

投影図を利用した計算の一例

—主に共面図表について—

能 崎 克 己

二元一次連立方程式のグラフによる解法や計算図表（共点図表，共線図表）など，数値計算の際にいろいろな図表を用いることは少くない。特に，同一種類の計算を多く行う場合——ただし，精密さをさほど要求されていない場合——には，計算図表に対する要請は大である。しかし，現在用いられている大部分は，平面上の図表を応用したものであって，その使用にはいくらかの制限がある。ここに私はこの考え方を空間に拡張し，投影図を用いて計算することを考えてみた。もっとも，後述のように，立体計算図表もしくは共面図表の原理は既にいろいろと見ることはできる〔文献 1，2，3〕が，実際それを利用する場合に，いろいろな不便があって，現在のところ実用的ではない。もちろん，投影図を用いても，その不便は全面的に除去されるわけではないが，実用に一步でも近づくならば大いに結構なことであると思う。

また，数学教育の立場からみても，既に二年前から高等学校の数学科指導内容が改正され，代数，幾何の二者が，相互に有機的な関係を保ちつつ有効に指導されるようになってきている。この意味においても，投影図を用いた図計算は，立体概念の把握と共に，全く適切なものではないかと思われるのである。以下に述べるうち，一部は高等学校においても指導することができる。

1 三元一次連立方程式のグラフ解法

周知のように，二元一次連立方程式は，グラフを用いて次の方法で解くことができる。

二元一次連立方程式

$$(E_1) \quad \begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, & (1) \\ a_2x + b_2y = c_2 & (2) \end{cases}$$

の各々が表わす二直線をそれぞれ l_1, l_2 とすれば，方程式 (E_1) の根は，二直線 l_1, l_2 の交点 P の座標を (x_0, y_0) とするとき

$$\begin{cases} x = x_0 \\ y = y_0 \end{cases}$$

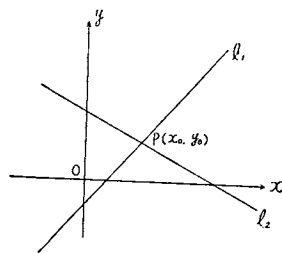
である。（第 1 図）

この原理を次のように空間に拡張する。

三元一次連立方程式

$$(E_2) \quad \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1, & (1) \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2, & (2) \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 & (3) \end{cases}$$

が与えられたとする。立体解析幾何学によれば，(1)，(2)，(3) の各式はそれぞれ平



(第 1 図)

面を表わす。この平面をそれぞれ α, β, γ とすると、平面 α, β は一般に直線 l で交わり、直線 l と平面 γ は一般に一点 P で交わる。この点 P は、即ち三平面 α, β, γ の共有点であるから、点 P の座標を (x_0, y_0, z_0) とすれば方程式 (E_2) の根は、

$$\begin{cases} x=x_0, \\ y=y_0, \\ z=z_0, \end{cases}$$

である。従って、方程式 (E_2) を投影図を用いて解くには次のようにすればよい。

二平面 $\alpha (\alpha_1, \alpha_2), \beta (\beta_1, \beta_2)$ の交線 $l (l_1, l_2)$ を求め (第2図—28ページ) 次に、直線 $l (l_1, l_2)$ と平面 $\gamma (\gamma_1, \gamma_2)$ との交点 $P (P_1, P_2)$ を求めて、その座標 (x_0, y_0, z_0) を読めば、 x_0, y_0, z_0 は方程式 (E_2) の根である。(第3図—29ページ)

例 題

$$\begin{cases} 18x + 8y + 9z = 72, \\ 12x + 2y + 9z = 36, \\ 3x + y + 6z = 12. \end{cases}$$

第4図(30ページ)により、解は、

$$\begin{cases} x=2.14, \\ y=3.86, \\ z=0.28 \end{cases}$$

である。なお、これら x, y, z の正確な値は、

$$\begin{cases} x = \frac{15}{7} = 2.143, \\ y = \frac{27}{7} = 3.857, \\ z = \frac{2}{7} = 0.286 \end{cases}$$

である。

II 共 面 図 表

§ 1 平面における共線図表の原理

平面上の三点 $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2), P_3(x_3, y_3)$ が一直線上にある (共線である) ための必要かつ十分な条件は、方程式

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad (1)$$

が成立することである。いま、 P_1, P_2, P_3 の座標を、媒介変数 z_1, z_2, z_3 を用いて、

$$\left. \begin{aligned} (z_1) : & \quad x_1 = f_1(z_1), & y_1 = g_1(z_1); \\ (z_2) : & \quad x_2 = f_2(z_2), & y_2 = g_2(z_2); \\ (z_3) : & \quad x_3 = f_3(z_3), & y_3 = g_3(z_3) \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

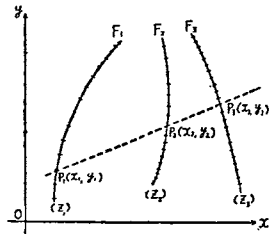
と表わすとする。ここに、 $f_1, f_2, f_3, g_1, g_2, g_3$ はすべて一価連続函数を表わすものとする。これらの媒介変数 z_1, z_2, z_3 にいろいろな値を与えるならば、点 P_1, P_2, P_3 はそれぞれ第5図に示すように軌跡 F_1, F_2, F_3 をえがく。

故に、方程式

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

において、 x_i, y_i ($i=1, 2, 3$) がそれぞれ上の三組の方程式 (2) で定義された三つの曲線 F_1, F_2, F_3 上の点 P_1, P_2, P_3 の座標を表わすものとするれば、一直線上にある三点を決定する媒介変数 z_1, z_2, z_3 の各々は常に方程式

$$\begin{vmatrix} f_1(z_1) & g_1(z_1) & 1 \\ f_2(z_2) & g_2(z_2) & 1 \\ f_3(z_3) & g_3(z_3) & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad (3)$$



(第5図)

を満足する。これを、

$$\begin{vmatrix} f_1 & g_1 & 1 \\ f_2 & g_2 & 1 \\ f_3 & g_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

と略記する。

従って、三変数の方程式の共線図表を求めるには、与えられた方程式を(3)の行列式の形に表わし、(2)で定義される三つの曲線をえがいて、それぞれの曲線上に z_1, z_2, z_3 なる目盛をつければよい。このようにして得られた共線図表の使用法は、ここに述べるまでもなく周知のことである。ただし、上記は、各尺の尺度係数を1として取扱ったものであるが、尺度係数は、必要に応じて適当に定めることができる。

§ 2 共線図表の原理の空間への拡張——共面図表の原理——

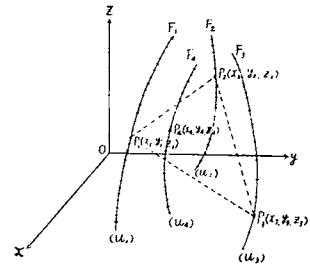
空間における四点 $P_1(x_1, y_1, z_1), P_2(x_2, y_2, z_2), P_3(x_3, y_3, z_3), P_4(x_4, y_4, z_4)$ が同一平面上にある (共面である) ための必要かつ十分な条件は、方程式

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad (4)$$

が成立することである。いま、 P_1, P_2, P_3, P_4 の座標を、媒介変数 u_1, u_2, u_3, u_4 を用いて

$$\left. \begin{aligned} (u_1) : x_1 &= f_1(u_1), y_1 = g_1(u_1), z_1 = h_1(u_1); \\ (u_2) : x_2 &= f_2(u_2), y_2 = g_2(u_2), z_2 = h_2(u_2); \\ (u_3) : x_3 &= f_3(u_3), y_3 = g_3(u_3), z_3 = h_3(u_3); \\ (u_4) : x_4 &= f_4(u_4), y_4 = g_4(u_4), z_4 = h_4(u_4) \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

と表わすとする。ここに、 $f_1, f_2, f_3, f_4, g_1, g_2, g_3, g_4, h_1, h_2, h_3, h_4$ はすべて一価連続函数を表わすものとする。これらの媒介変数 u_1, u_2, u_3, u_4 にいろいろな値を与えるならば、点 P_1, P_2, P_3, P_4 はそれぞれ第6図に示すように軌跡 F_1, F_2, F_3, F_4 をえがく。ここに、 F_1, F_2, F_3, F_4 は空間曲線である。故に、方程式(4)において、 x_i, y_i, z_i ($i=1, 2, 3, 4$) がそれぞれ上の四組の方程式(5)で定義された四つの空間曲線 F_1, F_2, F_3, F_4 上の点 P_1, P_2, P_3, P_4 の座標を表わすものとするれば、一平面上にある四点を決定する媒介変数 u_1, u_2, u_3, u_4 の各々は常に方程式



(第6図)

$$\begin{vmatrix} f_1(u_1) & g_1(u_1) & h_1(u_1) & 1 \\ f_2(u_2) & g_2(u_2) & h_2(u_2) & 1 \\ f_3(u_3) & g_3(u_3) & h_3(u_3) & 1 \\ f_4(u_4) & g_4(u_4) & h_4(u_4) & 1 \end{vmatrix} = 0, \text{ 或は } \begin{vmatrix} f_1 & g_1 & h_1 & 1 \\ f_2 & g_2 & h_2 & 1 \\ f_3 & g_3 & h_3 & 1 \\ f_4 & g_4 & h_4 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad (6)$$

を満足する。

従って、四変数の方程式の共面図表を求めるには、与えられた方程式を(6)の行列式の形に表わし、(5)で定義される四つの空間曲線をえがいて、それぞれの曲線上に、 u_1, u_2, u_3, u_4 なる目盛をつければよい。上記のも、尺度係数はすべて1であるが、必要に応じて適当に定めることができる。

方程式(6)を満足する u_1, u_2, u_3, u_4 のうち三つが与えられれば、他の一つは必然的に決定される。例えば、 u_1, u_2, u_3 が与えられたとき u_4 を求めるには、曲線 F_1, F_2, F_3 上にそれぞれ目盛 u_1, u_2, u_3 なる三点 P_1, P_2, P_3 をとり、この三点で定められる平面と、残りの一曲線 F_4 との交点 P_4 に付されている目盛 u_4 を読めば、これが求めるものである。

さて次に、この原理を用いて共面図表を作成するのであるが、この作成は容易ではない。共面図表は立体図形であるから、そのままの形で表わそうとすれば、立体模型が必要となる。しかし、このような立体模型は、作成も容易でなく、また実用的でもない。過去の文献によれば、いろいろな方法を用いているのがみられるが、何れも、特殊な器具を必要とする。〔文献1, 3〕そこで、私は、Douglas P. Adamsの方法〔文献2〕に従って、この共面図表を、直角投影法を用いて、平面上に表わし、平面図、立面図、側面図のうち、できるだけ少数の図表を用いて、計算することを考えたのである。

以下、一二の例によってこの方法を述べてみたい。

§ 3 例1 $abc=d$

第一の例として、比較的容易な三数の積

$$abc=d \quad (7)$$

をとる。(7)の両辺の常用対数をとれば

$$\log a + \log b + \log c = \log d$$

$$\therefore \log a + \log b + \log c - \log d = 0 \quad (8)$$

となり、(8)は次の行列式で表わすことができる。

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & \log a & 1 \\ 10 & 0 & \log b & 1 \\ 0 & 10 & \log c & 1 \\ \frac{10}{3} & \frac{10}{3} & \frac{1}{3} \log d & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad (9)$$

従って、四直線 a, b, c, d を

$$\left. \begin{array}{l} (a) : x_1=0, \quad y_1=0, \quad z_1=\log a ; \\ (b) : x_2=10, \quad y_2=0, \quad z_2=\log b ; \\ (c) : x_3=0, \quad y_3=10, \quad z_3=\log c ; \\ (d) : x_4=\frac{10}{3}, \quad y_4=\frac{10}{3}, \quad z_4=\frac{1}{3} \log d \end{array} \right\} \quad (10)$$

によって定義すれば、第7図(31ページ)に示すような四直線が得られる。これらの直線上に(10)に従って目盛 a, b, c, d を付ける。

三直線 a, b, c 上にそれぞれ目盛 $(a), (b), (c)$ なる三点をとり、この三点を通る平面と直線 d との交点に付せられた目盛 (d) を読めば、求める積 abc を得る。

第7図(31ページ)の直角投影図が第8図(31ページ)であるが、この例の場合は、二直線 c, d の間に補助線を一本つけ加えれば、平面図、側面図は、實際上不必要で、立面図のみで足りる。図中に示した1, 2, 3の数字は、 a, b, c を与えて積 d を求める手順を示したものである。ここに、数字2, 3で表わされる二直線は平行である。この手順を1, 3, 2の順に行えば、逆計算即ち、 a, c, d を与えて $b = \frac{d}{ac}$ を求めることができる。第9図(32ページ)は実際に用いる計算図で、図中の例は、

$$a=8.5,$$

$$b=1.8,$$

$$c=3.2$$

を与えて、積

$$d=48.96$$

を得る計算を示したものである。

§ 4 例 2 $M = P \left(1 + \frac{\gamma}{100} \right)^n$

第二の例は、元利合計(複利法)の公式である。即ち、元金 P 円、一期の利率 $\gamma\%$ 、期間 n の元利合計を M 円とすると、

$$M = P \left(1 + \frac{\gamma}{100} \right)^n \quad (11)$$

である。(11)の両辺の常用対数をとれば、

$$\log M = \log P + n \log \left(1 + \frac{\gamma}{100} \right)$$

$$\therefore \log M - \log P - n \log \left(1 + \frac{\gamma}{100} \right) = 0 \quad (12)$$

となる。方程式(12)は次の行列式で表わすことができる。

$$\begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{\log P} & 0 & 1 \\ \frac{n}{n-1} & 0 & 0 & 1 \\ 1 & \frac{1}{\log M} & \frac{1}{\log M} & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\log \left(1 + \frac{\gamma}{100} \right)} & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad (13)$$

これより、四直線 P , n , M , γ を次のように定める。

$$\left. \begin{aligned} (P) : & x_1 = 1, y_1 = \frac{1}{\log P}, z_1 = 0 \\ (n) : & x_2 = \frac{n}{n-1}, y_2 = 0, z_2 = 0 \\ (M) : & x_3 = 1, y_3 = \frac{1}{\log M}, z_3 = \frac{1}{\log M} \\ (\gamma) : & x_4 = 0, y_4 = 0, z_4 = \frac{1}{\log \left(1 + \frac{\gamma}{100} \right)} \end{aligned} \right\} (14)$$

(14)に示した四直線の位置は、第10図(33ページ)で表わされる通りで、これらの直線上に、(14)に従って、それぞれ目盛 P , n , M , γ をつける。

三直線 P , n , γ 上にそれぞれ目盛 (P) , (n) , (γ) なる三点をとり、この三点を通る平面と直線 M との交点に付せられた目盛 (M) を読めば、求める元利合計

$$M = P \left(1 + \frac{\gamma}{100} \right)^n \text{ を得る。}$$

第11図(33ページ)は、第10図(33ページ)の図形を直角投影法によって投影した図である。三直線 n , P , γ 上にそれぞれ目盛 (n) , (P) , (γ) なる点をとり、二点 (n) , (P) を結ぶ直線と基線との交点と点 (γ) を結ぶ(番号2の直線)。(P)から基線に垂線を下し(番号3の直線)、その足から番号2の直線に平行な直線(番号4の直線)をかき、直線 M との交点を (M) とすれば、求める元利合計が得られる。この場合には、平面図、立面図のみを要し、側面図は不要である。図中に付した番号は、計算する手順を示したものであるが、この順序を逆にすれば、次のような計算も行うことができる。

- 1) M , P , γ を与えて n を求める計算 番号3, 4, 2, 1の順に行う。
- 2) M , P , n を与えて γ を求める計算 番号3, 4, 1, 2の順に行う。

以上の1), 2)もさきの場合と同様に、平面図、立面図のみで行うことができ、側面図は不要である。

- 3) M , γ , n を与えて P を求める計算,

この場合に限り、側面図をも必要とする。平面図の n を用いないで、側面図の n を用いる。番号1', 2', 3', 4'の順に行う。もっとも、 P の目盛と同一の目盛を、すぐ上の

基線にも目盛っておけば、側面図と立面図のみを用いて計算することができ、手順を一つ減らすこともできる。

第12図(34ページ)は、実際に用いる計算図で、図中の例は

$$P=15000,$$

$$\gamma=3,$$

$$n=3$$

が与えられて、元利合計

$$M=16400$$

を得る計算を示したものである。なお、第12図(34ページ)では、紙面の都合上、側面図は省いてあるが、必要に応じてつけ加えればよい。

§ 5 本例の図表の短所とその対策

以上、二つの例について、共面図表の作成及び使用を述べてきたが、本例の図表をみてもすぐわかるように、実際にこれを使用する場合に、少なからざる不便が感じられる。例1は比較的すっきりとしており、使用上、特に不便な点は感じられないが、例2は明らかにいろいろな欠点を包含している。そこで、本稿の最後として、この節において、特に、例2の図表について、これらの欠点——使用上の不便——を指摘し、あわせて、これに対する対策を考察してみたいと思う。

例2の図表には、次のような欠点が見られる。例えば、

- 1) γ 尺には、1.5以下の目盛がない。従って、1.5以下の γ については用いることができない。
- 2) P 尺、 M 尺の目盛は共に1.14から10までで、1.14より小さい P 、 M については用いることができない。
- 3) P 尺、 M 尺、 γ 尺、 n 尺のいずれも、逆数目盛のため、目盛の数値の大きいところでは目盛の間隔が小さく、殆んど用いることができない。また、用いることができて、その精度は著しく悪くなる。

などの点をあげることができよう。これらの欠点をできるだけ除去するためには、まだまだ研究の余地があるが、上の各項について大要次のような方法を講ずればよいのではないかと思われる。

- 1) 1.5以下の γ については、第12図では不可能である。これは、紙面を大きくしても、改良はそんなに多くは期待できない。しかし、実際問題として、1.5以下の γ は殆んど用いられないのではないかと思う。利率が1.5%以下の場合には稀であると思われるからである。従って、理論的には欠点かもしれないが、実用の点からみれば、さほど大きい問題ではないとしてよいのではないだろうか。むしろ、10以上の γ を、用いやすくする方が先決問題であろう。
- 2) P 、 M がそれぞれ1.14より小さい場合は計算できない。これは確かに大きい欠点である。 P 尺、 M 尺共に、実際に用いるのは、1.15から3.0ぐらいまでである。この範囲は極めて小さいもので、実用の点からいえば、殆んどその価値が失われる。次の3)とも関連することであるが、差当ってこの図表を用いることにして考えるならば、手数がかかることを前提として、次の方法により、その不便は解消さ

れる。

γ , n の二数が定まっていれば, P , M は互に正比例する。従って, P , M に或る適当な正の定数 (例えば K) を乗じて, KP , KM がいずれも 1.15 から 3.0 までの間に入るようにすることができる。この KP を用いて KM を求め, KM に $\frac{1}{K}$ を乗ずれば, 求める M が得られる。例えば, γ , n が一定で, $\left(1 + \frac{\gamma}{100}\right)^n = 1.2$ のとき, $P = 90000$ から $M = 108000$ を得る計算の場合, $K = 0.2$ と定めて, $P' = KP = 18000$ とし, これより $M' = P' \left(1 + \frac{\gamma}{100}\right)^n = 21600$ を求め, $M = \frac{1}{K} M' = 108000$ を求めることができる。この場合の補助計算は, 別の計算図表——これは, 乗除のみの簡単な共線図表でよい——を用いて行えば, そんなに繁雑ではない。この補助図表を第 12 図 (34 ページ) の上部の余白にえがいておけば一層便利である。

- 3) 例 2 の図表の最大の欠点は, P 尺, M 尺, γ 尺, n 尺のいずれも, 逆数目盛を用いていることである。計算図表では, 原則的に, 逆数目盛を用いるものではないことは周知の事実であるが, このために, 目盛の数値の大きいところでは, 目盛の間隔がせまく, 殆んど用いられない。或いは, 精度を甚しく減ずる。これは, 方程式 (11), 或いは (12) を, 行列式 (13) に組織したときから予想されたことであるが, 別の行列式で表わすことができれば, 一挙に解決する。しかし, もしそれが困難ならば, 行列式 (13), 或いは第 12 図 (34 ページ) に対して, 更に, 適当な射影変換を施し, 適当な図表にすることはできるであろう。また, 精度の激減は, 部分的にでも高精度化することによって, その欠点は除くことができよう。この, 射影変換及び高精度化による是正は, 今後の研究によって達成したいと思うのである。

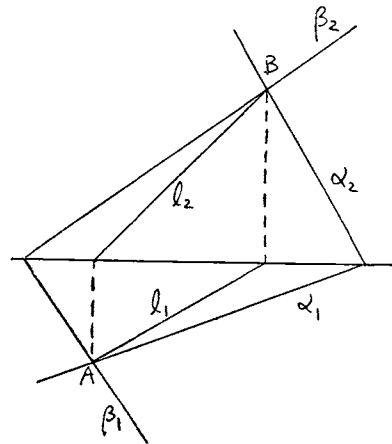
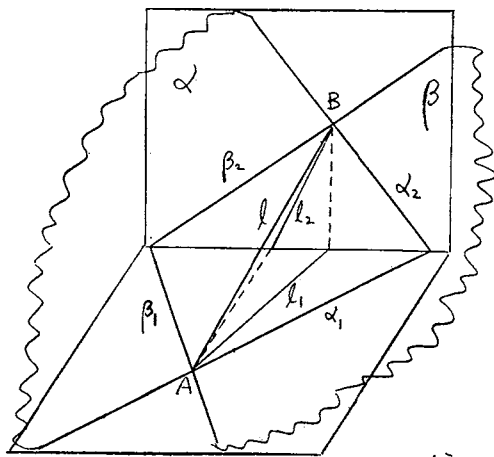
また, 実用の面からのみえれば, P 尺を上方向へ平行に, 基線に重なる位置まで平行移動しておくか, 或いは, 逆に, M 尺を上方向へ平行移動と反対方向に同じ量だけ平行移動しておくならば, 計算の手順を一回だけ減らすことができる。しかし, これは, 理論的には本質的なものではない。

以上, 本例の欠点と, それに対する対策を考察してみたが, これらのことからみても, 本例は, 原理の簡単な例として取り上げたものであって, 未だ実用には遙かに遠い。しかも, 単なる一二の例であって, 外にもっと適当な例は, いくらかあることと思われる。この意味で, 今後に残された問題は極めて大きく, 更に研究を重ねていきたいと思う。

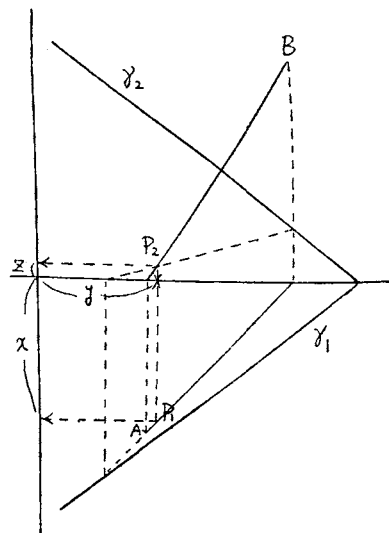
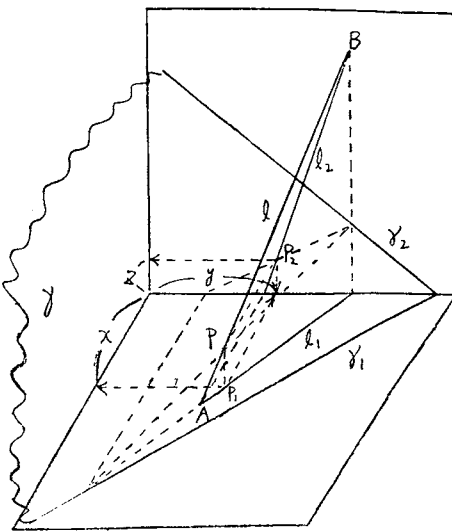
最後に, 文献の提供その他いろいろな助言をいただいた, 金沢大学工学部助教授理学博士守田勝彦先生に深甚の謝意を表す。

参 考 文 献

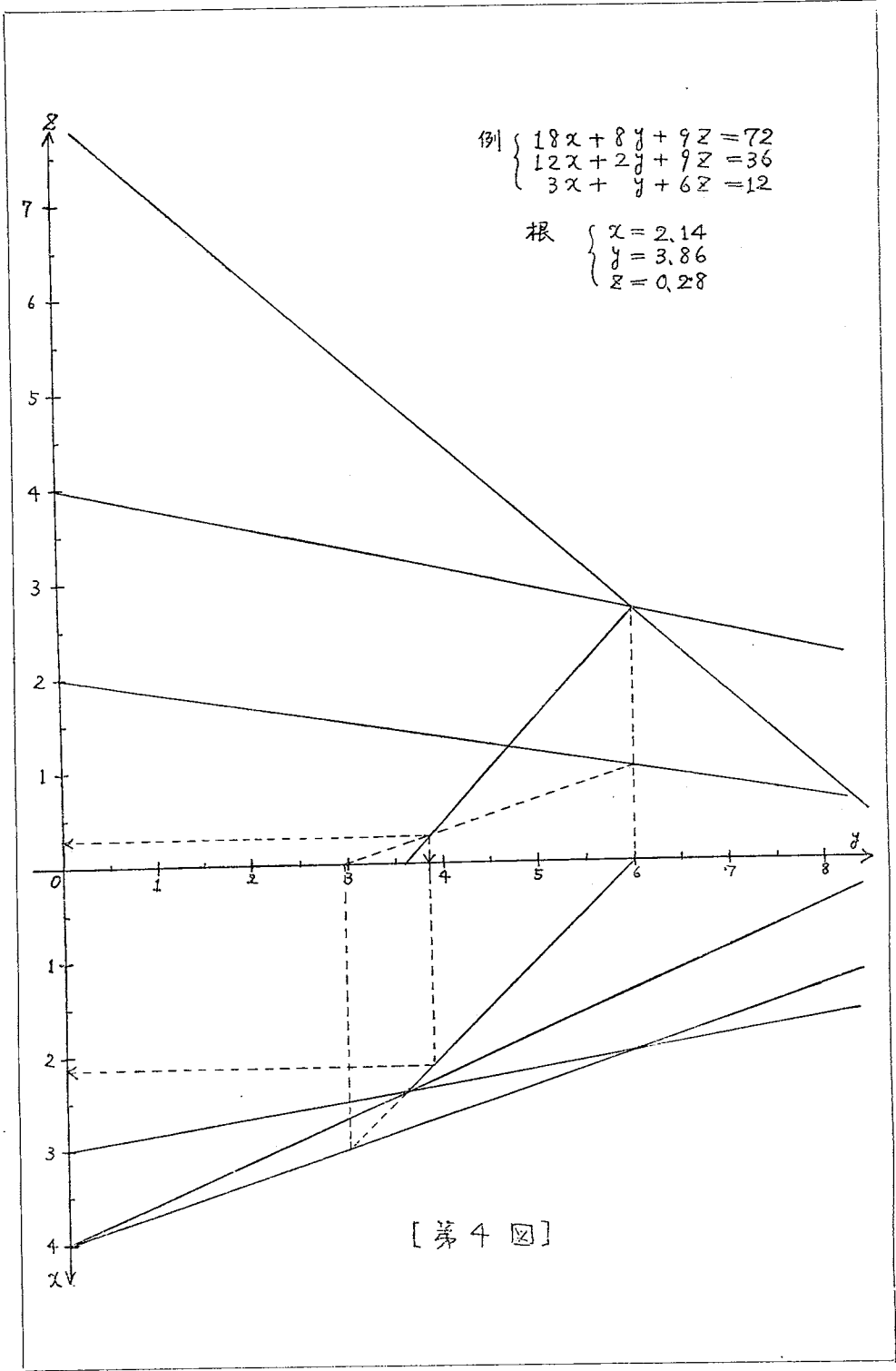
1. Josef Sutor; Stereonomogramme, Mitteilungen der Deutschen Gesellschaft für Photogrammetrie, Jan. 1940, Ht. 4, S. 158—171. (航測文献集 No. 11. = 立体計算図表, 大日本航空株式会社航測所刊, 昭和 17 年)
2. Douglas P. Adams; Three Dimensional Nomograms. (Presented to the American Society for Engineering Education, Drawing Division, Winter Session, held at Univ. of Pennsylvania, Philadelphia, Pennsylvania, Jan. 1954).
3. 小倉金之助; 計算図表 (岩波全書), 岩波書店, 昭和 23 年, 144—148 ページ
4. 谷村豊太郎; 計算図表学, 丸善出版株式会社, 昭和 23 年, 140—143 ページ

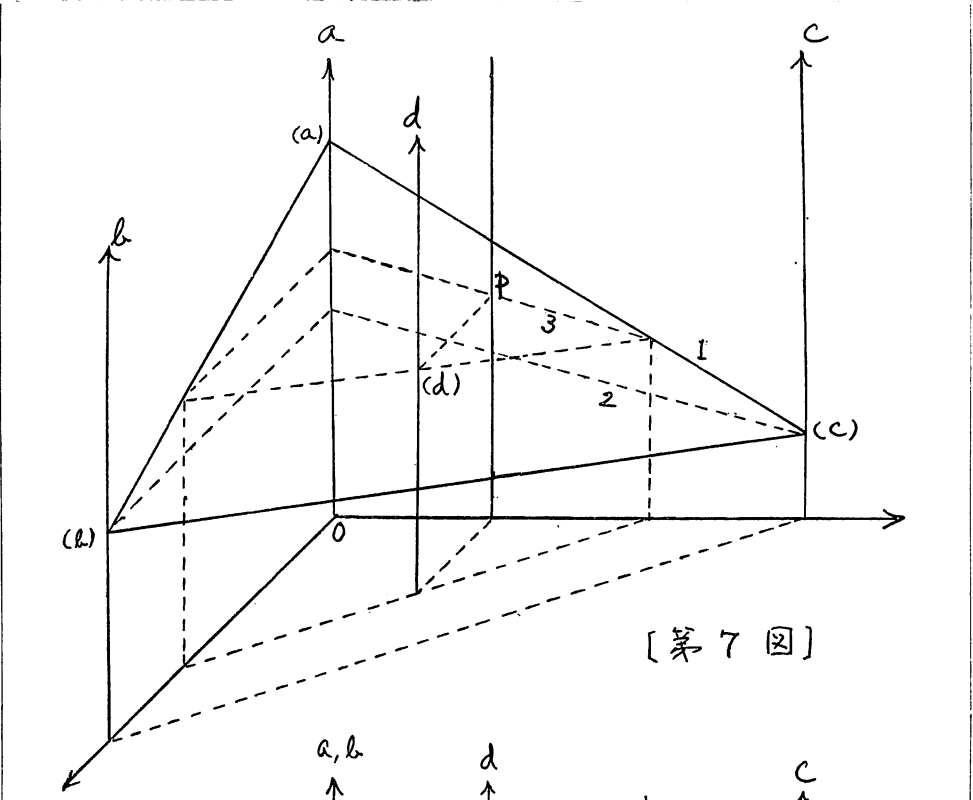


[第 2 图]

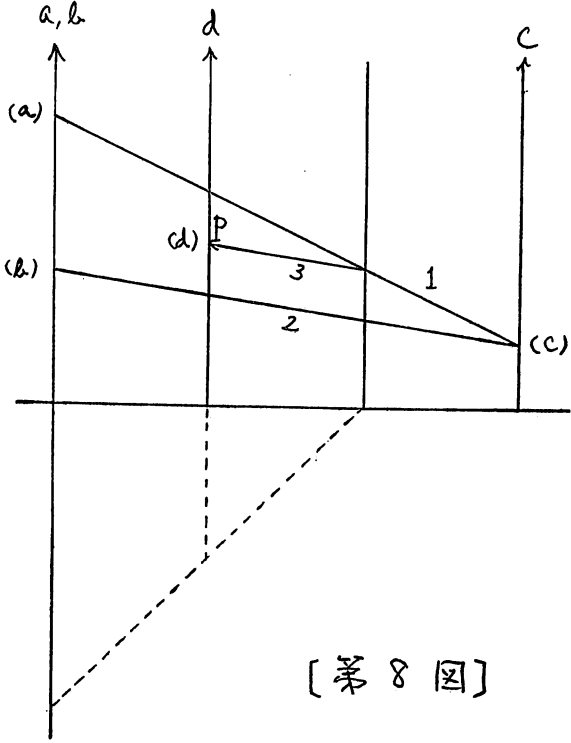


[第 3 图]

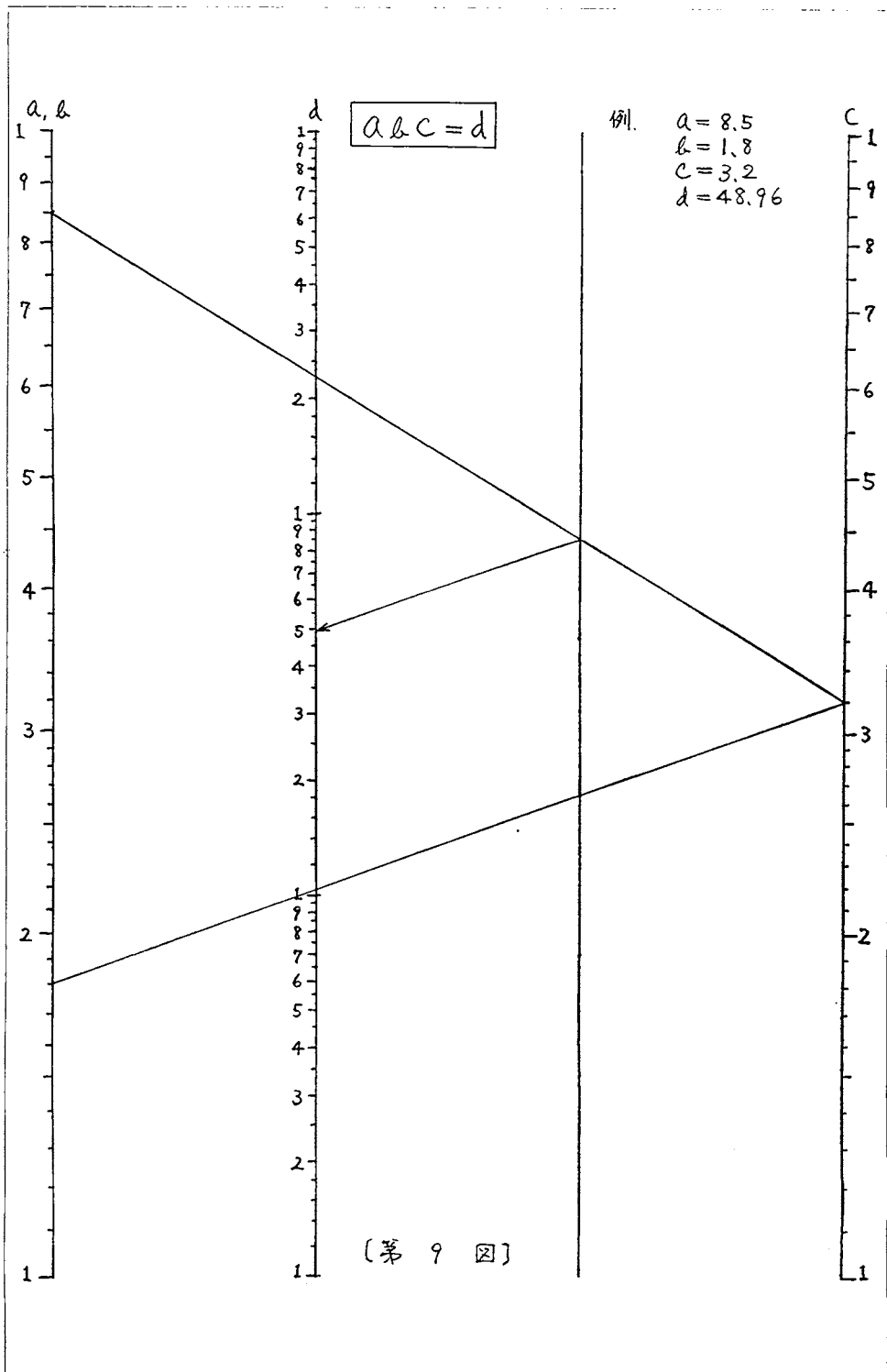


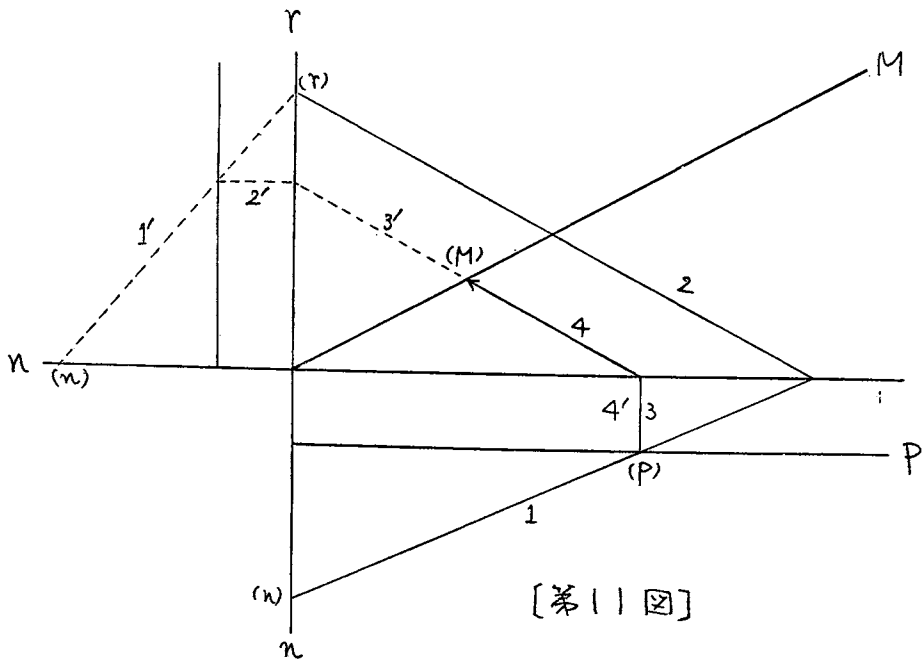
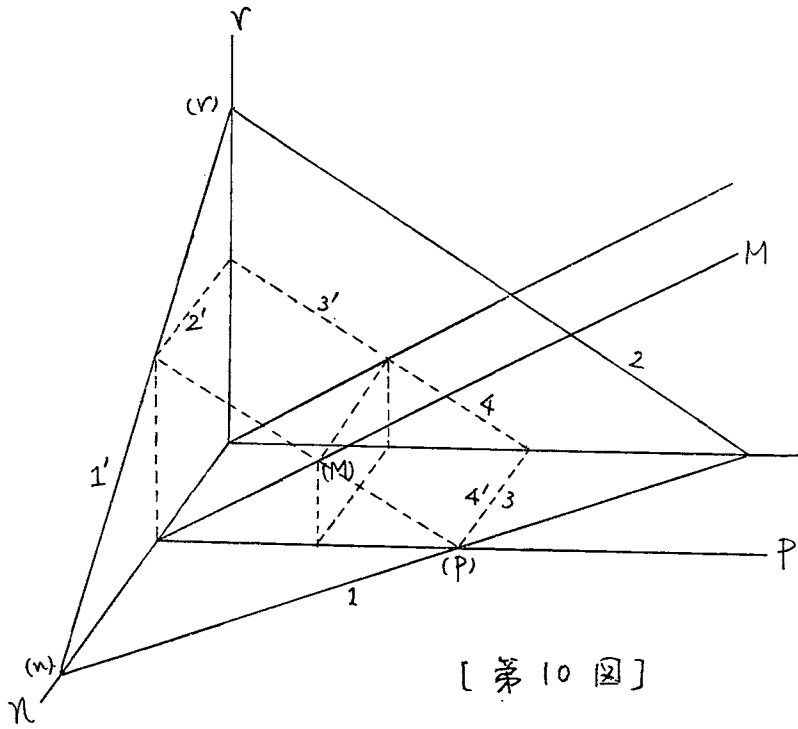


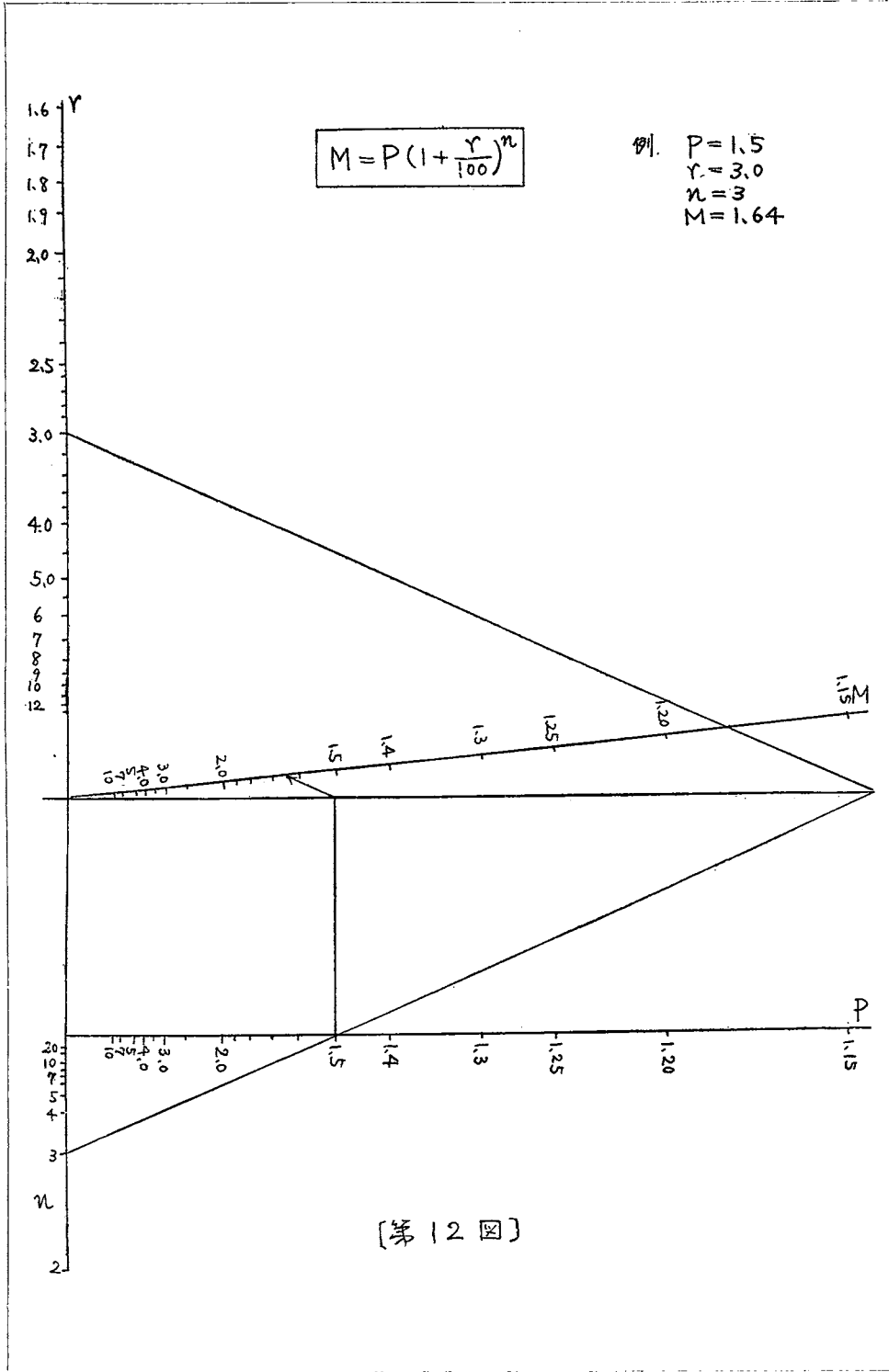
[第 7 图]



[第 8 图]







[第 12 図]