近似値•誤差の取扱いについて

米　谷　数　子

科学技術の振興が大きな課題として論義される現今，その基礎を培う数学教育の面において直接重要な役割を果す分野にこの近似値・誤差の取扱いがある。この点については去る33年8月の日・数・教全国大会においても一課題として取あげられ論義の一焦点として既にその重要性については討議された処であるが，実際に指導に当るに際して幾多の困難点が残されている。即ちその概念については中学校においても既に取扱うが，経験的な把握の仕方に終る現状であり，改訂指導要領によってそれが1学年下へ繰り下げられたので更に指導上に困難を来すことが予測できるが，その理論的な処理法は初めて高校において扱い，既知の概念を確認させ更に高度のものに発展させる役割もあるので，かなり過重な内容を包含することとなる。現行の高校の教科書においてもこの項については必ずしも一定せず問題として取あげているものの中にも不適当なものもあり，又一貫しない取扱い方等も見受けられる。しかも大学入試の範囲として勉学しなければならない生徒にとってはその計算の繁雑さとも併せて一つの苦手な項目になっているようである。その困難性を示摘しより良い解決法を工夫してみたいと思うのがそのねらいである。又小・中学校の指導内容が改訂され程度が高められようとしているとき，高校におけるこの分野においても更に発展させ得るとしたらどのようになるか，その可能性の限度についても考えてみたいと思う。

先ず高校におけるこの指導内容のごく自然な展開と予想される一つの順序に従ってその展開例を示し，各項についての問題点とそれについての私見を加えてゆきたいと思う。

1　近　似　式

微分について学習した後，その応用として簡単な次の近似式から入るのは一つの自然な導入法であろう。

函数 $y=f(x)$ の導函数 $f'(x)$ の値は，平均変化率 $\dfrac{\triangle y}{\triangle x}$ の極限値として定められた，

$\lim\limits_{\triangle x\to 0}\dfrac{\triangle y}{\triangle x}=f'(x)$ ゆえに $|\triangle x|$ が小さいときは，既に $\dfrac{\triangle y}{\triangle x}\fallingdotseq f'(x)$ 即ち

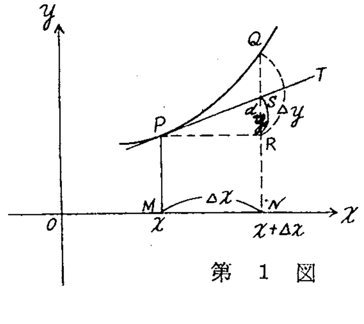
$\triangle y\fallingdotseq f'(x)\cdot\triangle x$ がなりたつとみてよい。

$x=a,\quad \triangle x=h$ とおけば $\triangle y=f(a+h)-f(a)$ 故に

$f(a+h)\fallingdotseq f(a)+f'(a)\cdot h\cdots\cdots$①

が得られる。又 $a=0$ のとき h の代りに x と書けば

$f(x)\fallingdotseq f(0)+f'(0)\cdot x$ が得られる。例として $(1+h)^n\fallingdotseq 1+nh$, $\sin h\fallingdotseq h$ 等があげられる。



第　1　図

2　近似値の誤差

前に求めた近似式①は h がどれくらいの大きさまで使用してよいかを調べようという

ことから誤差の定義に入る。

ある数Aの近似値をaとしたとき$\triangle a=a-A$を誤差 (error) という。$\triangle a$の正負にしたがってaをそれぞれ過剰近似値，不足近似値という。即ち$\triangle a$の符号を問題にする以上$\triangle a$は$a-A$であって$A-a$と区別して一応明確にすべきであろう。しかし$\triangle a$の値は通常不明であるので，ある正の数δに対して，$|\triangle a|\leqq\delta$なる誤差の限界δを考える。例えば

(問題 1) $\pi=3.14159\cdots\cdots$の近似値として3.14をとるとき，その誤差の限界を求めよ。

という問題に対しては

$3.14-\pi=3.14-3.14159\cdots\cdots=-0.00159\cdots\cdots$

$\therefore\ |-0.00159\cdots\cdots|<0.002$ 故に不足近似値3.14についてくる誤差の限界は0.002であると答えるのが適当であろう。勿論誤差の限界としてはその定義によれば0.002に限ることなくそれ以上の数はすべて誤差の限界になり得るし更にもう少し小さくすることも可能である。併しこの問題のように単に3.14の誤差の限界はいくらか，と単独に質しているような場合では有効数字一桁の誤差の限界として且つまたなるべく小さなものが意味があることから0.002となるわけである。ただし後に述べようとする (問題 2) のように$\pi\fallingdotseq3.14$を計算の中に使ってその答に対しての誤差を計算する必要のある時には誤差の限界として0.0016を使った方がよい。

即ちこの誤差の絶対値の大きさがその近似値の正しさを表わす。しかし測定値の精度等は単にその誤差の大小を知っただけでは不十分である。例えば誤差が同じく1mmであっても10mの針金の測定値に対してのときと1cmの管の直径を測定した場合とでは当然そのくわしさがちがう。そこで$\left|\dfrac{\triangle a}{A}\right|$を$a$の相対誤差と定義するが，$A$も$\triangle a$も一般に不明であることが多いので$\left|\dfrac{\triangle a}{A}\right|$の代りに$\left|\dfrac{\triangle a}{a}\right|\leqq\delta$なる相対誤差の限界を考える。

さて，前に述べた近似式①を利用してこの誤差について考えてみる。①式において$a+h=A$とおくと$f(A)\fallingdotseq f(a)+f'(a)\cdot h$となる。故に$f(A)$の近似値として$f(a)$を用いたときの誤差を$\triangle y$とすると

$|\triangle y|=|f(a)-f(A)|\fallingdotseq|f'(a)||h|\leqq|f'(a)|\delta\cdots\cdots$②

したがってこの場合の相対誤差の限界は

$\left|\dfrac{f'(a)}{f(a)}\right|\delta$ となる。

例えばこれらの例として次の問題等がある。

(問題 2) $\sqrt{3.14}$を$\sqrt{\pi}$の近似値としたときの誤差の限界を求めよ。

(解) $f(a)-f(A)$ の誤差を $|f'(a)||\triangle a|$ として，

$A=\pi\quad a=3.14$ と考えて

$$f'(a)=\frac{1}{2\sqrt{3.14}}<0.29$$

3.14の誤差の限界は $|\triangle a|<0.0016$

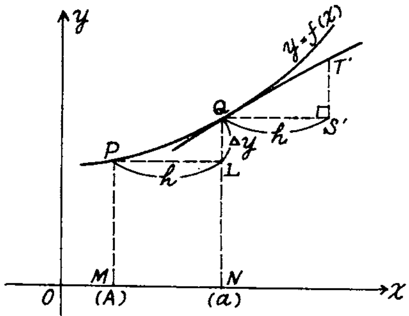
$\therefore\ |f'(a)||\triangle a|<0.29\times0.0016\fallingdotseq0.000464<0.0005$

答 0.0005

このように計算の中に3.14の誤差の限界を考えるようなときは有効数字二桁とり (問題 1) と区別したい。

〔1，2についての意見〕

①の近似式は第1図において函数値 QN の代りに SN で代用していると考えてよい。したがって①の近似式を利用した場合の誤差は QS である。これに対して②の近似式を利用した場合は，第2図で $PM(f(A))$ の近似値として $QN(f(a))$ を用いた場合，その誤差 $QL(\triangle y)$ の代りに $S'T'$ で代用することを意味している。（QT' は点 Q における曲線 $y=f(x)$ の接線 $QS'=h$）従って近似式の①の誤差と②の誤差とは本質的に異る即ち近似値自体が異質のものである。一般に現在の指導要領では近似式①の誤差を考えることは必修としていないので，殆んどすべての教科書において，それには触れず，誤差に対しては①から文字のおきかえによって得られる②を持ち出してここで誤差について考えさせているので，生徒にとってはその両者を混同し①の近似式の誤差が②のそれであるように誤解されるおそれがある。



第 2 図

即ち①の近似式を持ち出す以上は，どうしても，$f(a+h)\fallingdotseq f(a)+f'(a)h+\frac{f''(a)}{2!}h^2+\cdots$ $\frac{f^{(r)}(x)}{r!}h^{(r)}+\cdots\cdots$ の展開式から得られる近似式

$f(a+h)\fallingdotseq f(a)+f'(a)h+\frac{f''(a)}{2}h^2\cdots\cdots$③ 位はあげたい。尤もこの一般の展開式を持ち出すには高次導函数についても学ばねばならず，更に平均値の定理からテイラーの定理

$$f(b)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(b-a)+\frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2+\cdots\cdots+\frac{f^{(n)}(c)}{n!}(b-a)^n$$

$a<c<b$ なる c が存在する。

更にマクローリンの定理

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\cdots\cdots+\frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!}x^n \quad \underline{0<\theta<1}$$

まで学習できれば勿論よいわけだが，急にそこまで掘り下げるのに多少無理を感ずる現状では過渡的な段階として，或程度仮定や省略をとり入れた次のような方法をとってみたらどうか。

近似式の例として，極く小さい x の値について

$(1+x)^2\fallingdotseq 1+2x\cdots\cdots$　　$(1+x)^3\fallingdotseq 1+3x$

をあげたときは当然，そこにそれぞれの誤差として x^2 及び約 $3x^2$ をとってよいことと考える。そこで一般に $(1+x)^n\fallingdotseq 1+nx$ としたときは，どんな誤差と考えてよいかについて考えてみようと導入してゆく。

即ち，例えば $f(x)=(1+x)^n$ が次のように級数の形に書かれたものと仮定する。

$f(x)=c_0+c_1x+c_2x^2+\cdots\cdots+c_nx^n+\cdots\cdots$ （a）

ここで $x=0$ とおけば $f(0)=c_0$ が得られる。次に（a）式の両辺を x で微分して $x=0$ とおけば

$f'(x)=c_1+2c_2x+3c_3x^2+\cdots\cdots$ であるから $f'(0)=c_1$ さらに x で微分して $f''(x)=2c_2$

$+3\times 2c_3x+\cdots\cdots$ から $f''(0)=2c_2$ をうる。以下順次微分して $x=0$ とおけば $f^{(r)}(x)=r!c_r+(r+1)!c_{r+1}x+\cdots\cdots$ から $f^{(r)}(0)=r!c_r$ $\therefore\ c_r=\frac{1}{r!}f^{(r)}(0)$ が得られる。したがって（a）式は $f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2!}f''(0)x^2+\cdots\cdots+\frac{f^{(r)}(0)}{r!}x^r+\cdots\cdots$（b）なる展開式が得られる。

ここで（b）式は $f(x)$ が（a）のように表わされると仮定しての上でなりたつので常に（b）のように書けるわけではないが $(1+x)^n$（ただし n は任意の実数かつ $|x|<1$）や，$\sin x$, $\cos x$ は（a）の形の無限級数に書かれることが証明されているから次のような展開式

$$(1+x)^n=1+nx+\frac{n(n-1)}{2!}x^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3+\cdots\cdots+\frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r!}x^r+\cdots$$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots\cdots\cdots\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots\cdots$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots\cdots\cdots\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\cdots\cdots$$

が得られ，x が極く小さいときは，x^2 の項に比べて x^3 以下の項は非常に小さくなるから，$(1+x)^n\fallingdotseq 1+nx$ とした近似式に対しての誤差は約 $\frac{n(n-1)}{2}x^2$ と考えられ，従って，十分小さい x に対して，次の各式についての誤差を E で表わすと，

$$\frac{1}{1+x}\fallingdotseq 1-x \qquad E\fallingdotseq x^2$$

$$\sqrt{1+x}\fallingdotseq 1+\frac{x}{2} \qquad E\fallingdotseq -\frac{1}{8}x^2$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}}\fallingdotseq 1-\frac{x}{2} \qquad F\fallingdotseq\frac{3}{8}x^2$$

等の近似式は実際にあげ，それら近似式についての誤差も併せ考えて，生徒が充分これを使うことに慣れるまでにしたい。同様に

$$\sin x\fallingdotseq x-\frac{x^3}{3!} \qquad E\fallingdotseq\frac{x^5}{5!}$$

$$\cos x\fallingdotseq 1-\frac{x^2}{2!} \qquad E\fallingdotseq\frac{x^4}{4!}$$

等も得られる。

32年度神戸大学の入試問題に次のようなのが出ている。

（問題3） 次の問に答えよ。

(1) x が大略3に等しいとき x の一次式で $\sqrt{1+x}$ の近似式になるものを求めよ。

(2) (1)を用いて $\sqrt{1+\pi}$ の近似値を求めよ。ただし $\pi=3.14159\cdots\cdots$ である。

(3) (2)で求めた近似値は小数第何位まで信用できるか，理由を述べて答えよ。」

この問題では(1)において前述の近似式の利用で，$\sqrt{1+x}=2\sqrt{1+\frac{x-3}{4}}\fallingdotseq 2\left(1+\frac{x-3}{8}\right)=\frac{x}{4}+\frac{5}{4}$ となり $x=3.14159$ をこれに代入して (2)は $\sqrt{1+\pi}\fallingdotseq 2.03539$ が得られるが，(3)ではこれについての誤差を評価しなければならならから，$(+x)^{\frac{1}{2}}$ の展開式の第三項が必要となる。即ち

$\sqrt{1+\frac{x-3}{4}} \fallingdotseq 1+\frac{x-3}{8}-\frac{(x-3)^2}{128}$ だから上の近似値の誤差はおよそ $\frac{(x-3)^2}{64}$ であると考えられる。これは $\frac{(0.14159)^2}{64} \fallingdotseq \frac{0.020}{64} \fallingdotseq 0.0003$ であるから(2)で得た近似値は小数第三位までは信用できる即ち 2.035 までが信頼できることとなる。以上のような大学入試問題は現行の指導内容の範囲外故入試問題として不適当なのではあるが，前にも述べた通り近似式(1)を持ち出しながらその誤差までは必修としない指導内容の方に，不自然さがあることを再び強調したいのである。

3　近似値の四則に対する誤差

二つ又はそれ以上の近似値の和・差・積・商の誤差について考えることは，実際の近似値の計算には不可欠の事柄である。併しこれも指導要領では指導内容にとりあげられていない。従って教科書では，この事項は省略してしまって全く触れていないものもあるが，大抵のものは参考事項等として軽く載せている。

a, b をそれぞれ A, B の近似値とするとき，

(1)　和および差

$a+b$ の誤差を $\triangle(a+b)$ で表わすと

$$\triangle(a+b)=(a+b)-(A+B)=(a-A)+(b-B)=\triangle a+\triangle b$$

$$\therefore\ |\triangle(a+b)|=|\triangle a+\triangle b|\leqq|\triangle a|+|\triangle b|$$

$a-b$ の誤差 $\triangle(a-b)$ も同様に

$$|\triangle(a-b)|=|\triangle a-\triangle b|\leqq|\triangle a|+|\triangle b|$$

(2)　積 $a\cdot b$ の誤差を $\triangle(ab)$ とすると

$$\triangle(ab)=ab-AB=ab-(a-\triangle a)(b-\triangle b)$$
$$=a\cdot\triangle b+b\cdot\triangle a-\triangle a\cdot\triangle b\fallingdotseq a\cdot\triangle b+b\cdot\triangle a$$

$$|\triangle(ab)|\leqq|a||\triangle b|+|b||\triangle a|$$

$$\therefore\ \left|\frac{\triangle(ab)}{ab}\right|\leqq\frac{|b||\triangle b|+|b||\triangle a|}{|ab|}=\left|\frac{\triangle a}{a}\right|+\left|\frac{\triangle b}{b}\right| \quad \text{（相対誤差）}$$

(3)　商 $\frac{b}{a}$ の誤差 $\triangle\left(\frac{b}{a}\right)$ とすると

$$\left|\triangle\left(\frac{b}{a}\right)\right|\leqq\frac{|a||\triangle b|+|b||\triangle a|}{a^2}$$

$$\left|\frac{\triangle\left(\frac{b}{a}\right)}{\frac{b}{a}}\right|\leqq\left|\frac{\triangle a}{a}\right|+\left|\frac{\triangle b}{b}\right| \quad \text{（相対誤差）}$$

特に積についても商についてもその相対誤差がそれぞれの近似値の相対誤差の和で表わされることは重要な結論であり，実際の誤差の計算に利用して便利である。

中学校での近似値についての計算でいくつかの近似値を扱うときその有効数字の桁数は揃えるようにし計算の結果に対する有効数字についても大体同じ桁数だけ信用してよいという結論を経験的に学習している。それに対するはじめての理論づけでもある点からもこの事項は重要視したい。上の事項の結果を利用する問題としては次のようなものがある。

（問題４）「円の直径をはかって 8cm の値をえて円周率を 3.14 として円周を計算した。直径 8cm の値には誤差が 0.2mm あるとすれば，誤差は何ほどか。」

この問題で言うところの誤差は即ち誤差の限界のことである。従って次のように解ける。

(解) 半径の誤差の限界は 0.01cm 故

$$2\times 3.14\times 400\times\left(\frac{0.0016}{3.14}+\frac{0.01}{4}\right)\fallingdotseq 0.075<0.08(\mathrm{cm})$$

(問題5) 「公式 $V=\frac{4}{3}\pi r^3$ を用いて半径 $=2.43$cm の球の体積を求めた場合の誤差の限界を求めよ。ただし $\pi=3.14$ を用い，r には 0.005cm 以下の誤差を含む。」

問題を明かにするために上のように π の数値や r の誤差を明示してあるが，測定値として 2.43cm を得たのであればその有効数字の末位の数にはその末位の半単位の誤差をふくむものとみるのが普通であり，従って 2.43cm$\pm$0.005cm と解してよいであろう。又この測定値を用いて計算する場合に π として何を使うべきかを考えるのも実際に実験して測定値を出そうとする者にとっての一つの課題であろう。

$\frac{\triangle V}{V}\leqq\left|\frac{\triangle\pi}{\pi}\right|+3\left|\frac{\triangle r}{r}\right|$ において $3\left|\frac{\triangle r}{r}\right|=3\times\frac{0.005}{2.43}\fallingdotseq 0.0062$

故に 3.14 を用いれば $\left|\frac{\triangle\pi}{\pi}\right|=\frac{0.0016}{3.14}\fallingdotseq 0.00051$ 故勿論十分であるが 3.1 では $\frac{0.05}{3.1}$ $\fallingdotseq 0.016$ となり不適当であるから π として 3.14 が適当となる。故に次のように解ける。

$$\frac{\triangle V}{V}\leqq\frac{0.0016}{3.14}+3\times\frac{0.005}{2.43}\fallingdotseq 0.0051+0.0062\fallingdotseq 0.0067$$

即ち体積の相対誤差は 0.67%，故に絶対誤差の限界は

$$\triangle V\leqq V\left\{\left|\frac{\triangle\pi}{\pi}\right|+3\left|\frac{\triangle r}{r}\right|\right\}=0.17<0.2$$

即ち V の計算値 59.9cm^3 には 0.2cm^3 以内の誤差が含まれていると見るのが適当である。

以上の問題4，5のように誤差を含む測定値の計算においては，最後の答の誤差の有効数字は一桁でよいわけであるが，なるべく正しく求めるために途中の計算は，かなり慎重にした。大体誤差を含む諸種の計算では，与えられた有効数字を調べて桁数の一番小さい有効数字の桁数よりも一桁多く計算するのが普通である。これは計算誤差を測定誤差よりも小さくするためである。即ち計算誤差は如何程でも小さくできるが，測定誤差には限度があるからである。

〔3についての意見〕

既に上にも述べたことではあるが，この近似値の四則についての誤差は，実際計算に役立つ点からも重要な事柄なので指導内容中に加えるのが適当と思う。単に1，2で留めておくと，問題4，5のように r と π の双方に誤差が含まれているようなものについては解けなくなるからである。したがって或教科書にのせている次の問題のような無理なものにしなければならなくなる。

(問題6) 「円の面積を求めるために直径を測ったら 32cm であった。これに 0.5cm 以下の誤差があるかもしれない。円周率を 3.1416 として円の面積を計算した。求めた円の面積の誤差の限界を求めよ。たゞし 3.1416 は円周率の真の値とする。」

これでは $f(r)=\pi r^2$ として π を定数とみなして誤差の限界 $|f'(r)||\triangle r|=|2\pi r||\triangle r|=2\pi r|\triangle r|$ で求めさせようとしているのである。r の誤差に比べて π の誤差は殆んど無視できる程小さくなるから勿論これでよいわけである。併し一方の測定値の有効数字に比べて

大きな桁数の有効数字を持ち出さねばならぬ所に不自然さがある。併しこのような問題では2の近似式を用いて上のようにも解けるし，又3の近似値の積の場合の特別の場合として，$\pi r^2\times 2\times\left|\frac{\triangle r}{r}\right|=2\pi r|\triangle r|$ と考えてもよい。即ち3で求めた結果が2のそれと矛盾しないことをたしかめておくことも必要である。併し（問題6）のように誤差を含むものが一つの量である場合は，双方から考えて一致することも言えるが，前述の問題4，5のような場合にも，2の近似式の考え方を発展させてできないであろうか。即ち，二つ以上の未知数を含む函数の微分ということから偏微分の概念を導入してみたい。これは指導内容の新しい展開となるわけで，その方法については更に深い研究の余地はあるが，その考え方の骨組と問題への応用を主眼にして述べてみたい。

或量yが他のn個の量u_1，$u_2\cdots\cdots u_n$の函数として次の形に表わされるものとする。

$y=f(u_1,\ u_2,\ \cdots\cdots,\ u_n)\cdots\cdots(1)$

$u_i(i=1,2,\cdots,\ n)$ の誤差を $\triangle u_i$ としこのために y に $\triangle y$ だけ絶対誤差を生ずるとすれば

$y+\triangle y=f(u_1+\triangle u_1,\ u+u_2+\triangle u_2,\ \cdots\cdots,\ u_n+\triangle u_n)$

$\triangle y$を求めるために此の式の右辺を展開すれば

$$f(u_1+\triangle u_1,\ u_2+\triangle u_2,\ \cdots\cdots,\ u_n+\triangle u_n)=f(u_1,\ u_2,\ \cdots\cdots u_n)+\left(\triangle u_1\frac{\partial f}{\partial u_1}+\triangle u_2\frac{\partial f}{\partial u_2}+\cdots\cdots+\triangle u_n\frac{\partial f}{\partial u_n}\right)+\frac{1}{2}\left\{(\triangle u_1)^2\frac{\partial^2 f}{\partial {u_1}^2}+(\triangle u_2)^2\frac{\partial^2 f}{\partial {u_2}^2}+\cdots\cdots+(\triangle u_n)^2\frac{\partial^2 f}{\partial {u_n}^2}+\cdots\cdots\right.$$

となるが $\triangle u_i$ は微小量であるから $(\triangle u_i)^2$ 以下の項を無視して一次の近似をとれば，

$$\triangle y+\triangle y\fallingdotseq f(u_1,\ u_2,\ \cdots\cdots u_n)+\left(\triangle u_1\frac{\partial f}{\partial u_1}+\triangle u_2\frac{\partial f}{\partial u_2}+\cdots\cdots+\triangle u_n\triangle\frac{\partial f}{\partial u_n}\right)\cdots\cdots(2)$$

(1)，(2)より $\triangle y\fallingdotseq\frac{\partial f}{\partial u_1}\triangle u_1+\frac{\partial f}{\partial u_2}\cdot\triangle u_2+\cdots\cdots+\frac{\partial f}{\partial u_n}\cdot\triangle u_n\cdots\cdots(3)$

即ち(3)が多変数函数の絶対誤差を求める式となる。又相対誤差は，

$$\frac{\triangle y}{y}=\frac{\partial f}{\partial u_1}\cdot\frac{\triangle u_1}{f}+\frac{\partial f}{\partial u_2}\cdot\frac{\triangle u_2}{f}+\cdots\cdots+\frac{\partial f}{\partial u_n}\cdot\frac{\triangle u_n}{f}\cdots\cdots(4)$$

となる。

前の（問題5）に対してこの方法を適用すると

$$\triangle y=y\times\left(\frac{\partial y}{\partial\pi}\times\frac{\triangle\pi}{y}+\frac{\partial y}{\partial r}\cdot\frac{\triangle r}{y}\right)=y\left(\frac{4}{3}r^3\cdot\frac{\triangle\pi}{\frac{4}{3}\pi r^3}+4\pi r^2\times\frac{\triangle r}{\frac{4}{3}\pi r^3}\right)$$

$=y\times\left(\frac{\triangle\pi}{\pi}+3\times\frac{\triangle r}{r}\right)$ となり同様の結果が得られる。

一般にこの方法で計算しても前に出した近似値の四則に対する誤差の結果と同様になることをたしかめておきたい。そのために，乗・除についての一般式の例をあげてみる。

（乗法の誤差） $y=u_1u_2u_3\cdots\cdots u_n$ の相対誤差を求めるのに $\frac{\partial f}{\partial u_i}=\frac{\partial y}{\partial u_i}=\frac{y}{u_i}(i=1,2,\cdots\cdots,\ n)$ となるから y の対数をとって微分することにより

$$\frac{\triangle y}{y}=\frac{\triangle u_1}{u_1}+\frac{\triangle u_2}{u_2}+\cdots\cdots+\frac{\triangle u_n}{u_n}\leqq\left|\frac{\triangle u_1}{u_1}\right|+\left|\frac{\triangle u_2}{u_2}\right|+\cdots\cdots+\left|\frac{\triangle u_n}{u_n}\right|$$

故に y の絶対誤差は $\triangle y\leqq y\cdot\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\triangle u_i}{u_i}\right|$ として求められる。

（除法の誤差）　$y=\dfrac{u_1}{u_2}$ の相対誤差も，対数をとって微分することにより

$$\frac{\triangle y}{y}=\frac{\triangle u_1}{u_1}-\frac{\triangle u_2}{u_2}\leqq\left|\frac{\triangle u_1}{u_1}\right|+\left|\frac{\triangle u_2}{u_2}\right|$$

（積と商を含む式の誤差）　$y=K\dfrac{u_1{}^m}{u_3{}^p}\dfrac{u_2}{u_4{}^q}$ Kは比例定数の相対誤差は両辺の対数をとり微分して次の関係を得る。$\dfrac{\triangle y}{y}=m\cdot\dfrac{\triangle u_1}{u_1}+n\dfrac{\triangle u_2}{u_2}-p\dfrac{\triangle u_3}{u_3}-q\dfrac{\triangle u_4}{u_4}$

$$\leqq|m|\cdot\left|\frac{\triangle u_1}{u_1}\right|+|n|\cdot\left|\frac{\triangle u_2}{u_2}\right|+|p|\cdot\left|\frac{\triangle u_3}{u_3}\right|+|q|\cdot\left|\frac{\triangle u_4}{u_4}\right|$$

〔 $\triangle y$を定めて $\triangle u_i$ を求める問題〕

$y=f(u_1,\ u_2,\ \cdots\cdots,\ u_n)$ に与えられるyについての誤差 $\triangle y$を一定量以下にするという条件で各量の誤差 $\triangle u_i$ を求める問題について考える。

$\triangle y$を一定値以下にするための $\triangle u_i$ の値の定め方は数学的には不定となる。そこで(3)式の右辺の各項が$\triangle y$に対して等量の貢献をなすものと仮定する。即ち，

$$\triangle y=n\cdot\frac{\partial f}{\partial u_1}\triangle u_1=n\cdot\frac{\partial f}{\partial u_2}\cdot\triangle u_2=\cdots\cdots n\cdot\frac{\partial f}{\partial u_n}\triangle u_n$$

とする。之を同等効果律という。この原理によれば各量に要求される絶対誤差は

$$\triangle u_1=\frac{\triangle y}{n\dfrac{\partial f}{\partial u_1}},\quad \triangle u_2=\frac{\triangle y}{n\cdot\dfrac{\partial f}{\partial u_2}},\quad \cdots\cdots\triangle u_n=\frac{\triangle y}{n\cdot\dfrac{\partial f}{\partial u_n}}$$

として求められる。従って次の問題等はこの考えのもとに解ける。

（問題７）「長方形の面積Sを求める為にその二辺ａ，ｂを測って測定値 $a=34.57$cm 及び $b=2.32$cm を得た。面積を 0.1cm^2 まで正確に求めるには各辺に要求される絶対誤差の限界はいくらか。」

（解）$S=a\cdot b=34.57\times2.32\fallingdotseq80.2$ (cm^2)

$$\frac{\triangle S}{S}=\left|\frac{\triangle a}{a}\right|+\left|\frac{\triangle b}{b}\right| \text{ 同等効果律から } \left|\frac{\triangle S}{S}\right|=2\cdot\left|\frac{\triangle a}{a}\right|$$

$\therefore\left|\dfrac{\triangle a}{a}\right|=\dfrac{1}{2}\cdot\left|\dfrac{\triangle S}{S}\right|$ 又面積を 0.1cm^2 まで正確に求めるには $|\triangle S|<$ 0.05(cm^2) としなければならないから $\left|\dfrac{\triangle a}{a}\right|<\dfrac{1}{2}\times\dfrac{0.05}{80.2}\fallingdotseq0.00031$

故に $|\triangle a|<0.00031\times34.5\fallingdotseq0.0107$ 故 $|\triangle a|\fallingdotseq0.01$ (cm)

とすればよい。同様に $\left|\dfrac{\triangle b}{b}\right|=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{\triangle S}{S}$ から

$|\triangle b|<0.00031\times2.3\fallingdotseq0.00071$ より $|\triangle b|\fallingdotseq0.0005$(cm) とすればよい。

〔その他の雑見〕(1)〔「正しく求める」について〕

測定値や多変数の場合の誤差の例ではないが，答の正しさに制限をつけて用いるべき近似値を定める問題として次のものが教科書に見られる。

（問題８）「$\dfrac{1}{\pi}$ の値を小数第二位まで求めるにはπを小数第何位まで用いればよいか」

用いるべきπの近似値をaとしてその誤差を $\triangle a$ とすると，$\dfrac{1}{a}\ \dfrac{\triangle a}{a}<\dfrac{1}{3}\left|\dfrac{\triangle a}{3}\right|=\dfrac{|\triangle a|}{9}<0.005$ とすると，$|\triangle a|<0.045$ より $a=3.1$ とすると $|\triangle a|<0.042$ となるから，

3.1を用いればよいことになる。これは $\frac{1}{3.1}=0.3225\cdots\cdots$ となり $\frac{1}{\pi}=0.318309\cdots\cdots$ で小数第二位の数字は異る，$\frac{1}{3.14}=0.3184\cdots\cdots$ となるから小数第二位まで正しく（真の値と同じ数字で）求められるわけである。従って小数第二位まで求めることの意味をこのように正しく求めることと解すれば上のような解では駄目になる。今の例では 3.14 ではよいわけだが，一般的に，誤差の限界を小さくしても，99……9と9が並ぶような数字に対しては不能になることもあり得る。故に小数第二位まで求めるの意味を誤差が小数第二位の半単位以下になるような値として求めることの意味と解したい。即ちそれは小数第二位まで取ったとき真の値に最も近い値であることになるから，実際の値としても意味がある。従って前述のような正しく求める意味の問題は適当でない。

(2)〔方程式の根の近似値〕

高次方程式の一般解に代って，三次方程式の根の近似値をニュートンの方法で求めることは指導した方がよいと思う。現行の教科書数Ⅲの中にもこれを近似式の導入として持ち出しているもの（大修館）もある。

例として $x^3+4x-6=0$ の近似解を次のように求めている。

$f(x)=x^3+4x-6$ とおくと

$f(1)=-1<0 \qquad f(2)=10>0$

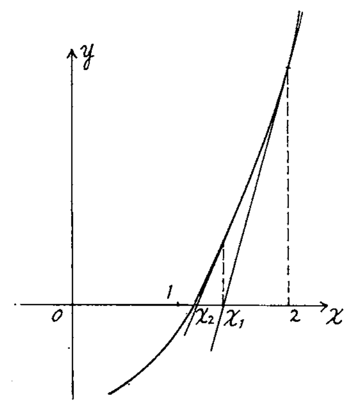
$f'(x)=3x^2+4 \qquad f''(x)=6x$

$1<x<2$ では $f''(x)<0$ 故に曲線は下に凸点

(2, 10) における接線の方程式

$y=f'(2)(x-2)+10 \quad y=16(x-2)+10\cdots\cdots$ が x 軸と交わる点を x_1 とすれば，

$x_1=2-\frac{10}{16}=1.37\fallingdotseq1.4 \quad f(x_1)\fallingdotseq f(1.4)\fallingdotseq9.88$



第 3 図

更に同様に (1.4, 9.88) における接線と x 軸との交点を x_2 とすると

$$x_2=1.4-\frac{2.34}{9.88}\fallingdotseq1.16$$

この手続をくり返せば実根にいくらでも近い値を計算することができる。このニュートンの方法等は，微分の応用としても無理なく理解できると思われるので指導内容としてとりあげた方がよくはないかと思う。

以上，近似値・誤差の取扱いの方法について過去数年間の指導の実際に当てて，考えた事柄をまとめたものである。その発展の仕方等についてはまだ研究中であり未熟なものではあるが，更に研究を重ね，今後，これらの事柄の指導の実際における成果をその評価の仕方等に対する実証的な記録を残してゆきたいと思っている。諸先生方の御批判と御指導をお願いする。