho)}{2(r-m\rho)}(\rho - r)\left(\frac{m}{1-m}\rho - r\right)$$

しかして $1 > m \geqq \frac{1}{2}$ なる故 $\frac{m}{1-m} \geqq 1$

故に $\rho\geqq r$ なるときは $\triangle\Phi\leqq 0$ である。

しかして（Lemma 1）より convex な多角形と内接円の二つの接点のはさむ弧が半円より小なら $\rho\geqq r$ なるごとき傍接円は必ず存在する。よって $\triangle\Phi\leqq 0$ なり。即ち Φ は増加しない。

順次（Lemma 3）の如くして最後に convex な図形は左図の如くになる。今辺 $BCDEA$ の長さを P_1, それに対応する parallel curve の長さを $P_1(m\rho)$ とし，$\overset{\frown}{AB}$ の長さを P_2, それに対応する。parallel curve の長さを $P_2(m\rho)$ とす。



第1図

（円弧の部分があるのは一般の convex curves に対してである。）$OBCDEA$ の面積を A_1 とし，扇形 OAB の面積を A_2 とす。

$$P_1(m\rho)=(1-m)P_1,\quad P_2(m\rho)=(1-m)P_2$$

$$\therefore\quad \frac{\rho}{2(1-m)}P_1(m\rho)=\frac{1}{2}\rho P_1,\qquad \frac{\rho}{2(1-m)}P_2(m\rho)=\frac{1}{2}\rho P_2$$

又 $A_1=\frac{1}{2}\rho P_1,\qquad A_2=\frac{1}{2}\rho P_2$

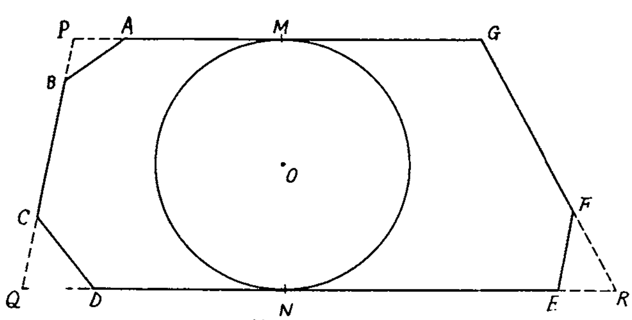
依って $A=\frac{\rho}{2(1-m)}P(m\rho)$

以上より $\Phi=\frac{\rho}{2(1-m)}P(m\rho)-A$

はもとの多角形に対しては正である。

即ち $A\leqq\frac{\rho}{2(1-m)}P(m\rho)$

次に相隣る接点の間が半円に等しい場合を考えよう。



第2図

内接円を左に動かし最初に接する辺たとえば BC とし右に動かし最初に接する辺をたとえば GF とすれば，BC と AG 及び DE の交点をそれぞれ P, Q, GF と DE の交点を R としておけば $ABCD$ …… の代りに $GPQR$……とするときに Φ は（Lemma 3）より増加しない。

更に $PQ//XY$, $GR//\sqcup Z$ にとると

$\triangle A=-2\rho\times QY \qquad \triangle P(m\rho)=-2QY$

$\therefore \triangle\Phi=\frac{\rho}{2(1-m)}\triangle P(m\rho)-\triangle A$

$=\frac{-2\rho}{2(1-m)}QY+2\rho\times QY$

$=-2\rho\times QY\left(\frac{1}{2(1-m)}-1\right)$

しかして$\frac{1}{2}\leqq m<1$ なるとき $\frac{1}{2(1-m)}-1\geqq 0$

$\therefore \quad \triangle\Phi\leqq 0$

しかして，多角形 $\times YZ$⊔は前の場合に証明した如く $\Phi=0$

故に，かかる場合においても

$$A\leqq\frac{\rho}{2(1-m)}P(m\rho)$$

勿論，一般の convex curves に対して $PQRG$ の一部が円弧である図形においても同じである。

【II】 $0\leqq m<\frac{1}{2}$ の場合

（注意1）より多角形のどこにおいても

$r>m\rho$ としておく。

(Lemma 4)

PQ 辺の internal parallel curve を pq 辺とす。PQ 辺に平行に距離 μ なる $P'Q'$ を PQ におきかえるとする。従って pq は平行にやはり距離 μ で $p'q'$ となる。μ は外側が正とする。

そのとき

$\frac{\rho}{2(1-m)}>r$ ならば $r=\frac{\rho}{2(1-m)}$ になるまで μ をだんだん増し（0から正へ）その間で Φ は減少する。

$\frac{\rho}{2(1-m)}>r$ ならば $r=\frac{\rho}{2(1-m)}$ になるまで μ をだんだん減じ（0から負へ）その間で Φ は減少する。

（証明）

$\triangle tpq$ の高さをhとす $\qquad \triangle P(m\rho)=(pt+qt-pq)\times\frac{\mu}{h}$

$\triangle A=PQ\times\mu-\frac{1}{2}pq\times\frac{\mu}{h}\times\mu \qquad PQ=pq\times\frac{r}{r-m\rho}$

$\therefore \triangle A=pq\times\frac{r}{r-m\rho}\times\mu-\frac{\mu^2}{2h}\times pq \qquad \therefore \triangle\Phi=\triangle\left[\frac{\rho}{2(1-m)}P(m\rho)-A\right]$

$=\frac{\rho}{2(1-m)}(pt+qt-pq)\times\frac{\mu}{h}-pq\times\frac{r}{r-m\rho}\times\mu+\frac{\mu^2}{2h}\times pq$

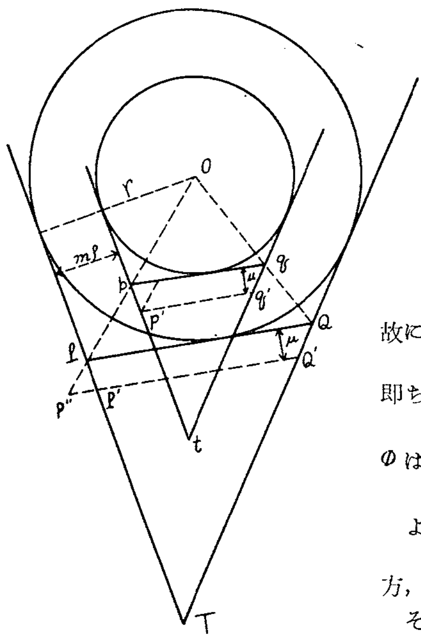
一方　$(pt+qt-pq)(r-m\rho)=pq\times h$

よって

$$\Delta\Phi=\frac{\rho}{2(1-m)}\times\frac{pq}{r-m\rho}\times\mu-\frac{pq}{r-m\rho}\times r\mu+\frac{\mu^2}{2h}\times pq$$

$$=\frac{pq}{r-m\rho}\left(\frac{\rho}{2(1-m)}-r\right)\mu+\frac{\mu^2}{2h}\times pq$$

$$=\mu\times\frac{pq}{r-m\rho}\left[\left(\frac{\rho}{2(1-m)}-r\right)+\frac{r-m\rho}{2h}\mu\right]\quad\cdots\cdots(1)$$



第 3 図

故に $\mu>0$, $\left(\frac{\rho}{2(1-m)}-r\right)+\frac{r-m\rho}{2h}\mu\leqq 0$ …………… (2)

即ち $\mu\leqq\frac{2h}{r-m\rho}\left(r-\frac{\rho}{2(1-m)}\right)$ なる μ の範囲では

Φ は増加しない。（$r>\frac{\rho}{2(1-m)}$ のとき）

よって勿論 $\mu=\frac{h}{r-m\rho}\left(r-\frac{\rho}{2(1-m)}\right)$ なる μ だけ正の方，即ち外側に移動して Φ は減少する。

そのときに r はどれだけの大きさかを見よう。その大きさを r_1 とす。

$$\frac{r_1}{r}=\frac{P'Q'}{PQ}=\frac{P''Q'-P''P'}{PQ}=\frac{PQ-\frac{\mu}{h}\times pq}{PQ}$$

$$=1-\frac{\frac{\mu}{h}\times pq}{pq\times\frac{r}{r-m\rho}}\qquad=1-\frac{\mu(\mu-m\rho)}{hr}$$

$$\therefore\quad r_1=r-\frac{\mu(\mu-m\rho)}{h}$$

$$=r-\left(r-\frac{\rho}{2(1-m)}\right)=\frac{\rho}{2(1-m)}$$

よって $r>\frac{\rho}{2(1-m)}$ のときは $r=\frac{\rho}{2(1-m)}$ まで μ を増し，そのときに Φ は減少する。

他方(1)よりまた $r<\frac{\rho}{2(1-m)}$ のときは

$\mu<0$, $\left(\frac{\rho}{2(1-m)}-r\right)+\frac{r-m\rho}{2h}\mu\geqq 0$……(3)

即ち $\mu\geqq\frac{2h}{r-m\rho}\left(r-\frac{\rho}{2(1-m)}\right)$ なる μ の範囲で Φ は増加しない。

上を全く同様にして

$\mu=\frac{h}{r-m\rho}\left(r-\frac{\rho}{2(1-m)}\right)$ なる μ だけ負の方

即ち内側に移動したときの r の値は $\frac{\rho}{2(1-m)}$ である。即ち $r<\frac{\rho}{2(1-m)}$ のとき

$r=\dfrac{\rho}{2(1-m)}$ まで μ を減じ，そのとき Φ は減少する。

なお，何れの場合においても $r=\dfrac{\rho}{2(1-m)}$ に達する如何なる r の位置においても Φ は減少している事は μ が(2)，(3)の範囲にある事よりして明らかなり。

i) $\dfrac{\rho}{2(1-m)}>r$ なるとき

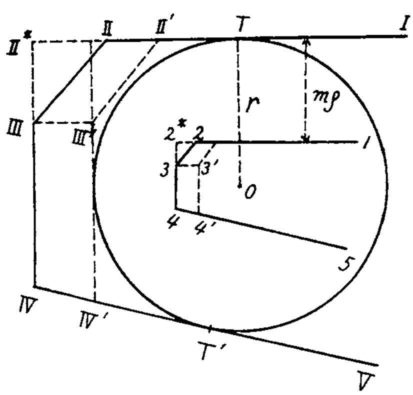
(Lemma 5)

$\dfrac{\rho}{2(1-m)}\geqq r$ なる r をもつ円が二辺に接し，二辺のなす角領域の間で他の辺が円の外部につらなってあるとする。従って勿論二接点 TT' の間の角領域内の円弧は半円より小であるとする。図において二辺 I II，IV V に半径 r の円が接している。

I II III IV が curve，

1 2 3 4 5 が parallel curve

I II 辺に平行に II III IV 辺を μ だけずらす，μ を負の方向に減少させ，たとえば III′IV′ が円に接したら更に同様なことを残りの辺について行う。かくして全部の辺が円に接するように平行にずらす。そのとき Φ は減少する。



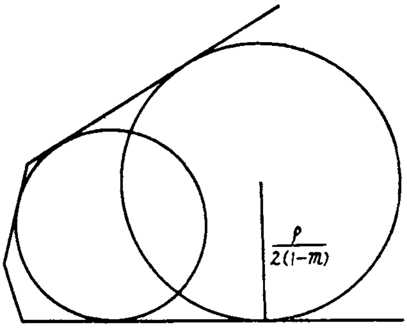
第 4 図

(証明) 面積の変化をみるには最後の辺 III IV の III の延長上にのばし，II III IVの代りに II* III IVとしたときに同様な方法をとったときの面積の変化と同じである。また internal parallel curve の変化も△4 6 7で見られるから（∵ 6 4′ − 4 6 − 4 4′）2* 3 4のときと同様。そうするとこれは（Lemma 4）の場合と同じである。（ただし μ は前の μ ではない。前の μ は III IV と III′IV′ の幅，故に前の μ と今度の μ の比は III IV の方向できまる)。何故なら I II* IV V の傍接円は（Lemma 1）より円0より小さい。故に勿論その半径は $\dfrac{\rho}{2(1-m)}$ より小である。よって（Lemma 4）が使用できる。II′III′IV′ の一辺が円に接するまで $|\mu|$ を大きくとれる。この操作で Φ は減少する。III′IV′ が円に接したら更に同様な事を残りの辺について行う。ついに全部の辺が円に接するように平行にずらされ，その間 Φ は減少する。今とりあつかったのは角領域の間に二辺しかなかったが，いくらあっても問題は同じである，ただ上の操作をくりかえすのみである。

さて以上の Lemma をつかって次の事をなす。両端の辺は半径 ρ の円に接し，間の辺はこの円の外にあり，どの隣る三辺の傍接円の半径も $m\rho$ より大とす。この半径の最小のものを考える。それは $\dfrac{\rho}{2(1-m)}$ より小とする。この円は（Lemma 2）より多角形の内

部にある。（勿論両端の接点の間の円弧は半円より小としておく。）

そこでこの円が接する両端の辺に沿ってこの円を次第に大きくする。そして半径 $\frac{\rho}{2(1-m)}$ にたっするまで大きくする。もし半径 $\frac{\rho}{2(1-m)}$ にたっする前に他の辺に接したら，そのときの円が接する両端の辺に沿って，またこの円を次第に大きくする。かかる操作によりついに半径 $\frac{\rho}{2(1-m)}$ の円になる。そのとき（Lemma 5）の方法で相つらなる辺の円に接するようにする。また残りの傍接円のうち半径が $\frac{\rho}{2(1-m)}$ より小なるものがあればその最小のものより同じ操作を行う。



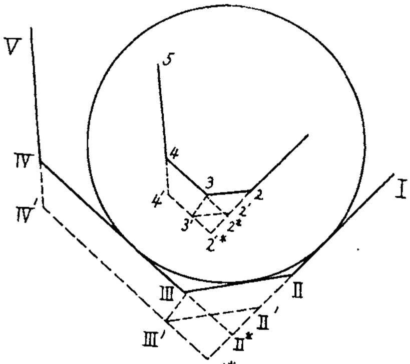
第 5 図

かくして，最後に得られた多角形はすべての傍接円の半径が $\frac{\rho}{2(1-m)}$ より小でないものにたっする。

ii) $\frac{\rho}{2(1-m)} \leqq r$ なるとき

（Lemma 6）

半径 $r \geqq \frac{\rho}{2(1-m)}$ の円が相隣る少くとも三辺に接し，最後の辺が円外にあり，最初の辺と最後の辺との角領域に他の辺が入っているとする。図においてⅠⅡ，ⅡⅢ，ⅢⅣは円に接している。ⅣⅤは円の外にある。このときparallel curveは 1 2 3 4 5，そこでⅠⅡに平行に辺をずらし parallel curve もしたがって平行にずらす。すなわちⅠⅡ′Ⅲ′Ⅳ′Ⅴ及び 1 2′3′4′5 とする。しかもⅠⅡ′，Ⅱ′Ⅲ′，Ⅲ′Ⅳ′，Ⅳ′Ⅴ に接する円 r' がもとの円の半径 r に等しいままで平行に辺をずらすなら，この操作により Φ は減少する。



第 6 図

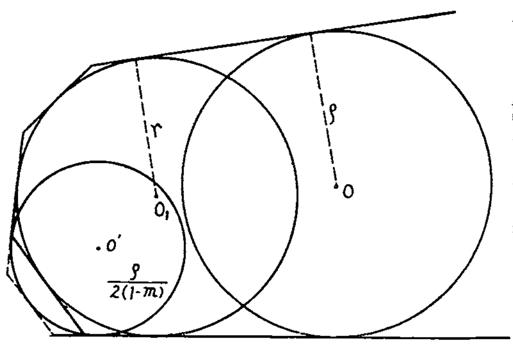
（証明）（Lemma 5）とまったく同様で面積の変化はⅣⅢを延長し，ⅠⅡとの交点をⅡ*としたときと同じである。また parallel curve の長さの変化も同様に図の如し。ⅠⅡ*ⅣⅤの傍接円は r より大，したがって $\frac{\rho}{2(1-m)}$ より大。またⅠⅡ′*Ⅳ′Ⅴの傍接円はもとの円の半径 $r \geqq \frac{\rho}{2(1-m)}$ である。よって（Lemma 4）よりⅡ*ⅣをⅡ′*Ⅳ′に

まで平行にずらせばそのとき Φ は減少する。

傍接円の半径の minimum r が $\geqq \frac{\rho}{2(1-m)}$ なるとき，その minimum な円から (Lemma 6) の操作を行う。この操作の間，円の半径は変らない。最後にすべての辺が半径が $\geqq \frac{\rho}{2(1-m)}$ なる円 0_1 に接する場合となるであろう。(勿論はじめのminimumは (Lemma 1) よりして ρ より小である。)

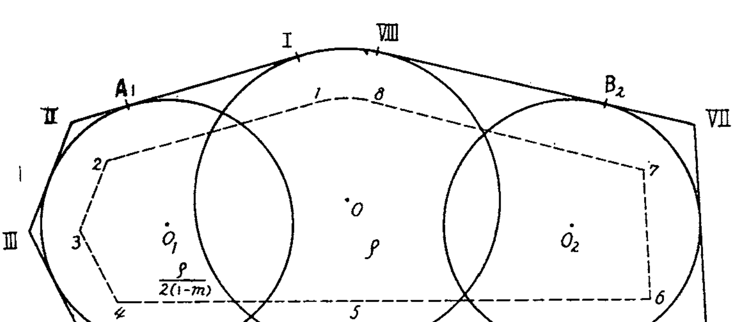
(Lemma 7)

半径 r が $\frac{\rho}{2(1-m)} < r < \rho$ なる円 0_1 を円 0 と反対の方向に（勿論，今までの論と同様に $\overrightarrow{\text{Ⅰ Ⅱ}}$, $\overrightarrow{\text{Ⅳ Ⅴ}}$ はそれらの方向において交わるとしておく）$\overline{\text{Ⅰ Ⅱ}}$, $\overline{\text{Ⅳ Ⅴ}}$ に接しながら $r=\frac{\rho}{2(1-m)}$ なる位置にもってくる。そしてⅡⅢ，ⅢⅣ，ⅣⅤは平行にその円に接するようにずらす。そのとき Φ は減少する。



第 7 図

(証明) ⅡⅢ，ⅢⅣ，ⅣⅤのうち，たとえばⅣⅤを平行に外側にずらせⅢⅣ'Ⅴ'Ⅳ の傍接円の半径が $\frac{\rho}{2(1-m)}$ なる位置をⅣ'Ⅴ' とす。(Lemma 4) よりこの操作で Φ は減少す。このとき円 0' はⅠⅡ，ⅡⅢ には接してない。(Lemma 6) の操作でこの円を半径を変えずにⅡⅢ に接するところまで移動する。更にそれをⅠⅡ に接するまで移動する。この操作で (Lemma 6) より Φ は減少す。多角形の辺は各々の辺に平行に円に接している事は (Lemma 6) の操作と同じ。よって命題は成立す。



第 8 図

さて最後に到達した図形は上の如し。多角形をⅠⅡ……Ⅶとし ⅧⅠ の間は円 0 の弧とか

さなる。多角形が curve のときはⅧⅠの如く接点の間が円弧になるかもしれない。また ⅣⅤⅥ は一直線になっているがこれは必ずしもならない。また上図では半径 $\frac{\rho}{2(1-m)}$ なる二個の円にすべての辺が接しているが二個以上になることもある。然し以下の証明は同じ様にできる。parallel curve を 1 2 3 …… 8 とす。

$0_1A_1 \perp$ ⅠⅡ, $0_1B_1 \perp$ ⅣⅤ, $0_2A_2 \perp$ ⅤⅥ, $0_2B_2 \perp$ ⅦⅧ

なる垂線を下し，図の如くその交点を A_1, B_1, A_2, B_2 とす。多角形を次の部分に分つ。

(イ) A_1Ⅱ…ⅣB_1 及び A_2ⅥⅦB_2 の長さを P_1, それに対応する $P(m\rho)$ を $P_1(m\rho)$ とす。

(ロ) ⅠA_1, B_1Ⅴ 及び ⅤA_2, B_2Ⅷ の長さを P_2, それに対応する $P(m\rho)$ を $P_2(m\rho)$ とす。

(ハ) $\overset{\frown}{\text{ⅧⅠ}}$（または円 ρ への二接線）の長さを P_3, それに対応す $P(m\rho)$ を $P_3(m\rho)$ とす。

上の如く分け弧の長さの和をそれぞれ上の如く P_1, P_2, P_3とす。

面積については

(イ) 0_1A_1Ⅱ……ⅣB_10_1; 0_2A_2……B_20_2 の面積を A_1

(ロ) 0ⅠA_10_10; 00_1B_1Ⅴ0; 0ⅤA_20_20; 00_2B_2Ⅷ0 の面積を A_2

(ハ) 扇形Ⅰ0Ⅷ（または円 ρ への二接線の部分）の面積を A_3

の部分に分け面積の和を上の如くそれぞれ A_1, A_2, A_3 とす。

$$P_1(m\rho)=P_1\times\frac{r-m\rho}{r}$$

$$P_2(m\rho)=P_2$$

$$P_3(m\rho)=P_3\times\frac{\rho-m\rho}{\rho}=(1-m)P_3$$

$$\therefore P(m\rho)=\frac{r-m\rho}{r}P_1+P_2+(1-m)P_3$$

しかして $\frac{r-m\rho}{r}=\left(\frac{1}{2(1-m)}-m\right)\Big/\frac{1}{2(1-m)}=1-2m+2m^2$

$$\therefore P(m\rho)=(1-2m+2m^2)P_1+P_2+(1-m)P_3$$

$$A_1=\frac{1}{2}rP_1=\frac{1}{4(1-m)}\rho P_1$$

$$A_2=P_2\times r+P_2\times(\rho-r)\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}(\rho+r)P_2=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2(1-m)}\right)\rho P_2$$

$$A_3=\frac{1}{2}\rho P_3$$

$$\therefore A=\left[\frac{1}{4(1-m)}P_1+\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2(1-m)}\right)P_2+\frac{1}{2}P_3\right]\rho$$

よって

$$\Phi=\frac{\rho}{2(1-m)}P(m\rho)-A$$

$$=\frac{\rho(1-2m+2m^2)}{2(1-m)}P_1+\frac{\rho}{2(1-m)}P_2+\frac{\rho}{2}P_3-\left[\frac{1}{4(1-m)}P_1+\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2(1-m)}\right)P_2+\frac{1}{2}P_3\right]\rho$$

$$\therefore\ \frac{\Phi}{\rho}=\left[\frac{1-2m+m^2}{2(1-m)}-\frac{1}{4(1-m)}\right]P_1+\left[\frac{1}{2(1-m)}-\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2(1-m)}\right)\right]P_2$$

$$=\frac{1-4m+4m^2}{4(1-m)}P_1+\left[\frac{2}{4(1-m)}-\frac{1}{4(1-m)}-\frac{2(1-m)}{4(1-m)}\right]P_2$$

$$\therefore\ \Phi\frac{4(1-m)}{\rho}=\left[1-4m\ (1-m)\right]P_1-(1-2m)P_2$$

$$=(1-2m)^2P_1-(1-2m)P_2$$

円弧で接する部分（または円 ρ への二接線の部分）の中心角の和を θ とすれば

$$P_1\geqq(2\pi-\theta)\,r=(2\pi-\theta)\frac{\rho}{2(1-m)}$$

多角形の相隣る接点の中心でのはる角を $\theta_1\cdots\cdots\theta_n$（この図では $n=2$）とするとき

$$P_2=(\rho-r)\sum_i 2\tan\frac{\theta_i}{2}\qquad\left(\theta+\sum_i\theta_i=2\pi\right)$$

$$=\frac{1-2m}{1-m}\sum_i\tan\frac{\theta_i}{2}\rho$$

$$\therefore\ \Phi\frac{4(1-m)}{\rho}\geqq(2\pi-\theta)\frac{(1-2m)^2}{2(1-m)}\rho-\frac{(1-2m)^2}{1-m}\sum_i\tan\frac{\theta_i}{2}\rho$$

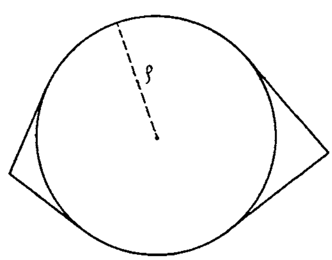
よって

$$\Phi=\frac{\rho}{2(1-m)}P(m\rho)-A\geqq\frac{(1-2m)^2}{8(1-m)}\left\{(2\pi-\theta)-2\sum_i\tan\frac{\theta_i}{2}\right\}\rho^2$$

Φ が減少していって，最後にこの不等式が成立するのであるから，勿論もとの図形においてもこの不等式は成立する。

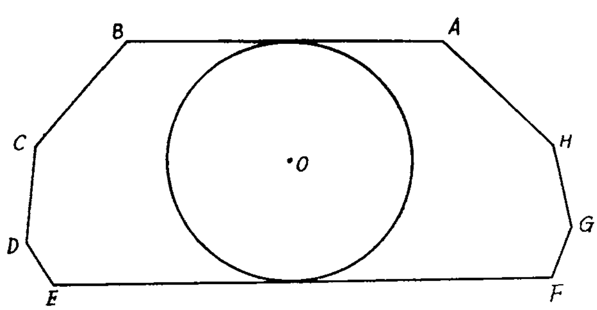
等号の成立する図形は明らかで

$2\pi=\theta$，即ち $\theta_i=0$ のときである。



第 9 図

さて，次に相隣る接点の間が半円に等しい場合を考えよう。

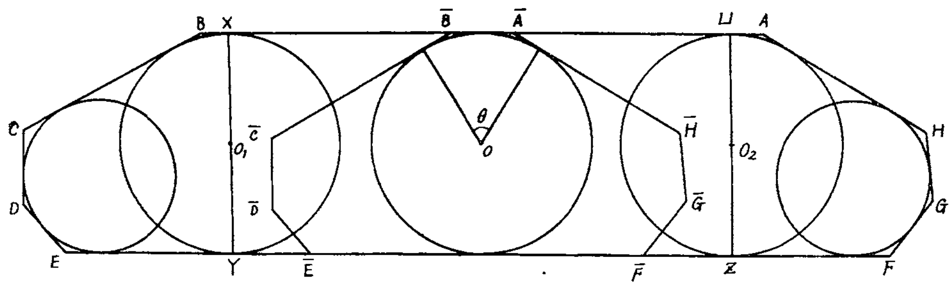


第 10 図

(イ) 上図において円 0 を左に動かすとき AB または EF に相隣る BC または DE で最初に接する場合。また右側に動かすとき AB または EF に相隣る HA または FG で最初に接する場合。

このような場合にはいままでに証明したことにより BC, FE に接して半径 $\dfrac{\rho}{2(1-m)}$ なる円に左のすべての辺を接するように平行にずらすことができる。右側においても同様なり。

さらに各辺に平行に下図の如く多角形 $\bar{A}\ \bar{B}\ \bar{C}\ \bar{D}\ \bar{E}\ \bar{F}\ \bar{G}\ \bar{H}$ を作ると，その多角形においてはΦは全く前の評価の式が成立する筈である。



第　11　図

従って，そのとき $\triangle\Phi$ は長方形 XYZ⊔ においての差である。

X⊔$=a$ とおけば

$$\triangle P(m\rho) = 2a, \qquad \triangle A = -2\rho a$$

$$\therefore\ \triangle\Phi = \frac{\rho}{2(1-m)}P(m\rho) - \triangle A$$

$$= -\frac{\rho}{2(1-m)}2a + 2\rho a \quad = -2a\rho\left(\frac{1}{2(1-m)} - 1\right) \geqq 0$$

即ち

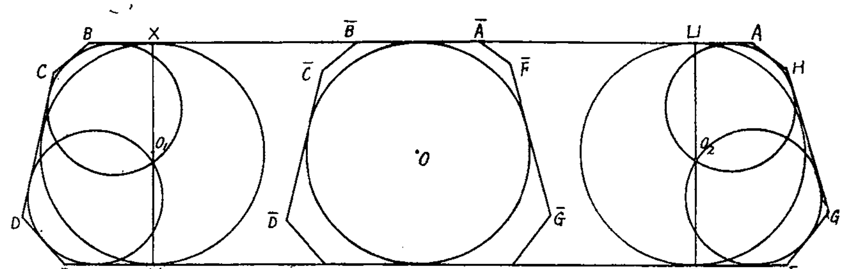
$$\Phi + \triangle\Phi \geqq \frac{(1-2m)^2}{8(1-m)^2}\left\{(2\pi-\theta) - 2\Sigma\tan\frac{\theta_i}{2}\right\}\rho^2 \text{ より}$$

$$\Phi \geqq \frac{(1-2m)^2}{8(1-m)^2}\left\{(2\pi-\theta)\ 2\Sigma\tan\frac{\theta_i}{2}\rho\right\}\rho^2 + 2a\rho\left(\frac{1}{2(1-m)} - 1\right)$$

ここで，とくに $a=0$ のときがまえにやった場合である。故に等号が成立するのは，やはり前に示された場合である。

(ロ) 左に動かすとき AB と EF に隣らない。たとえば CD に最初に接する場合，

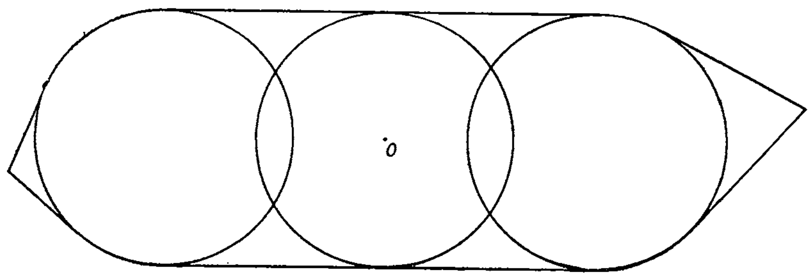
右に動かすとき AB と EF に隣らない。たとえば GH に最初に接する場合



第　12　図

この場合にも(イ)と全く同様にして同じ式が成立する。

(ハ) 特別な場合として $2\pi=\theta$, 即ち $\theta_i=0$ のとき



第 13 図

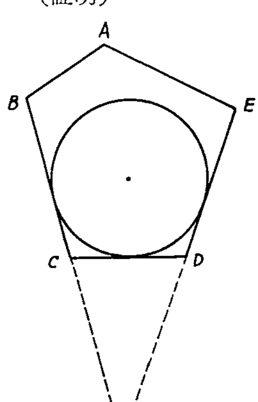
$$\Phi\geqq 2a\rho\left(\frac{1}{2(1-m)}-1\right)$$

$\frac{\rho}{2}P\leqq A$ の証明

1946年 A.Renyi の導いた上式を Gal の方法で，いままでに証明した如き方法で簡単に証明しよう。

> (Lemma 8)
> convex な多角形（…… $BCDE$ ……）が辺 BC と DE をそれらが 0 で出会うまで延長することによって増加されるとき，$\triangle 0CD$ の CD に接する傍接円の半径 r が $\leqq\rho$ ならば $\frac{\rho}{2}P$ の増加は A の増加よりも大である。

（証明）



第 14 図

$$\triangle A=\triangle C0D=\frac{1}{2}r(C0+0D-CD)$$

$$\triangle\left[\frac{\rho}{2}P\right]=\frac{\rho}{2}\triangle P=\frac{\rho}{2}(C0+0D-CD)$$

しかして $r\leqq\rho$

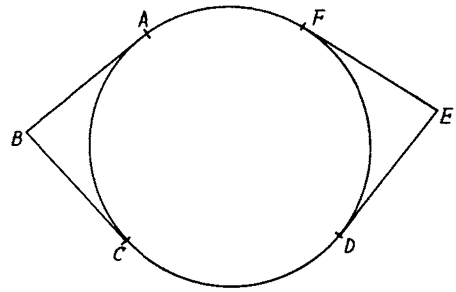
$$\therefore\triangle A\leqq\triangle\left[\frac{\rho}{2}P\right]$$

さて（Lemma 1）より内接円の相隣る二つの接点のはさむ弧が半円より小なるときは接点の間の多角形の相隣る三辺の傍接円の中に半径 $r\leqq\rho$ なるものが存在する。

よって，そのところにおいてつぎつぎと（Lemma 1）を適用すればその間において常に

$$\triangle A\leqq\triangle\left[\frac{\rho}{2}P\right]$$ である。

最後に得られた図形は（一般の convex curve に対しては曲線弧を含むから）下図の如し。



第 15 図

これにおいては明らかに

$$A=\frac{1}{2}\rho\ (AB+BC+DE+EF+\widehat{CD}+\widehat{FA})$$

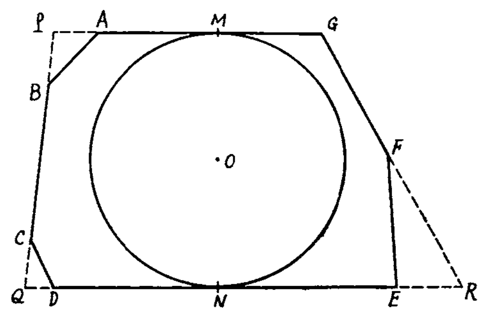
$$=\frac{\rho}{2}P_1$$

以上よりもとの convex curve に対して常に

$$\frac{\rho}{2}P\leqq A \text{ である。}$$

次に相隣る接点の間が半円に等しい場合を考えよう。

内接円 0 を左に動かし，最初に接する辺をたとえば BC とし，右に動かし最初に接する

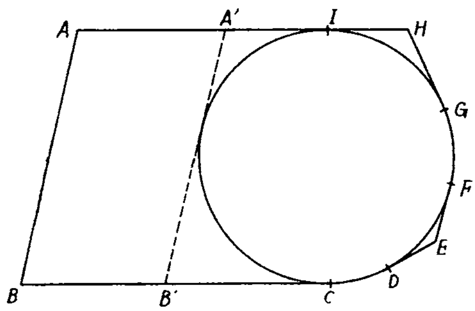


第 16 図

辺をたとえば GF とすれば，BC と AG 及び DE の交点をそれぞれ P，Q，GF と DE の交点を R としておけば $ABCD$……の代りに $GPQR$……とするときに上の Lemma より

$$\triangle A\leqq\triangle\left[\frac{\rho}{2}P\right]$$

故に一般に covex curve を含めて最後に得られる図形は下図の如し



第 17 図

$AB//A'B'$ なる円 0 に接する線分 $A'B'$ をひく。多角形 $ABCD\cdots$ より多角形 $A'B'CD\cdots$ に減少させるとき $AA'=l$ とおけば

$$\triangle A=-l\cdot 2\rho$$

$$\triangle\left[\frac{\rho}{2}P\right]=\frac{\rho}{2}\times(-2l)=-\rho l$$

$$\therefore\ \triangle A\leqq\triangle\left[\frac{\rho}{2}P\right]$$

等号が成立するときは $l=0$ で前の場合である。

多角形 $A'B'CD\cdots\cdots$ においては前の如く

$$A=\frac{\rho}{2}P$$

よってこの場合においても，もとの convex curve に対し常に $\frac{\rho}{2}P\leqq A$ である。